Э. М. ПОГОСЯН

СИСТЕМЫ НЕСРАВНИМЫХ МНОЖЕСТВ С НАИМЕНЬШИМ ЧИСЛОМ ПОДМНОЖЕСТВ

В работе описан комбинаторный аппарат для исследования свойств подмножеств конечных множеств, с помощью которого дается решение экстремальной комбинаторной проблемы по построению систем несравнимых множеств с минимальным числом подмножеств.

Проблема формулируется следующим образом.

Для заданного конечного множества M и целочисленного набора $l_1, \ldots, l_k$, $m_1, \ldots, m_k$, построить m подмножеств множества M мощности l_j, $1 \leqslant j \leqslant k$, таких, чтобы эти множества попарно не содержались бы друг в друге и чтобы для произвольного натурального числа i число всех различных подмножеств мощности i, полученных из этих множеств, было бы наименьшим. Системы множеств этого типа при $l_1 = \ldots = l_k = l$ впервые были построены Макалеем в 1927 г. [1]; им же доказана их экстремальность для $i = l - 1$. Обобщение теоремы Макалея для небинарного случая и произвольного i получено Клементсом и Линдстромом в 1969 г. [2]. Независимо, автором в 1970 г. было получено полное решение указанной проблемы [3].

В работе приводятся бесппереборные алгоритмы построения указанной экстремальной системы подмножеств множества M, названной в работе *уплотненным множеством,* вычисления числа подмножеств уплотненного множества заданной мощности, а также доказательство того факта, что полученная система искомая.

Как показано в работе, для фактического построения уплотненного множества необходимо последовательно отсчитать $m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ лексикографически упорядоченных подмножеств множества M, а затем взять их дополнения до M. При этом оказывается, что уплотненное множество построено самым экономным способом в том смысле, что оно использует лишь то минимальное число элементов множества M, из которых вообще возможно построение подобного рода систем.

Рассматриваемый комбинаторный аппарат послужил основой для построения систем *произвольных* множеств с наименьшим числом подмножеств [5]. Соответствующая проблема формулируется следующим образом: для заданных конечного множества M мощности n и числа $m < 2^n$ построить систему из m подмножеств M, такую, чтобы число всех различных подмножеств мощности i^*, полученных из элементов этой системы, было наименьшим, где i^* — минимальное число i от 0 до n, такое, что существует хотя бы одна система вышеуказанного типа с числом подмножеств меньшим, чем число всех подмножеств M мощности i.

На основе решения вышеуказанных проблем в [3, 4] предложены бесnереборные алгоритмы построения нижних оценок длин минимальных тестов конкретных таблиц. Ранее известные оценки этого типа являются асимптотическими от параметров таблиц [5, 6].

Работа состоит из четырех параграфов.

В § 1 приводятся основные определения и формулируется основной результат работы — теорема о минимальном числе подмножеств. В последующих § 2—4 излагается полное доказательство основной теоремы.

В § 2 дается алгоритм построения последовательностей наборов, из отрезков которых строятся уплотненные множества. По существу алгоритм позволяет строить лексикографически упорядоченную последовательность, составленную из всевозможных различных подмножеств заданного множества.

В § 3 проводится исследование одного специального типа графов— Δ-графов. Для множества Δ-графов доказывается лемма об изоморфизме и приводится ряд количественных закономерностей, описывающих свойства множеств вершин Δ-графов. Показывается, что существует индуктивный способ порождения Δ-графов. Этот факт является стержневым при доказательстве основной теоремы.

В § 4 излагается заключительная часть доказательства основной теоремы. Она проводится индукцией по Δ-графам и существенно опирается на полученные в § 1—2 результаты.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРЕМЫ

В дальнейшем изложении *набором* будем называть всякое конечное множество элементов, рассматриваемых вместе с некоторым определенным отношением линейной упорядоченности. *Пустой набор* есть по определению пустое множество.

Поднабором набора A мы будем называть всякое конечное множество, составленное из элементов A, рассматриваемое вместе с отношением упорядоченности, индуцированным упорядоченностью A.

Всякий поднабор набора A, отличный от A, будем называть *собственным поднабором* A.

Число элементов набора A будем называть *длиной* A.

Через $I_{n,p}$, где n, p—произвольные целые положительные числа или нули, обозначим набор $\{p+1, \dots, p+n\}$, а через $R_{n,p}$—множество всех поднаборов $I_{n,p}$. Если $p=0$, то индекс p в соответствующих местах обозначений будет опускаться. Если $n=0$, то $R_{o,p}=I_{o,p}$ есть по определению пустой набор.

Элементы множества $R_{n,p}$ будем называть $\Delta_{n,p}$-*наборами*; $\Delta_{n,p}$--наборы длины k, $0 \leqslant k \leqslant n$ назовем $\Delta^k_{n,p}$-наборами (соответственно будем говорить о $\Delta^k_{n,p}$-поднаборах, собственных $\Delta^k_{n,p}$-поднаборах).

Через $R^k_{n,p}$ обозначим множество всех $\Delta^k_{n,p}$-наборов.

Очевидно, $|R^k_{n,p}| = C^k_n$, при $0 \leqslant k \leqslant n$, и

$$|R_{n,p}| = \left|\bigcup_{k=0}^{n} R^k_{n,p}\right| = \sum_{k=0}^{n} C^k_n = 2^n.$$

Для $\Delta_{n,p}$-наборов мы введем действия объединения $\cup$, пересечения $\cap$, вычитания/, определяемые следующим образом: если A и B суть $\Delta_{n,p}$-наборы и P и Q-множества их элементов, то $A \cup B$ (соответственно $A \cap B, A \setminus B$) мы определяем как множество $P \cup Q$ (соответственно $P \cap Q$, $P \setminus Q$), рассматриваемые совместно с отношением упорядоченности, индуцированным упорядоченностью в наборе $I_{n,p}$.

Определим в $R_{n,p}$ отношение линейной упорядоченности $\prec$.

Для произвольных различных $\Delta_{n,p}$-наборов $B = \{b_1, \ldots, b_{k_2}\}$, $A = \{a_1, \ldots, a_{k_1}\}$ мы полагаем:

1. Если $k_1 \neq k_2$, то: *а*) A меньше B ($A \prec B$), если $k_1 < k_2$; *д*) B меньше A ($B \prec A$), если $k_2 < k_1$.

2. Пусть $k_1 = k_2$. Тогда существует $0 \leqslant j \leqslant k_1 - 1$ такое, что $a_i = b_i$, при всяком $i \in I_j$, и $a_{j+1} \neq b_{j+1}$. Мы полагаем: $A \prec B$, если $a_{j+1} < b_{j+1}$; *б*) $B \prec A$, если $b_{j+1} < a_{j+1}$.

Отношение, обратное к $\prec$, будем обозначать через $\succ$ (больше). Если $\Delta_{n,p}$-набор A меньше или равен $\Delta_{n,p}$-набору B (соответственно A больше или равен B), то будем писать $A \preceq B$ (соответственно $A \succeq B$).

Легко видеть, что упорядоченное множество $R_{n,p}$ изоморфно вкладывается в множество всех лексикографически упорядоченных слов в n-буквенном алфавите. Поэтому введенное в $R_{n,p}$ отношение упорядоченности $\prec$ мы будем называть *лексикографическим*.

Последовательность $\Delta_{n,p}$-наборов $A_1, \ldots, A_m$ назовем *+-уплотненной*, если

$$\forall j\, (j \in I_{m-1} \to A_j \prec A_{j+1} \,\&\, \neg \exists A\, (A \in R_{n,p} \,\&\, A_j \prec A \prec A_{j+1})),$$

и *— -уплотненной*, если

$$\forall j\, (j \in I_{m-1} \to A_j \succ A_{j+1} \,\&\, \neg \exists A\, (A \in R_{n,p} \,\&\, A_j \succ A \succ A_{j+1})).$$

$\Delta_{n,p}$-набор $B = \{b_1, \ldots, b_{k_2}\}$ назовем *k_2-расширением* $\Delta_{n,p}$-набора $A = \{a_1, \ldots, a^{k_1}\}$, если $k_2 \geqslant k_1$ и при любом i от 1 до k_1 будет $a_i = b_i$.

Произвольное k-расширение B $\Delta_{n,p}$-набора A назовем *расширением* A, а отношение «набор B является k-расширением набора A» будем называть *отношением k*-расширения.

Расположенную в лексикографическом порядке последовательность $\Delta^{k_2}_{n,p}$-наборов, составленную из всех различных k_2-расширений всех наборов какой-либо последовательности $\Delta^{k_1}_{n,p}$-наборов $A_1, \ldots, A_m$, либо какого-либо множества $\Delta^{k_1}_{n,p}$-наборов S, где $0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant n$, назовем *$k_2$-продолжением последовательности* $A_1, \ldots, A_m$, соответственно, *k_2-продолжением множества* S.

Ясно, что k_2-продолжение произвольного множества $\Delta^{k_1}_{n,p}$-наборов S совпадает с k_2-продолжением произвольной последовательности, составленной из всех наборов множества S, а k_2-продолжение произвольной последовательности $\Delta^{k_1}_{n,p}$-наборов совпадает с k_2-продолжением множества всех наборов этой же последовательности.

Заметим, что некоторые множества или последовательности $\Delta^{k_1}_{n,p}$-наборов могут не иметь k_2-продолжений.

Для произвольного $\Delta_{n,p}$-набора A всякий набор $B = A \cup C$, где C-произвольный $\Delta_{n,p}$-набор, будем называть *$\Delta_{n,p}$-надиабором* набора A. $\Delta_{n,p}$-наднабор B набора A назовем *собственным $\Delta_{n,p}$-наднабором* A, если B отличен от A.

В частности, каждое k-расширение произвольного $\Delta_{n,p}$-набора A является одновременно $\Delta_{n,p}$-наднабором A.

Будем обозначать i-ю компоненту произвольного набора A через $(A)_i$, где $i \in \{1, 2, \ldots, |A|\}$. Таким образом, $A = \{(A)_1, \ldots, (A)_{|A|}\}$.

По определению мы полагаем, что $(A)_0 = (\varnothing)_k = 0$, где A-произвольный $\Delta_{n,p}$-набор, $0 \leqslant k \leqslant n$.

Заметим также, что число k-расширений пустого набора определяется параметром n. Поэтому мы будем пользоваться терминами "пустой $\Delta_{n,p}$-набор" или "$\Delta^0_{n,p}$-набор".

Из нижеследующей леммы 0 следует, что все рассуждения относительно лексикографического упорядочения и k-расширения можно проводить для множества R_n, а полученные результаты без изменений переносить на произвольное множество $R_{n,p}$.

Лемма 0. *Произвольное лексикографически упорядоченное множество $R_{n,p}$ изоморфно лексикографически упорядоченному множеству R_n относительно отношений упорядоченности и k-расширения, при любом k, $0 \leqslant k \leqslant n$. При этом:*

1. *При указанном изоморфизме взаимооднозначное отображение θ множества $R_{n,p}$ на множество R_n определяется единственным образом;*

2. $$\forall BC (B \in R_{p,n} \& C \in R_n \to ((B = \varnothing \to \theta(B) = \varnothing) \&$$
$$\& (C = \varnothing \to \theta^{-1}(C) = \varnothing) \& (B \neq \varnothing \to \theta(B) = \{(B)_1 - p, \ldots,$$
$$(B)_{|B|} - p\} \in R_{n,p}) \& (C \neq \varnothing \to \theta^{-1}(C) = \{(C)_1 + a, \ldots, (C)_{|C|} + p\} \in R_n))).$$

3. *Если $B_1, \ldots, B_m$ и $C_1, \ldots, C_r$ — $+$-уплотненные последовательности соответственно из $R_{n,p}$ и R_n, то последовательности $\theta(B_1), \ldots, \theta(B_m)$ и $\theta^{-1}(C_1), \ldots, \theta^{-1}(C_r)$ является $+$-уплотненными последовательностями наборов соответственно из R_n и $R_{n,p}$.*

В дальнейшем изложении множество R_n предполагается лексикографически упорядоченным.

Будем говорить, что Δ_n-наборы A и B *несравнимы по включению*, если они попарно не содержатся друг в друге.

Множество попарно несравнимых по включению наборов (м. п. н. н.) будем характеризовать следующей системой чисел.

Пусть $S = \{S_1, \ldots, S_m\}$ — произвольное м. п. н. н.

Разобьем множество S на непустые подмножества $P_1, \ldots, P_k$, где $k \geqslant 1$, каждое P_i состоит из наборов некоторой фиксированной длины

l_i и длины наборов, входящих в различные множества $P_1, \dots, P_k$, различны.

Не нарушая общности, можно считать, что $l_1 > l_2 > \dots > l_k$; числа $|P_1|, \dots, |P_k|$ будем обозначать через $m_1, \dots, m_k$.

Последовательность чисел $\chi = (n, l_1, \dots, l_k, m_1, \dots, m_k)$ полученных указанным образом будем называть *характеристической последовательностью* (*х.п.*) *м.п.н.н.* S.

Произвольную целочисленную последовательность вида $\chi = (n, l_1, \dots, l_k, m_1, \dots, m_k)$ будем называть *характеристической последовательностью* (*х.п.*), если она удовлетворяет следующим условиям:

$$1.\ n \geqslant l_1 > l_2 > \dots > l_k \geqslant 0;$$

$$2.\ m_i \neq 0,\ \text{при}\ i = 1, \dots, k.$$

При произвольном k, $0 \leqslant k \leqslant n$, через $\Gamma_n^k(1), \Gamma_n^k(2), \dots, \Gamma_n^k(C_n^k - 1)$, $\Gamma_n^k(C_n^k)$ обозначим $+$-уплотненную последовательность, составленную из всех Δ_n-наборов длины k, а через $L_n^{n-k}(j)$, при $j \in \{1, 2, \dots, C_n^k\}$, обозначим разность $I_n \setminus \Gamma_n^k(j)$.

Для произвольной х.п. $\chi = (n, l_1, \dots, l_k, m_1, \dots, m_k)$ *уплотненным множеством* L_χ с х.п. χ назовем множество Δ_n-наборов вида:

$$L_\chi = \{L_n^{l_1}(1), L_n^{l_1}(2), \dots, L_n^{l_1}(m_1), L_n^{l_2}(\tilde{m}_1 + 1), \dots, L_n^{l_2}(\tilde{m}_1 + m_2),$$

$$\dots, L_n^{l_k}(\tilde{m}_{k-1} + 1), \dots, L_n^{l_k}(\tilde{m}_{k-1} + m_k)\},$$

где $L_n^{l_{j+1}}(\tilde{m}_j) = I_n \setminus \Gamma_n^{n-l_{j+1}}(\tilde{m}_j)$ и $\Gamma_n^{n-l_{j+1}}(\tilde{m}_j)$ есть наибольшее в лексикографическом упорядочении $(n - l_{j+1})$-расширение последнего набора последовательности $\Gamma_n^{n-l_j}(1), \Gamma_n^{n-l_j}(2), \dots, \Gamma_n^{n-l_j}(\tilde{m}_{j-} + m_j)$, имеющего непустое $(n - l_{j+1})$-продолжение, при $j = 1, 2, \dots, k-1$, $\tilde{m}_0 = 0$.

Из данного определения видно, что для построения уплотненного множества с заданной х.п. $\chi = (n, l_1, \dots, l_k, m_1, \dots, m_k)$ по существу необходимо построить в лексикографической последовательности $\sum_{j=1}^{k} m_j$ Δ_n-наборов.

Сформулируем основную теорему.

Теорема I. (о минимальном числе подмножеств). *Для произвольной х. п. χ, если K_χ—класс всех м. п. н. н. с х.п. χ, L_χ—уплотненное множество с х. п. χ, то*:

1. *Класс K_χ непустой тогда и только тогда, когда можно построить уплотненное множество с х. п. χ;*

2. *Если класс K_χ непустой, то для произвольных i и S, где $0 \leqslant i \leqslant n$, $S \in K_\chi$, число всех различных подмножеств мощности i, полученных из наборов множества L_χ, не больше числа всех раз-*

личных подмножеств мощности i, полученных из наборов множества S.

Следствие 1. *Для произвольной х. п. χ число различных элементов, необходимых для построения уплотненного множества с х. п. χ, не больше числа элементов, необходимых для построения произвольного м. п. н. н. с той же х. п.*

Данное следствие сразу же получается из теоремы 1, если учесть, что интересующее нас число использованных при построении м. п. н. н. элементов совпадает с числом всех одноэлементных подмножеств этих наборов.

Указанное в следствии 1 свойство безызбыточности или экономичности уплотненных множеств относительно числа использованных при их построении элементов является некоторым объяснением к утверждению теоремы 1.

Для произвольных множества наборов S и натурального числа i через $N_i(S)$ будем обозначать число всех поднаборов длины i наборов из S.

Следствие 2. *Для произвольной х. п. χ, $\chi = (n, l_1, \ldots, l_k, m_1, \ldots, m_k)$, если K_χ-непустой класс м. п. н. н. с х. п. χ и L_χ-уплотненное множество с х. п. χ, то*

$$N_i(L_\chi) = \min_{S \in K_\chi} \left(\sum_{t=1}^{m} (-1)^{t-1} \sum_{\{S_{p_1}, \ldots, S_{p_t}\} \subseteq S} C^i_{|S_{p_1} \cap S_{p_2} \cap \ldots \cap S_{p_t}|} \right),$$

где $0 \leqslant i \leqslant n$, $m = \sum_{j=1}^{k} m_j$.

Теорема 1 и следствие 2 кроме самостоятельного интереса в комбинаторике могут быть полезны в теории управляющих систем, в теории кодирования и экономике. На одно из таких приложений теоремы 1 в теории тестов указано в [3, 4].

В нижеследующих § 2—4 будет приведено полное доказательство теоремы 1 и следствия 2. При этом в § 2 и 3 мы выделили те связные части этого доказательства, которые, на наш взгляд, интересны с несколько более общих позиций, чем данное доказательство.

§ 2. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ УПЛОТНЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Алгоритм Γ_n^k последовательного порождения $+$-уплотненной последовательности Δ_n^k-наборов, при $0 \leqslant k \leqslant n$, формулируется следующим образом.

I. Если $k = 0$, то $\Gamma_n^0(1)$ по определению есть пустой набор, и алгоритм заканчивает работу.

II. Пусть $0 < k \leqslant n$. Тогда:

1. Полагаем $\Gamma_n^k(1) = I_k$.

2. Пусть $\Gamma_n^k(i)$ — Δ_n^k-набор, уже порожденный алгоритмом Γ_n^k на i-ом шаге. Тогда $\Gamma_n^k(i+1)$ строится таким образом, что:

а) если $\Gamma_n^k(i) \prec \{1+n-k, \ldots, n\}$ то

$$\exists q \forall xy (1 \leqslant q \leqslant k \,\&\, 1 \leqslant x \leqslant q \,\&\, q < y \leqslant k \to$$
$$(\Gamma_n^k(i))_x < x+n-k \,\&\, (\Gamma_n^k(i))_y = y+n-k).$$

Это следует из нижеследующих леммы 2 и следствия 2.2 и определения Δ_n-наборов. Тогда полагаем $\Gamma_n^k(i+1) = \{(\Gamma_n^k(i))_1, \ldots, (\Gamma_n^k(i))_{q-1}, (\Gamma_n^k(i))_q + 1, (\Gamma_n^k(i))_q + 2, \ldots, (\Gamma_n^k(i))_q + k - q + 1\}$;

б) если $\Gamma_n^k(i) = \{1+n-k, \ldots, n\}$, то алгоритм заканчивает работу и $i = C_n^k$.

Ниже, в лемме 2, будет дано необходимое и достаточное условие $+$-уплотненности заданной последовательности Δ_n^k-наборов, которое по существу будет обоснованием алгоритма Γ_n^k.

Используя алгоритм Γ_n^k и нижеследующую лемму 4 мы получим алгоритм L_n^{n-k} последовательного порождения $-$-уплотненной последовательности Δ_n^{n-k}-наборов, если положим $L_n^{n-k}(i) = \mathrm{I}_n \setminus \Gamma_n^k(i)$, где $1 \leqslant i \leqslant C_n^k$.

При произвольном k, $0 \leqslant k \leqslant n$, последовательность $\Gamma_n^k(1)$, $\Gamma_n^k(2), \ldots, \Gamma_n^k(C_n^k)$ будем называть *последовательностью* Γ_n^k, соответственно $L_n^k(1)$, $L_n^k 2), \ldots, L_n^k(C_n^k)$ — *последовательностью* L_n^k.

Перейдем к обоснованию алгоритмов Γ_n^k и L_n^k. С этой целью приведем без доказательства следующие простые леммы.

Лемма 1.

$$\forall jk (1 \leqslant j \leqslant k \,\&\, 1 \leqslant k \leqslant n \,\&\, \mathrm{A} \in R_n^k \to j \leqslant (A)_j \leqslant j+n-k).$$

Следствие 1.1.

$$\forall kA (1 \leqslant k \leqslant n \,\&\, A \in R_n^k \to \{1, \ldots, k\} \leqslant A \leqslant \{1+n-k, \ldots, n\}$$

Следствие 2.1.

$$\forall xjk\mathrm{A} (1 \leqslant j \leqslant x \leqslant k \,\&\, A \in R_n^k \,\&\, (\mathrm{A})_j = j+n-k \to (A)_x = x+n-k).$$

Следствие 3.1.

$$\forall xjk\mathrm{A} (1 \leqslant x \leqslant j \leqslant k \,\&\, A \in R_n^k \,\&\, (A)_j < j+n-k \to (A)_x < x+n-k).$$

Лемма 2. *Последовательность* Δ_n^k-*наборов* $A_1, \ldots, A_m$, *где* $0 < k < n$, $A_1 < A_2 < \ldots < A_m$, $+$-*уплотненная тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*

$$\forall p \exists q \forall yzu (1 \leqslant p \leqslant m-1 \,\&\, q < y \leqslant k \,\&\, 1 \leqslant z < q \leqslant u \leqslant k \to (A_p)_y =$$
$$= y+n-k \,\&\, (A_p)_z = (A_{p+1})_z \,\&\, (A_{p+1})_u = (A_p)_q + u - q + 1). \qquad (1)$$

Лемма 3. *Множество* R_n *инверсно изоморфно самому себе относительно лексикографической упорядоченности при отображении* R_n *на себя таком, что произвольному* Δ_n-*набору соответствует дополнение этого набора до* I_n.

Замечание.

При изучении количественных свойств Δ_n^k-наборов удобно пользоваться следующей геометрической интерпретацией.

При каждом фиксированном k, $0 \leqslant k \leqslant n$ изобразим произвольный Δ_n^k-набор A посредством совокупности точек двумерной плоскости с координатами $(1, (A)_1)$, $(2, (A)_2)$, ... ,$(k, (A_k))$, либо как отрезок ломаной, соединяющей эти точки.

Тогда множество всех Δ_n^k-наборов будет заключено в четырехугольник с вершинами $(1,1)$, $(1,1+n-k)$, $(k, k+n-k)$, (k, k) (рис. 1)

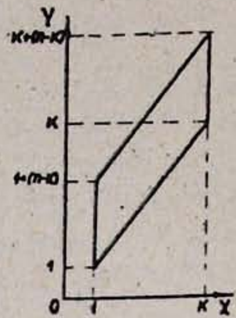

Рис. 1.

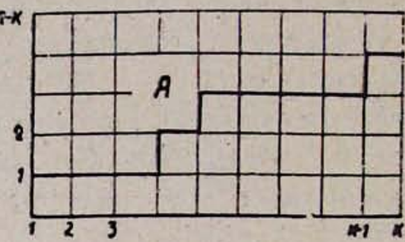

Рис. 2.

Последний можно рассматривать отдельно, в виде прямоугольной сетки (рис. 2.), на которой произвольный Δ_n^k-набор A изображается посредством точек с координатами $(1, (A)_1 - 1)$, $(2, (A)_2 - 2)$, ... ,$(k, (A)_k - k)$ или соответствующей ломаной.

При указанном представлении подсчет числа Δ_n^k-наборов с определенными свойствами заменяется подсчетом числа неубывающих ломаных с соответствующими свойствами.

Заметим, что подобного рода задачи описаны в [7, 8].

§ 3. Δ-ГРАФЫ

Этот параграф имеет вспомогательное значение. В нем дается определение одного специального класса графов — Δ-графов и рассматривается ряд свойств этих графов.

В частности, показывается, что Δ-графы можно порождать индуктивно. Этот факт является стержневым при доказательстве основной теоремы.

Приводятся также некоторые количественные закономерности для определенных совокупностей вершин Δ-графов, которые существенно используются в дальнейших построениях.

Пусть A произвольный Δ_n-набор, P_A-множество всех расширений A.

Δ_n-графом с корнем A мы назовем граф G, определяемый следующим образом.

1. Каждый Δ_n-набор B, принадлежащий множеству P_A, является вершиной B графа G.

2. Вершины B и C графа G соединены ребром в том и только в том случае, если выполнено одно из условий:

а) $|B|=|C|$ и B, C, либо C, B — $+$-уплотненные последовательности Δ_n-наборов;

б) C является $|C|$-расширением B и $|C|=|B|+1$; либо B является $|B|$-расширением C и $|B|=|C|+1$.

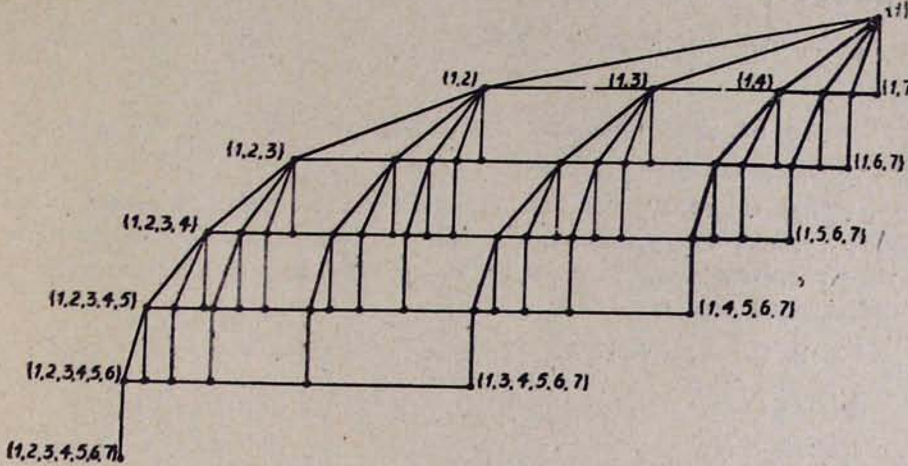

Рис. 3.

На рис. 3 изображен один из таких графов — Δ_7-граф с корнем $\{1\}$. Легко убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма 4. *Если B—произвольная вершина Δ_n-графа G с корнем A, где A—произвольный Δ_n-набор, то Δ_n-граф с корнем B является подграфом G.*

Пусть G — Δ_n-граф с корнем A, где A-произвольный Δ_n-набор, $(A)_{|A|}=a$. Тогда подграф G_p графа G такой, что $G_p = G \setminus \bigcup_{i=1}^{p} G_i$, где G_i — Δ_n-граф с корнем $A \cup \{a+i\}$, $i=1,\dots,p$, $0 \leqslant p \leqslant n-a$, будем называть *$\partial\Delta_n^{(p)}$-графом с корнем* A.

Если G—произвольный $\partial\Delta_n^{(p)}$-граф с корнем A, то через $\{G\}$ будем обозначать множество всех вершин G.

Заметим, что $\partial\Delta_n^{(0)}$-граф с корнем A совпадает с Δ_n-графом с корнем A, а $\partial\Delta_n^{(n-a)}$-граф с корнем A — с графом, имеющим единственную вершину A.

На рис. 3 толстыми линиями выделен $\partial\Delta_7^{(2)}$-граф с корнем $\{1\}$.

Множество всех $\partial\Delta_n^{(p)}$-графов относительно изоморфизма между графами разбивается на нетривиальные классы эквивалентности. Прежде чем доказать это утверждение, укажем на следующую лемму.

Лемма 5. *Для произвольного $\Delta_n^{k_1}$-набора A, если B — k_2-расширение A, то $B = A \cup C$, где $0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 < n$, а C — некоторый $\Delta_n^{k_2-k_1}$-поднабор набора $\{(A)_{k_1}+1, (A)_{k_1}+2, \ldots, n\}$, и наоборот, если D — произвольный $\Delta_n^{k_2-k_1}$-поднабор набора $\{(A)_{k_1}+1, \ldots, n\}$, то $A \cup D$ есть k_2-расширение A.*

Следствие 1.5. *Произвольный $\Delta_n^{k_1}$-набор A имеет ровно $C_{n-(A)_{k_1}}^{k_2-k_1}$ k_2-расширений, где $0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant n$.*

Следствие 2.5. *k_2-продолжение множества $\Delta_n^{k_1}$-наборов $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ имеет ровно $\sum_{j=1}^{m} C_{n-(A_j)_{k_1}}^{k_2-k_1}$ $\Delta_n^{k_2}$-наборов, где $0 \leqslant k_1 \leqslant$ $\leqslant k_2 \leqslant n$.*

Лемма 6*. *Для произвольного Δ_n-набора A, если G — некоторый $\partial\Delta_n^{(p)}$-граф с корнем A, $(A)_{|A|} = a$, то:*

1. *Граф G изоморфен Δ_{n-a-p}-графу F, корнем которого является пустой Δ_{n-a-p}-набор: при этом изоморфизме взаимно-однозначное соответствие θ между вершинами G и F устанавливается единственным образом;*

$$2.\ \forall BC\,(B \in \{G\}\ \&\ C \in \{F\} \rightarrow ((B = A \rightarrow \theta(B) = \varnothing)\ \&$$
$$\&\ (C = \varnothing \rightarrow \theta^{-1}(C) = A)\ \&\ (B \neq A \rightarrow \theta(B) = \{(B)_{|A|+1} - a - p,$$
$$\ldots, (B)_{|B|} - a - p\} \in \{F\})\ \&\ (C \neq \varnothing \rightarrow \theta^{-1}(C) =$$
$$= A \cup \{(C)_1 + a + p, \ldots (C)_{|C|} + a + p\} \in \{G\})));$$

$$3.\ \forall BC\,(B \in \{G\}\ \&\ C \in \{F\} \rightarrow |\theta(B)| = |B| - |A|\ \&\ |\theta^{-1}(C)| =$$
$$= |C| + |A|;$$

4. $\forall B_1B_2C_1C_2$, *если* $B_1B_2 \in \{G\}$ и $C_1, C_2 \in \{F\}$, B_2 — $|B_2|$-*расширение* B_1 *и* C_2 — $|C_2|$-*расширение* C_1, *то* $\theta(B_2)$ *будет* $(|B_2| - |A|)$-*расширением* $\theta(B_1)$ *и* $\theta^{-1}(C_2)$ — $(|C_2| + |A|$-*расширением* $\theta^{-1}(C_1)$;

5. *Если* $B_1, \ldots, B_m$ и $C_1, \ldots, C_r$ *+ -уплотненные последовательности наборов соответственно из* $\{G\}$ *и* $\{F\}$, *шо* $\theta(B_1), \ldots, \theta(B_m)$ *и* $\theta^{-1}(C_1), \ldots, \theta^{-1}(C_r)$ *является + -уплотненными последовательностями соответственно из* $\{F\}$ *и* $\{G\}$.

Доказательство.

Если $\{G\} = A$, то утверждение леммы очевидно.

Пусть $|\{G\}| > 1$.

Рассмотрим граф G', который получается из графа G заменой каждой вершины $B \in \{G\}$ вершиной $B' = B \cup \{a+p\} \setminus \{a\}$ и пусть $\varkappa$ — соответствующее взаимно-однозначное соответствие между вершинами G и G'.

Утверждения относительно отношений лексикографической упорядоченности, расширения, + -уплотненности и соответствующих этим отношениям числовых характеристиках, которые верны для произвольных вершин из G', совпадают с аналогичными утверждениями для соответствующих при отображении $\varkappa$ вершин из G.

Поэтому утверждения леммы 6* достаточно доказать для графа G'.

Граф G' является Δ_n-графом с корнем $A' = A \cup \{a+p\} \setminus \{a\}$. Это следует из определения Δ_n-графов, предыдущего замечания и из того, что множество вершин графа G' совпадает с множеством всех расширений A'.

Заметим, что $|\{G'\}| = 2^{n-a-p}$.

Рассмотрим лексикографически упорядоченное множество $\Delta_{n-a-p,\,a+p}$-наборов $R_{n-a-p,\,a+p}$.

Известно, что $|R_{n-a-p,\,a+p}| = 2^{n-a-p}$ и множество $R_{n-a-p,\,a+p}$ совпадает с множеством всех поднаборов $I_{n-a-p,\,a+p} = \{a+p+1, \dots, n\}$. Определим отображение θ_1 множества $\{G'\}$ в $R_{n-a-p,\,a+p}$ следующим образом: $\forall B\,(B \in \{G'\} \to \theta_1(B) = B \setminus A')$. Из леммы 5 следует, что $\forall B (B \in \{G'\} \to \theta_1(B) \in R_{n-a-p,\,a+p})$.

Поскольку при отображении θ_1 образы различных элементов из $\{G'\}$ различны и $|G'| = |R_{n-a-p,\,a+p}|$, то отображение θ_1 будет взаимнооднозначным.

Легко проверить, что при отображении θ_1 множества $\{G'\}$ и $R_{n-a-p,\,a+p}$ изоморфны относительно отношений лексикографической упорядоченности и расширения. Поскольку каждое из множества $\{G'\}$ и $R_{n-a-p,\,a+p}$ лексикографически упорядочивается единственным образом и это упорядочение линейно, то отображение $\{G'\}$ на $R_{n-a-p,\,p+a}$, сохраняющее эту упорядоченность, является также единственным.

Нетрудно убедиться также, что при рассматриваемом отображении $\{G'\}$ на $R_{n-a-p,\,a+p}$ $+$-уплотненным последовательностям из $\{G'\}$ соответствуют $+$-уплотненные последовательности в $R_{n-a-p,\,a+p}$, и, наоборот.

Учитывая связь между множествами $R_{n-a-p,\,a+p}$ и R_{n-a-p}, установленную в лемме 0, и вышеприведенные рассуждения, приходим к утверждению леммы 6*.

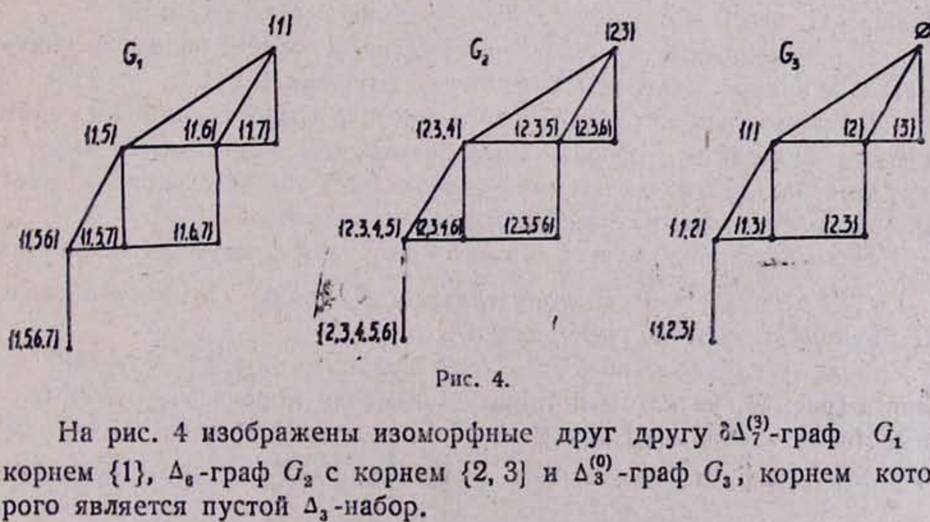

Рис. 4.

На рис. 4 изображены изоморфные друг другу $\partial\Delta_7^{(3)}$-граф G_1 с корнем $\{1\}$, Δ_6-граф G_2 с корнем $\{2, 3\}$ и $\Delta_3^{(0)}$-граф G_3, корнем которого является пустой Δ_3-набор.

Пусть $0 \leqslant a \leqslant n$. Через P_a обозначим множество Δ_n-наборов A, таких, что $(A)_{|A|} = a$. Через $\widetilde{E}_{(a)}$ обозначим множество всех Δ_n-графов, корни которых принадлежат P_a.

Произвольный элемент множества $\widetilde{E}_{(a)}$, $0 \leqslant a \leqslant n$, будем называть Δ_n^a-графом.

Элементы множеств $\widetilde{E}_n = \bigcup\limits_{a \in \{0, 1, \ldots, n\}} \widetilde{E}_{(a)}$ и $\widetilde{E} = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \widetilde{E}_n$ назовем соответственно Δ_n-графами и Δ-графами.

Пусть также $\widetilde{H}_{a,p}$ — множество всех возможных $\delta\Delta_n^{(p)}$-графов, корни которых принадлежат P_a, $\widetilde{H}_{(a)} = \bigcup\limits_{p=0}^{n-a} \widetilde{H}_{a,p}$, $\widetilde{H}_n = \bigcup\limits_{a \in \{0, 1, \ldots, n\}} \widetilde{H}_{(a)}$,

$\widetilde{H} = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \widetilde{H}_n$.

Элементы множеств $\widetilde{H}_{a,p}$, $\widetilde{H}_{(a)}$, $\widetilde{H}_n$, $\widetilde{H}$ будем называть соответственно $\delta\Delta_n^{a,p}$-, $\delta\Delta^a$-, $\delta\Delta_n$-, $\delta\Delta$-графами.

Как следует из леммы 6* множество всех $\delta\Delta$-графов H относительно изоморфизма между графами можно разбить на классы эквивалентности, такие, что классу H_c принадлежат те и только те $\delta\Delta_n^{a,p}$-графы, для которых $n - a - p = c$, где $p \in \{0, 1, \ldots, n - a\}$, $a \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $c = 0, 1, 2, \ldots$.

Для произвольного $\delta\Delta$-графа G введем следующие понятия.

Пусть G — $\delta\Delta_n^{(p)}$-граф с корнем A и $a = (A)_{|A|}$. Тогда:

1. Δ_n-граф с корнем $A \cup \{a + p + 1\}$ будем называть левым подграфом G, а $\delta\Delta_n^{(p+1)}$-граф с корнем A — правым подграфом G;

2. Вершины левого и правого подграфов $\delta\Delta_n$-графа G будем называть соответственно левыми и правыми вершинами G;

3. Множество всех $(a + r)$-расширений Δ_n-набора A, принадлежащих G, где $0 \leqslant r \leqslant n - a$, будем называть r-ярусом G.

В произвольном $\delta\Delta$-графе G, имеющем только одну вершину, левый и правый подграфы G полагаем равными G.

В произвольном графе F, изоморфном $\delta\Delta$-графу G, назовем левым, правым подграфом, левой, правой вершиной, r-ярусом те части F, которые находятся во взаимно-однозначном соответствии с соответствующими частями G, имеющими такое же название.

Непосредственно из п. 1 леммы 6* получаем следующее следствие.

Следствие 1.6* *В произвольном $\delta\Delta$-графе G левый подграф G изоморфен правому подграфу G.*

Будем условно изображать произвольный $\delta\Delta$-граф G в виде эллипса (рис. 5), на котором точкой A отмечен корень G, горизонтальные линии изображают ярусы G. Из следствия 1.6* следует, что если G — $\delta\Delta_n^{a,p}$-граф, то он может быть изображен посредством двух

$\delta\Delta_{n-1}$-графов G_1 и G_2 с корнями, соответственно, A_1 и A_2, соединенных ребром (A_1, A_2). При этом A_1 есть вершина 1-яруса G (рис. 6). Поскольку G_1 и G_2 также являются $\delta\Delta$-графами, то указанный процесс разбиения $\delta\Delta$-графов можно продолжить. На последнем этапе разбиения мы получим $\delta\Delta$-графы, имеющие только одну вершину — корень.

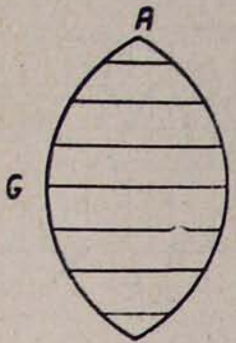

Рис. 5.

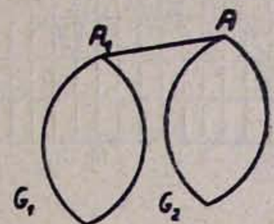

Рис. 6.

Ясно, что в $\delta\Delta_n^{a,p}$-графе G посредством такого разбиения можно выделить $2^{n-a-p-i}$ Δ-подграфов, изоморфных $\Delta_i^{(0)}$-графу, где $i = 0, 1, \ldots, n-a-p$.

Опишем некоторые количественные закономерности, характеризующие число расширений определенных множеств вершин Δ-графов.

Пусть E_n^k-множество всех подмножеств R_n^k и $E_n = \bigcup\limits_{k=0}^{n} E_n^k$.

На множестве E_n определим функцию $\Psi_k(x)$ такую, что для каждого $S \subseteq E_n$, $\Psi_k(S)$ равно числу всех Δ_n^k-наборов в k-продолжении S.

Из того, что k-расширения произвольных двух различных Δ_n-наборов различны, следует, что функция $\psi_k(S)$ аддитивна, т. е. справедлива следующая лемма.

Лемма 7. *Для произвольного множества $\Delta_n^{k_1}$-наборов S, если $S = S_1 \cup S_2$ и $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, то для каждого k_2, где $0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant n$, имеем*

$$\Psi_{k_2}(S) = \Psi_{k_2}(S_1) + \Psi_{k_2}(S_2).$$

В нижеследующей лемме 8* мы докажем два неравенства относительно числа членов в k_2-продолжениях $+$-уплотненных последовательностей. Для этих неравенств характерны следующие особенности.

1. Указанные неравенства довольно часто переходят в равенства и потому в процессе их доказательства отбрасывание каких-либо отличных от нуля элементов недопустимо.

2. Как утверждается в следствии 2.5, число членов в k_2-продолжении заданной последовательности $\Delta_n^{k_1}$-наборов $A = A_1, \ldots, A_m$ определяется посредством чисел $(A_1)_{k_1}, \ldots, (A_m)_{k_1}$.

Однако даже в случае, когда $\mathbf{A}$ — $+$-уплотненная последовательность, характер изменения чисел $(A_1)_{k_1}, \ldots, (A_m)_{k_1}$ существенно нелинеен, что приводит к значительным трудностям при вычислениях, основанных на указанных закономерностях.

Рис. 7 иллюстрирует эту особенность для последовательности Γ_n^k при $n = 7, k = 4$.

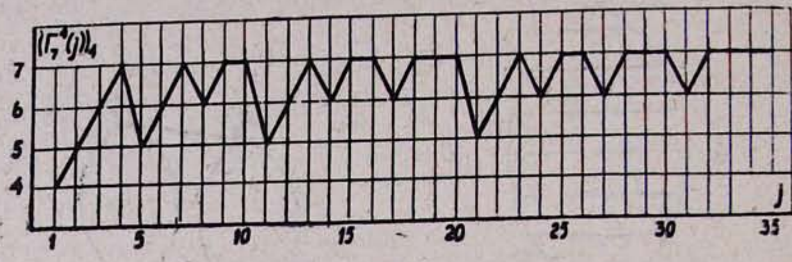

Рис. 7.

Вышеизложенные особенности в значительной мере повлияли на выбор метода доказательства леммы, а именно, метода индукции по Δ-графам; при этом множество всевозможных случаев, требующих рассмотрения, разбивается на отдельные классы, в каждом из которых возможно применение методов, общих для элементов данного класса, но различных для разных классов.

Введем следующее обозначение.

Если $\mathbf{A}$-произвольная последовательность наборов, то через $\{\mathbf{A}\}$ будем обозначать множество всех наборов $\mathbf{A}$.

Лемма 8*.

$$\forall k_1 k_2 m r\,(0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant n \,\&\, 1 \leqslant m \leqslant C_n^{k_1} \,\&\, 1 \leqslant r \leqslant C_n^{k_1} - m + 1 \,\&\, \mathbf{A} =$$

$$= \Gamma_n^{k_1}(r), \ldots, \Gamma_n^{k_1}(r + m - 1) \,\&\, \mathbf{A}^* = \Gamma_n^{k_1}(1), \ldots, \Gamma_n^{k_1}(m) \,\&\, -^{**} =$$

$$= \Gamma_n^{k_1}(C_n^{k_1} - m + 1), \ldots, \Gamma_n^{k_1}(C_n^{k_1}) \rightarrow \psi_{k_2}(\{\mathbf{A}^*\}) \geqslant \psi_{k_2}(\{\mathbf{A}\}) \geqslant \psi_{k_2}(\{\mathbf{A}^{**}\})^1.$$

Предварительно докажем следующие леммы 9—11.

Лемма 9. *k_2-продолжение $\mathbf{B} = B_1, \ldots, B_m$ произвольного $\Delta_n^{k_1}$-набора A, где $0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant n$, является $+$-уплотненным. При этом, если $A = \Gamma_n^{k_1}(1)$, то $B_j = \Gamma_n^{k_2}(j)$ при $j = 1, \ldots, m$.*

Доказательство.

Если $m = 0$, либо $k_2 = k_1$, лемма очевидна.

Пусть $m > 0$ и $k_1 < k_2$. Так как $\mathbf{B}$ — k_2-продолжение A, то согласно определению k_2-продолжений, $B_1 \precsim B_2 \prec \ldots \precsim B_m$.

---

[1] Как показано в [9], утверждение леммы 8* можно обобщить на случай, когда рассматриваются слова в n-буквенном алфавите с количеством вхождений каждой буквы не превосходящем заданного числа (своего для каждой буквы). В Δ_n-наборах, рассматриваемых в лемме 8*, каждая буква (число от 1 до n) имеет только одно вхождение.

Допустим, что B не является $+$-уплотненной последовательностью. Это означает, что при некотором $p \in \{1, \dots, m-1\}$ нарушается условие $+$-уплотненности B, т. е. существует набор $B \in R_n^{k_2}$, такой, что

$$B_p \prec B \prec B_{p+1}. \tag{1}$$

Тогда B является k_2-расширением A, ибо из (1) следует, что

$$A = \{(B_p)_1, \dots, (B_p)_{k_1}\} = \{(B_{p+1})_1, \dots, (B_{p+1})_{k_1}\} = \{(B)_1, \dots, (B)_{k_1}\},$$

и B не совпадает ни с одним из $\Delta_n^{k_2}$-наборов B, так как произвольный набор из B либо меньше B_p, либо больше B_{p+1}. Отсюда следует, что в B включены не все k_2-расширения A, что неверно, ибо B — k_2-продолжение A. Следовательно, наше допущение неверно и B — $+$-уплотненная последовательность.

Если $A = \Gamma_n^{k_1}(1)$, то набор $\Gamma_n^{k_2}(1)$ будет k_2-расширением A. Поскольку $\Gamma_n^{k_2}(1)$-наименьший набор в последовательности $\Gamma_n^{k_2}$, то он будет наименьшим и в последовательности B, т. е. $B_1 = \Gamma_n^{k_2}(1)$. Так как, кроме того, B — $+$-уплотненная последовательность, то B совпадает с начальным отрезком $\Gamma_n^{k_2}$.

Лемма 9 доказана.

Лемма 10. *Для произвольного $\delta\Delta$-графа G, если B—произвольная вершина G, отличная от корня G, то Δ-граф с корнем B является подграфом G.*

Доказательство.

Если G — Δ-граф, то утверждение леммы 9 сводится к лемме 4.

Пусть G — $\delta\Delta_n^{(p)}$-граф с корнем A, где $0 < p < n - a$, $a = (A)_{|A|}$, и F — Δ_n-граф с корнем A.

Тогда, согласно определению $\delta\Delta_n^{(p)}$-графа с корнем A,

$$G = F \setminus \bigcup_{i=1}^{p} G_i,$$

где G_i — Δ_n-граф с корнем $A \cup \{a+i\}$, $i = 1, \dots, p$.

Очевидно, что Δ_n-графы G_q и G_r с корнями соответственно $A \cup \{a+q\}$ и $A \cup \{a+r\}$, где $r, q \in \{1, \dots, n-a-1\}$ и $r \neq q$, не имеют общих вершин. Поэтому удаление одного из этих графов, например, G_q, из F не изменяет соединений между вершинами G_r. Отсюда, если $B \in \{A \cup \{a+p+1\}, \dots, A \cup \{a+n-a-1\}$, то Δ_n-граф с корнем B является, согласно лемме 4, подграфом F, а потому он будет подграфом и G.

Если B является вершиной Δ_n-графа G_j с корнем $A \cup \{a+j\}$, где $j \in \{p+1, \dots, n-a\}$, то Δ_n-граф с корнем B будет, согласно лемме 4, подграфом G_j, а потому и подграфом G.

Лемма доказана.

Следствие 1.10.

Если F и G—произвольные $\delta\Delta$-графы такие, что G является подграфом F, S—произвольное множество наборов одинаковой длины из G, отличных от корня G, то для произвольного натурального числа k

все наборы k-продолжения S являются одновременно вершинами и G и F.

Замечание. Следствие 1.10 будет верно и для корня G, если G есть Δ-граф.

Таким образом, если $\delta\Delta$-граф G является подграфом $\delta\Delta$-графа F и S—множество наборов одинаковой длины, общее для $\{F\}$ и $\{G\}$, то исследования, связанные с расширениями наборов из S можно проводить в одном из этих графов, а полученные утверждения без изменений переносить в другой граф.

Следующее утверждение есть следствие п. 4 леммы 6.

Следствие 2.6*. *Если G_1 и G_2—произвольные изоморфные друг другу $\delta\Delta$-графы, A_1 и A_2—соответственно корни G_1 и G_2, S_1—произвольное множество наборов одинаковой длины из $\{G_1\}$, отличных от A_1, S_2—множество соответствующих наборов из $\{G_2\}$, то для произвольного натурального числа k выполняется:*

$$\Psi_{k+|A_1|}(S_1) = \Psi_{k+|A_2|}(S_2).$$

Замечание. Следствие 2.6* справедливо для корней A_1 и A_2, если рассматривать не все $(k+|A_1|)$-продолжения A_1, соответственно, $(k+|A_2|)$-продолжения A_2, а лишь те из них, которые принадлежат $\{G_1\}$ соответственно $\{G_2\}$.

При доказательстве леммы 8*, а также в дальнейших построениях будут существенно использованы утверждения леммы 6* для случая Δ_n^0-графов. Поэтому нам будет удобно результаты леммы 6* изложить для частного случая Δ_n^0 -графов в виде отдельной леммы, дополненной некоторыми специфичными для Δ_n^0-графов свойствами.

Введем функцию $\nu(x, y, z)$, которая для каждого заданного $\delta\Delta$-графа G_1, множества $S \subseteq \{G_1\}$ и $\delta\Delta$-графа G_2, изоморфного G_1, принимает значение $\nu(S, G_1, G_2)$, равное множеству всех вершин G_2, соответствующих вершинам из S при изоморфизме G_1 и G_2.

Из п. 1 леммы 6* непосредственно следует, что функция $\nu(x, y, z)$ определена однозначно.

Если S—одноэлементное множество, то для краткости изложения, мы будем вместо выражения «набор из множества $\nu(S, G_1, G_2)$ писать просто «набор $\nu(S, G_1, G_2)$».

Введем следующие обозначения.

Если $G_n - \Delta_n^{(0)}$-граф, то левый и правый подграфы G_n будем обозначать соответственно через $G_n^{л}$ и $G_n^{п}$, левый и правый подграфы $G_n^{л}(G_n^{п})$ соответственно через $G_n^{лл}$ и $G_n^{лп}$ ($G_n^{пл}$ и $G_n^{пп}$).

Лемма 11. *Если $G_n - \Delta_n^{(0)}$-граф, то:*

1. *Графы $G_n^{л}$ и $G_n^{п}$ изоморфны $\Delta_{n-1}^{(0)}$-графу G_{n-1}, графы $G_n^{лл}$, $G_n^{лп}$, $G_n^{пл}$, $G_n^{пп}$ — $\Delta_{n-2}^{(0)}$-графу G_{n-2}; при изоморфизме $G_n^{л}$ и G_{n-1} (соответственно, $G_n^{п}$ и G_{n-1}), подграфам $G_n^{лл}$ и $G_n^{лп}$ (соответственно, под-*

графам $G_r^{пл}$ *и* $G_n^{пп}$), *соответствует в графе* G_{n-1}, *соответственно, подграфы* $G_{n-1}^{л}$ *и* $G_{n-1}^{п}$.

2. а) $\{G_n^{л}\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{\Gamma_n^k(1), \ldots, \Gamma_n^k(C_{n-1}^{k-1})\}$,

б) $\{G_n^{п}\} = \bigcup_{k=0}^{n-1} \{\Gamma_n^k(C_{n-1}^{k-1}+1), \ldots, \Gamma_n^k(C_n^k)\}$,

в) $\{G_n^{лл}\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{\Gamma_n^k(1), \ldots, \Gamma_n^k(C_{n-2}^{k-2})\}$,

г) $\{G_n^{лп}\} = \bigcup_{k=1}^{n-1} \{\Gamma_n^k(C_{n-2}^{k-2}+1), \ldots, \Gamma_n^k(C_{n-1}^{k-1})\}$,

д) $\{G_n^{пл}\} = \bigcup_{k=1}^{n-1} \{\Gamma_n^k(C_{n-1}^{k-1}+1), \ldots, \Gamma_n^k(C_{n-1}^{k-1}+C_{n-2}^{k-1})\}$,

е) $\{G_n^{пп}\} = \bigcup_{k=0}^{n-2} \{\Gamma_n^k(C_{n-1}^{k-1}+C_{n-2}^{k-1}+1), \ldots, \Gamma_n^k(C_n^k)\}$;

3. а) *для произвольных* k, t, s, r, *если* $0 \leqslant s \leqslant n-1$ *и* $1 \leqslant r \leqslant C_{n-1}^{s}$, *то:*

1) $1 \leqslant k \leqslant n \,\&\, 1 \leqslant t \leqslant C_{n-1}^{k-1} \to \nu(\{\Gamma_n^k(t)\}, G_n^{л}, G_{n-1}) =$

$= \{\Gamma_{n-1}^{k-1}(t)\} \,\&\, \nu(\{\Gamma_{n-1}^{s}(r)\}, G_{n-1}, G_n^{л}) = \{\Gamma_n^{s+1}(r)\}$;

2) $0 \leqslant k \leqslant n-1 \,\&\, C_{n-1}^{k-1}+1 \leqslant t \leqslant C_n^k \to \nu(\{\Gamma_n^k(t)\}, G_k^{п}, G_{n-1}) =$

$= \{\Gamma_{n-1}^{k}(t - C_{n-1}^{k-1})\} \,\&\, \nu(\{\Gamma_{n-1}^{s}(r)\}, G_{n-1}, G_n^{п}) = \{\Gamma_n^{s}(r + C_{n-1}^{s-1})\}$;

б) *для произвольных* k, t, s, r, *если* $0 \leqslant s \leqslant n-2$ *и* $1 \leqslant r \leqslant C_{n-2}^{s}$, *то*:

1) $2 \leqslant k \leqslant n \,\&\, 1 \leqslant t \leqslant C_{n-2}^{k-2} \to \nu(\{\Gamma_n^k(t)\}, G_n^{лл}, G_{n-2}) =$

$= \{\Gamma_{n-2}^{k-2}(t)\} \,\&\, \nu(\{\Gamma_{n-2}^{s}(r)\}, G_{n-2}, G_n^{лл}) = \{\Gamma_n^{s+2}(r)\}$;

2) $1 \leqslant k \leqslant n-1 \,\&\, C_{n-2}^{k-2}+1 \leqslant t \leqslant C_{n-1}^{k-1} \to \nu(\{\Gamma_n^k(t)\}, C_n^{лп}, G_{n-2}) =$

$= \{\Gamma_{n-2}^{k-1}(t - C_{n-2}^{k-2})\} \,\&\, \nu(\{\Gamma_{n-2}^{s}(r)\}, G_{n-2}, G_n^{лп}) = \{\Gamma_n^{s+1}(r + C_{n-2}^{s-1})\}$;

3) $1 \leqslant k \leqslant n-1 \,\&\, C_{n-1}^{k-1}+1 \leqslant t \leqslant C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2} \to \nu(\{\Gamma_n^k(t)\}, G_n^{пл},$
$G_{n-2}) = \{\Gamma_{n-2}^{k-1}(t - C_{n-1}^{k-1})\} \,\&\, \nu(\{\Gamma_{n-2}^{s}(r)\}, G_{n-2}, G_n^{пл}) = \{\Gamma_n^{s+1}(r + C_{n-1}^{s})\}$;

4) $0 \leqslant k \leqslant n-2 \,\&\, C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + 1 \leqslant t \leqslant C_n^k \to \nu(\{\Gamma_n^k(t)\}, G_n^{пп},$
$G_{n-2}) = \{\Gamma_{n-2}^{k}(t - C_{n-1}^{k-1} - C_{n-2}^{k-2})\} \,\&\, \nu(\{\Gamma_{n-2}^{s}(r)\}, G_{n-2}, G_n^{пп}) =$

$= \{\Gamma_n^{s}(r + C_{n-1}^{s-1} + C_{n-2}^{s-1})\}$;

4. *Для произвольных* k, l, s, r:

а) $1 \leqslant k < n \,\&\, 1 \leqslant t \leqslant C_{n-1}^{k-1} \,\&\, 0 \leqslant s \leqslant n-1 \,\&\, C_{n-1}^{k-1}+1 \leqslant r \leqslant C_n^k \rightarrow$

$$\rightarrow \nu(\{\Gamma_n^k(t)\},\ G_n^{л},\ G_n^{п}) = \{\Gamma_n^{k-1}(t + C_{n-1}^{k-2})\} \,\&\, \nu(\{\Gamma_n^s(r)\},\ G_n^{п},\ G_n^{л}) =$$

$$= \{\Gamma_n^{s+1}(r - C_{n-1}^{s-1})\};$$

б) $2 \leqslant k < n \,\&\, 1 \leqslant t \leqslant C_{n-2}^{k-2} \,\&\, 1 \leqslant s < n-1 \,\&\, C_{n-2}^{s-2}+1 \leqslant r \leqslant C_{n-1}^{s-1} \rightarrow$

$$\rightarrow \nu(\{\Gamma_n^k(t)\},\ G_n^{лл},\ G_n^{лп}) = \{\Gamma_n^{k-1}(t + C_{n-2}^{k-3})\} \,\&\, \nu(\{\Gamma_n^s(r)\},\ G_n^{лп},\ G_n^{лл}) =$$

$$= \{\Gamma_n^{s+1}(r - C_{n-2}^{s-2})\};$$

в) $1 \leqslant k \leqslant n-1 \,\&\, C_{n-1}^{k-1}+1 \leqslant t \leqslant C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} \,\&\, 0 \leqslant s \leqslant n-2 \,\&$

$$\& \, C_{n-1}^{s-1} + C_{n-2}^{s-2} + 1 \leqslant r \leqslant C_n^s \rightarrow \nu(\{\Gamma_n^k(t)\},\ G_n^{пл},\ G_n^{пп}) =$$

$$= \{\Gamma_n^{k-1}(t - C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k-2} + C_{n-2}^{k-2})\} \,\&\, \nu(\{\Gamma_n^s(r)\},\ G_n^{пп},\ G_n^{пл}) =$$

$$= \{\Gamma_n^{s+1}(r - C_{n-1}^{s-1} - C_{n-2}^{s-1} + C_{n-1}^s)\}.$$

Доказательство.

1. Изоморфизм графов, о котором утверждается в пункте 1, непосредственно следует из п. 1 леммы 6*.

Покажем, что при изоморфизме $G_n^{л}$ и G_{n-1} подграфам $G_n^{лл}$ и $G_{nп}^{л}$ соответствуют подграфы $G_{n-1}^{л}$ и $G_{n-1}^{п}$.

Действительно. В Δ-графе $G_n^{л}$ можно выделить лишь два подграфа, а именно, подграфы $G_n^{лл}$ и $G_n^{лп}$, изоморфных $\Delta_{n-1}^{(0)}$-графу G_{n-2}. Это следует из того, что для произвольного набора B из $\{G_n^{л}\}$, отличного от $\{1, 2\}$ ($\{1, 2\}$ — корень $G_n^{лл}$) и $\{1\}$ ($\{1\}$ — корень $G_n^{лп}$), для $\Delta_n^{a,p}$-подграфа G_B с корнем B разность $n-a-p$ меньше $n-2$ и потому, как следует из п. 1 леммы 6*, граф G_B не будет изоморфен G_{n-2}.

Следовательно, $G_n^{лл}$ соответствует либо $G_{n-1}^{л}$, либо $G_{n-1}^{п}$, при изоморфизме $G_n^{л}$ и G_{n-1}.

Так как $G_{n-1}^{л}$ и $G_{n-1}^{п}$ соответственно $G_n^{лл}$ и $G_n^{лп}$, не имеют общих вершин и вершине $\{1\} \in \{G_{n-1}^{л}\}$ при изоморфизме $G_n^{л}$ и G_{n-1} соответствует вершина $\{1, 2\} \in G_n^{лл}$ (лемма 6*, п. 2), то при указанном изоморфизме $G_n^{л}$ соответствует $G_{n-1}^{л}$ и $G_n^{лп} - G_{n-1}^{п}$.

Для графов $G_n^{п}$ и G_{n-1} соответствующее утверждение доказывается аналогично.

2. Очевидно, утверждение п. 2 достаточно доказать для подпунктов а, в, д.

а. Корнем Δ_n^1-графа $G_n^{л}$ является вершина $\{1\}$ и $\{1\} = \Gamma_n^1(1)$.

Ясно, что $\{G_n^{л}\}$ совпадает с множеством всех к-продолжений $\Gamma_n^1(1)$, при $k = 1, \ldots, n$.

При каждом k, $1 \leqslant k \leqslant n$, k-продолжением $\Gamma_n^1(\mathrm{I})$ будет последовательность $A_k = \Gamma_n^k(1), \ldots, \Gamma_n^k(p)$.

Это следует из леммы 9.

Так как $G_n^{л}$ изоморфен G_{n-1}, то из п. 2 и п. 5 леммы 6* получаем, что последовательности A_k будет соответствовать последовательность $\Gamma_{n-1}^{k-1}(1), \ldots, \Gamma_{n-1}^{k-1}(C_{n-1}^{k-1})$. Отсюда следует, что $p = C_{n-1}^{k-1}$.

в. Это утверждение доказывается аналогично предыдущему, с той лишь разницей, что рассматривается $\Delta_{n-2}^{(0)}$-граф G_{n-2} и граф $G_n^{лл}$.

д. В последовательности $\Gamma_n^k(C_{n-1}^{k-1}+1), \ldots, \Gamma_n^k(C_n^k)$, которая при $0 \leqslant k \leqslant n-1$ состоит из наборов $\{G_n^{п}\}$, наборы из $\{G_n^{пл}\}$ предшествуют наборам из $\{G_n^{пп}\}$. Это следует из того, что корень $\{G_n^{пл}\}$ — набор $\{2\}$ является наименьшим из наборов длины I, принадлежащим $\{G_n^{п}\}$. Поэтому, для каждого k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $\Gamma_n^k(C_{n-1}^{k-1}+1) \in \{G_n^{пл}\}$. Используя этот факт, посредством рассуждений, аналогичных вышеприведенным, убеждаемся в правильности утверждения пункта д.

3. Утверждения пункта 3.а легко получить, используя изоморфизм $G_n^{л}(G_n^{п})$ и G_{n-1}; п. 2.а), 2.б) леммы 11, и п. 2, 5 леммы 6*.

Аналогично, утверждения пункта 3.б) получаются из изоморфизма $G_n^{лл}(G_n^{лп}, G_n^{пл}, G_n^{пп})$ и G_{n-2}, п. 2.в), 2.г), 2.д), 2.е) леммы 11 и п. 2,5 леммы 6*.

4. В этом пункте указаны соответствующие вершины при изоморфизме $G_n^{л}$ и $G_{n-1}^{п}$, соответственно, $G_n^{пл}$ и $G_n^{пп}$, $G_n^{пл}$ и $G_n^{пп}$.

Их легко получить последовательным применением утверждений п. 3 леммы 11.

Например, утверждения 4.а леммы 11 следует из изоморфизма $G_n^{л}$, G_{n-1}, $G_{n-1}^{п}$ и утверждений п. 3.а) леммы 11.

Лемма 11 доказана.

Из п. 1 леммы 11 следует, что $\Delta_n^{(0)}$-граф можно изобразить так, как показано на рис. 8.

Доказательство леммы 8*.

При $k_1 = k_2$, или $k_1 = 0$, или $k_2 = n$, лемма очевидна.

Пусть $0 < k_1 < k_2 < n$.

Доказательство леммы проводим индукцией по параметру n.

При $n=0,1$ в справедливости леммы убеждаемся непосредственной проверкой.

Пусть лемма верна при значении n равном $t-1$, при $t \geqslant 1$. Покажем, что лемма будет верна и при $n=t$.

Рассмотрим $\Delta_n^{(0)}$-графы G_n при $n = t-1$, t. Наше индуктивное предположение означает, что лемма верна, если наборы из последовательностей A, A^*, A^{**} принадлежат множеству $\{G_{t-1}\}$. Мы должны доказать справедливость леммы для случая, когда A, A^*, A^{**} составлены из наборов, принадлежащих множеству $\{G_t\}$.

Наши предположения о том, что $\Psi_{k_2}(\{A^*\}) \geqslant \Psi_{k_2}(\{A\})$ и $\Psi_{k_2}(\{A\}) \geqslant \Psi_{k_2}(\{A^{**}\})$ при $n = t-1$, мы будем называть соответственно первым и вторым индуктивными предположениями.

1. Покажем, что при $n=t$ также справедливо неравенство

$$\Psi_{k_2}(\{A^*\}) \geqslant \Psi_{k_2}(\{A\}). \tag{0}$$

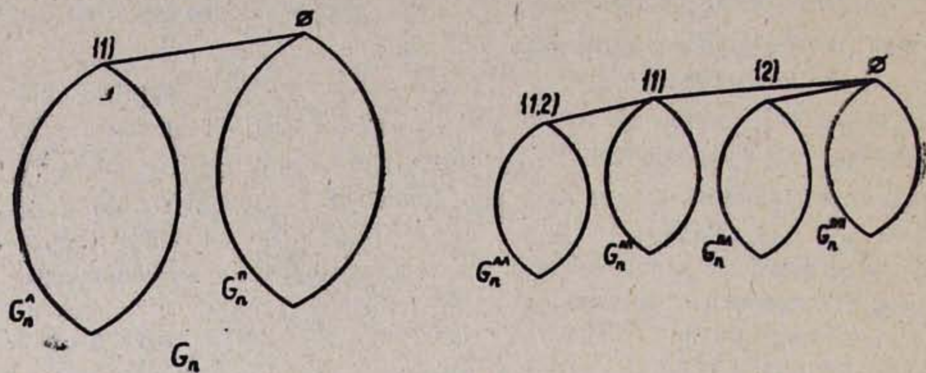

Рис. 8.

Для этого множество всевозможных случаев, определяемых значениями параметров m и r, разобьем на подмножества, задаваемые следующим образом:

I. 1а. $1 \leqslant m \leqslant C_{t-1}^{k_1-1}$ и $1 \leqslant r \leqslant C_{t-1}^{k_1-1} - m + 1$

I. 1б. „ „ и $C_{t-1}^{k_1-1} + 1 \leqslant r \leqslant C_t^{k_1} - m + 1$

I. 1в. „ „ и $r \leqslant C_{t-1}^{k_1-1}$, $r + m - 1 > C_{t-1}^{k_1-1}$

I. 2б. $C_{t-1}^{k_1-1} < m \leqslant C_t^{k_1}$ и $C_{t-1}^{k_1-1} + 1 \leqslant r \leqslant C_t^{k_1} - m + 1$

I. 2в. „ „ и $r \leqslant C_{t-1}^{k_1-1}$, $r + m - 1 > C_{t-1}^{k_1-1}$

Рассмотрим каждый из этих случаев (рис. 9)[1].

I.1а. В этом случае, как следует из п. 2а) леммы 11, последовательности **A**, **A*** составлены из вершин только левого подграфа G_t.

Поскольку левый подграф G_t изоморфен $\Delta_{t-1}^{(0)}$-графу G_{t-1} (лемма 11 п. 1), то, используя п. 3а1 леммы 11, следствия 1.10, 1.6* и первое индуктивное предположение, убеждаемся в правильности (0) для случая I.1а.

Отметим, что при доказательстве леммы, те случаи, когда используются следствия 1.10 или 1.6*, и среди рассматриваемых наборов находятся корни графов $G_t^л$, $G_t^п$, $G_t^{лл}$, $G_t^{лп}$, $G_t^{пл}$, $G_t^{пп}$, мы особо не будем выделять, ввиду тривиальности их разбора.

I.1б. В этом случае наборы последовательности **A*** принадлежат $\{G_t^л\}$, а наборы из **A** — $\{G_t^п\}$. Это следует из леммы 11 п. 2.

---

[1] По техническим причинам готические буквы рис. 9, 10 заменены в тексте на соответствующие **A** и **B**.

Поскольку G_l^3 изоморфен Δ_{l-1}^0-графу G_{l-1} (лемма 11 п. 1), то из утверждений п. 3а 2 леммы 11, следствий I. 10, I. 6* и первого индуктивного предположения заключаем, что

$$\psi_{k_1}(\{B^*\}) \geqslant \psi_{k_1}(\{A\}), \tag{1}$$

где

$$B^* = \Gamma_l^{k_1}(C_{l-1}^{k_1-1}+1), \dots, \Gamma_l^{k_1}(C_{l-1}^{k_1-1}+m);$$

$$A = \Gamma_l^{k_1}(r), \dots, \Gamma_l^{k_1}(r+m-1), \qquad C_{l-1}^{k_1}+1 \leqslant r \leqslant C_l^{k_1}-m+1.$$

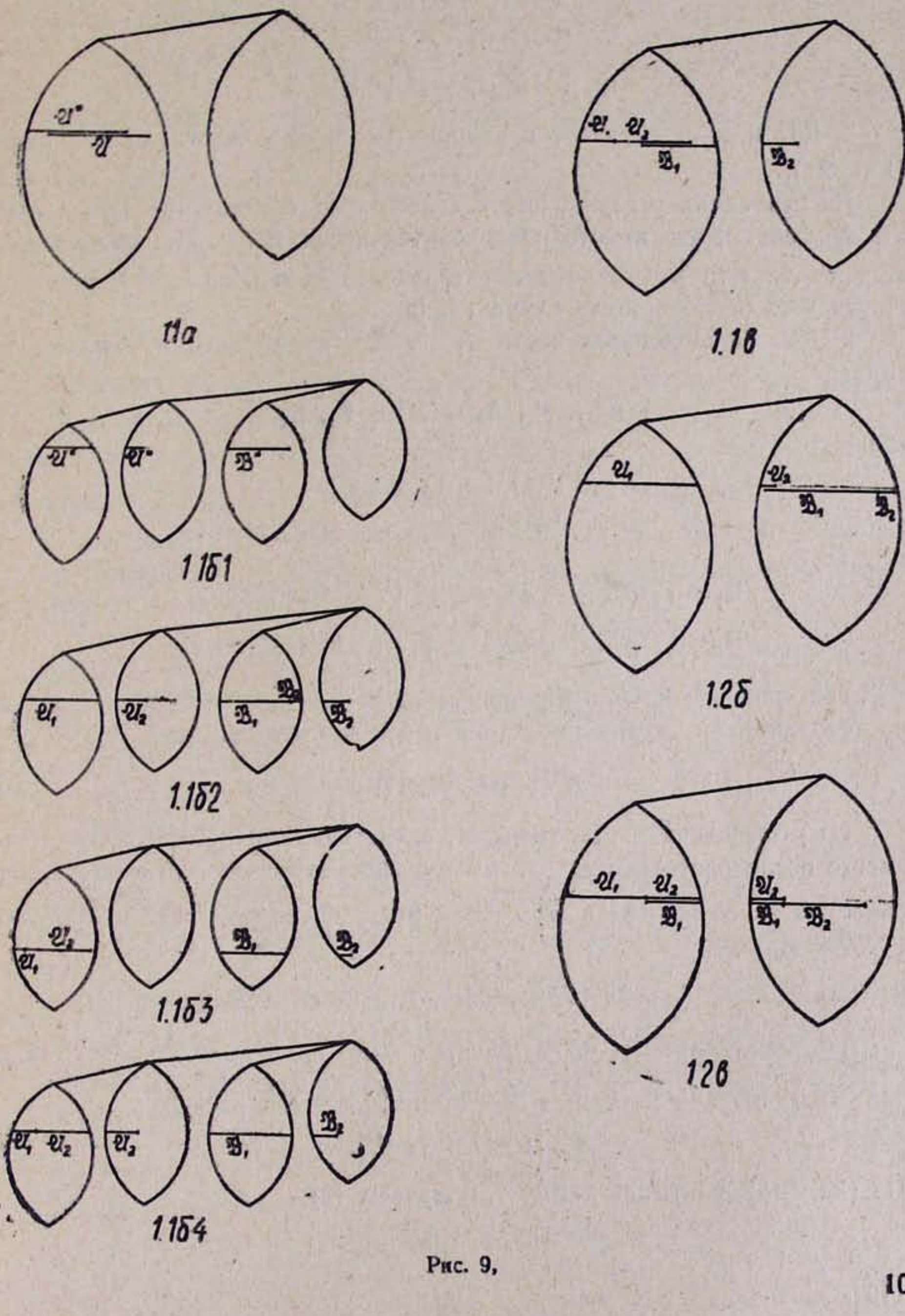

Рис. 9.

Поэтому в случае 1.1б достаточно доказать, что

$$\psi_{k_2}(\{\mathbf{A}^*\}) \geqslant \psi_{k_2}(\{\mathbf{B}^*\}). \tag{2}$$

В зависимости от величины m случай 1.1б разобьем на следующие подслучаи:

I. 1б1. $1 \leqslant m \leqslant C_{t-2}^{k_1-1}$,

I. 1б2. $C_{t-2}^{k_1-2} \leqslant C_{t-2}^{k_1-1} < m$,

I. 1б3. $C_{t-2}^{k_1-1} < m \leqslant C_{t-2}^{k_1-2}$,

I. 1б4. $C_{t-2}^{k_1-1} \leqslant C_{t-2}^{k_1-2} < m$.

I. 1б1. в этом случае все наборы $\mathbf{B}^*$ принадлежат $\{G_t^{\text{пл}}\}$ (лемма 11 п. 2д).

На основании утверждений п. 1 леммы 11 и следствий 1.10 и 1.6* мы заключаем, что вместо последовательности $\mathbf{B}^*$ можно рассматривать соответствующую последовательность $\mathbf{B}'$ в $G_t^{\text{пл}}$. А это соответствует уже разобранному случаю I. Iа.

I. 1б2. Последовательности $\mathbf{A}^*$ и $\mathbf{B}^*$ представим в следующем виде:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2; \quad \mathbf{B}^* = \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2,$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \Gamma_t^{k_1}(1), \ldots, \Gamma_t^{k_1}(C_{t-2}^{k_1-2}); \\ \mathbf{A}_2 &= \Gamma_t^{k_1}(C_{t-2}^{k_1-2}+1), \ldots, \Gamma_t^{k_1}(m); \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \Gamma_t^{k_1}(C_{t-1}^{k_1-1}+1), \ldots, \Gamma_t^{k_1}(C_{t-1}^{k_1-1}+C_{t-2}^{k_1-2}); \\ \mathbf{B}_2 &= \Gamma_t^{k_1}(C_{t-1}^{k_1-1}+C_{t-2}^{k_1-2}+1), \ldots, \Gamma_t^{k_1}(C_{t-1}^{k_1-1}+m). \end{aligned} \tag{4}$$

Так как все наборы $\mathbf{B}_1$ принадлежат $\{G_t^{\text{пл}}\}$ (лемма 11 п. 2д), то на основании разобранного случая I. 1б1, заключаем, что

$$\psi_{k_2}(\{\mathbf{A}_1\}) \geqslant \psi_{k_2}(\{\mathbf{B}_1\}). \tag{5}$$

Из утверждений п. 1 леммы 11, следствий 1.10 и 1.6* следует, что вместо последовательности $\mathbf{A}_2$ можно рассматривать соответствующую последовательность $\mathbf{A}_2'$ в $G_t^{\text{пл}}$. При этом из леммы 11, п. 3б2, 3б3 получаем, что

$$\mathbf{A}_2' = \Gamma_t^{k_1}(C_{t-1}^{k-1}+1), \ldots, \Gamma_t^{k_1}(m + C_{t-2}^{k_1-1}).$$

Так как длины $\mathbf{A}_2'$ и $\mathbf{B}_2$ равны и обе последовательности находятся в $G_t^{\text{п}}$ (лемма 11 п. 2б), то на основании (1) получаем

$$\psi_{k_2}(\{\mathbf{A}_2'\}) \geqslant \psi_{k_2}(\{\mathbf{B}_2\}). \tag{6}$$

Из (5) и (6), учитывая лемму 7, получаем (2).

I. 1б3. Последовательности A^* и B^* представим в следующем виде:

$$A^* = A_1,\ A_2; \quad B^* = B_1,\ B_2,$$

где

$$A_1 = \Gamma_t^{k_1}(1), \ldots, \Gamma_t^{k_1}(m - C_{t-2}^{k_1-1}); \qquad A_2 = \Gamma_t^{k_1}(m - C_{t-2}^{k_1-1} + 1), \ldots, \Gamma_t^{k_1}(m); \tag{7}$$

$$B_1 = \Gamma_t^{k_1}(m - C_{t-1}^{k_1-1} + 1), \ldots, \Gamma_t^{k_1}(C_{t-1}^{k_1-1} + C_{t-2}^{k_1-1}); \qquad B_2 = \Gamma_t^{k_1}(C_{t-1}^{k_1-1} + C_{t-2}^{k_1-1} + 1), \ldots, \Gamma_t^{k_1}(C_{t-1}^{k_1-1} + m). \tag{8}$$

Легко видеть, что длина A_1 равна длине B_2, длина A_2 равна длине B_1.

Из утверждений п. 1 леммы 11 и следствий 1.10, 1.6* следует, что вместо последовательности B_1 можно рассматривать соответствующую последовательность B_1', все наборы которой расположены в графе $G_t^{\text{лп}}$.

С учетом п. 3б2, 3б3 леммы 11 получаем, что

$$B_1' = \Gamma_t^{k_1}(C_{t-2}^{k_1-2} + 1), \ldots, \Gamma_t^{k_1}(C_{t-1}^{k_1-1}).$$

Так как A_2 и B_1' составлены из наборов только левого подграфа G_t, то, воспользовавшись следствиями 1. 10, 1. 6* и п. 1 леммы 11, мы вместо последовательностей A_2 и B_1' в $G_t^{\text{л}}$, можем рассмотреть соответствующие последовательности A_2' и B_1'' в $\Delta_{t-1}^{(0)}$-графе G_{t-1}.

Учитывая, что в B_1'' входит набор $\Gamma_{t-1}^{k_1-1}(C_{t-1}^{k_1-1})$, что следует из п. 3аI леммы 11, на основании второго индуктивного предположения, имеем:

$$\psi_{k_2-1}(\{A_2'\}) \geqslant \psi_{k_2-1}(\{B_1''\}),$$

или

$$\psi_{k_2}(\{A_2\}) \geqslant \psi_{k_2}(\{B_1\}). \tag{9}$$

Покажем, что

$$\psi_{k_2}(\{A_1\}) \geqslant \psi_{k_2}(\{B_1\}). \tag{10}$$

Действительно. Пусть

$$A_1' = \Gamma_t^{k_1}(1 + C_{t-2}^{k_1-2}), \ldots, \Gamma_t^{k_1}(m - C_{t-2}^{k_1-1} + C_{t-2}^{k_1-2});$$

$$A_1'' = \Gamma_t^{k_1}(C_{t-1}^{k_1-1} + 1), \ldots, \Gamma_t^{k_1}(m + C_{t-2}^{k_1-2}).$$

Длины A_1' и A_1'' равны длине A, A_1' и A_1'' расположены соответственно в $G_t^{\text{лп}}$ и $G_t^{\text{пл}}$ (лемма 11, п. 2д) и наборы из A_1' и A_1'' соответствуют друг другу при изоморфизме $G_t^{\text{лп}}$ и $G_t^{\text{пл}}$ (лемма 11 п. 3б2, 3б3).

На основании разобранного случая I. Iа имеем

$$\psi_{k_2}(\{A_1\}) \geqslant \psi_{k_2}(\{A_1'\}), \tag{11}$$

а из (I) имеем

$$\psi_{k_2}(\{A_1''\}) \geqslant \psi_{k_2}(\{B_2\}). \tag{12}$$

Так как $\Psi_{k_2}(\{A_1'\}) = \Psi_{k_2}(\{A_1''\})$, то из (11) и (12) получаем (10). Учитывая лемму 7, из (9) и (10) получаем (2).

1.1б4. В этом случае в справедливости (2) убеждаемся так же, как и в случае 1.1б3.

Итак, случай 1.1б рассмотрен.

1. 1в. Последовательности A^* и A разобьем на следующие подпоследовательности:

$$A^* = A_1,\ A_2, \quad A = B_1,\ B_2, \tag{13}$$

где

$$A_1 = \Gamma_l^{k_1}(1), \dots, \Gamma_l^{k_1}(r + m - 1 - C_{l-1}^{k_1-1}),$$

$$A_2 = \Gamma_l^{k_1}(r + m - C_{l-1}^{k_1-1}), \dots, \Gamma_l^{k_1}(m),$$

$$B_1 = \Gamma_l^{k_1}(r), \dots, \Gamma_l^{k_1}(C_{l-1}^{k_1-1}),$$

$$B_2 = \Gamma_l^{k_1}(C_{l-1}^{k_1-1} + 1), \dots, \Gamma_l^{k_1}(r + m - 1).$$

Длины A_1 и B_2, A_2 и B_1, как легко видеть, соответственно равны.

Так как A_2 и B_1 расположены в G_l^{π} (лемма 11 п. 2в), B_1 содержит набор $\Gamma_l^{k_1} C_{l-1}^{k_1-1}$), то на основании п. 1 леммы 11, следствий 1.10, 1.6* и второго индуктивного предположения заключаем, что

$$\psi_{k_2}(\{A_2\}) \geqslant \psi_{k_2}(\{B_1\}). \tag{14}$$

Также, исходя из того, что рассмотрение последовательностей A_1 и B_2 относится к разобранному случаю 1. 1б, получаем

$$\psi_{k_2}(\{A_1\}) \geqslant \psi_{k_2}(\{B_2\}). \tag{15}$$

Из (14) и (15) с учетом леммы 7 получаем (2).

1. 2б. Последовательности A^* и A разобьем на следующие подпоследовательности:

$$A^* = A_1,\ A_2, \quad A = B_1,\ B_2, \tag{16}$$

где

$$A_1 = \Gamma_l^{k_1}(1), \dots, \Gamma_l^{k_1}(C_{l-1}^{k_1-1}),$$

$$A_2 = \Gamma_l^{k_1}(C_{l-1}^{k_1-1} + 1), \dots, \Gamma_l^{k_1}(m),$$

$$B_1 = \Gamma_l^{k_1}(r), \dots, \Gamma_l^{k_1}(r + C_{l-1}^{k_1-1} - 1),$$

$$B_2 = \Gamma_l^{k_1}(r + C_{l-1}^{k_1-1}), \dots, \Gamma_l^{k_1}(m + r - 1).$$

Длины A_1 и B_1, A_2 и B_2 соответственно равны.

Для последовательностей A_1 и B_1, рассуждая аналогично случаю 1. 1б, а для последовательностей A_2 и B_2, используя (1), получаем

$$\psi_{k_2}(\{A_1\}) \geqslant \psi_{k_2}(\{B_1\}), \tag{17}$$

$$\psi_{k_2}(\{A_1\}) \geqslant \psi_{k_2}(\{B_2\}). \tag{18}$$

Из (17), (18) и леммы 7 получаем (2).

1. 2в. Последовательности $\mathbf{A}^*$ и $\mathbf{A}$ представляем в виде:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \qquad \mathbf{A} = \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2,$$

где

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}_1 = \Gamma_t^{k_1}(1), \dots, \Gamma_t^{k_1}(r-1);\\
&\mathbf{A}_2 = \Gamma_t^{k_1}(r), \dots, \Gamma_t^{k_1}(m);\\
&\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_2;\\
&\mathbf{B}_2 = \Gamma_t^{k_1}(m+1), \dots, \Gamma_t^{k_1}(r+m-1).
\end{aligned} \tag{19}$$

Рассмотрение последовательностей $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{B}_2$ совпадает со случаем 1.1б. Поэтому

$$\psi_{k_2}(\{\mathbf{A}_1\}) \geqslant \psi_{k_2}(\{\mathbf{B}_2\}). \tag{20}$$

Из (19), (20) и леммы 7 получаем (2).

Итак, предположив, что лемма верна при $n=t-1$, мы убедились в справедливости первой части доказываемого неравенства при $n=t$.

Аналогичными методами доказывается, что из справедливости леммы при $n=t-1$ следует справедливость второй части доказываемого неравенства при $n=t$.

Индуктивный шаг проведен полностью.

Лемма 8* доказана.

В следствии 2.5 было показано, как можно вычислить значение функции $\Psi_k(\{\mathbf{A}\})$ для произвольной заданной последовательности Δ_n-наборов $\mathbf{A}$.

Из полученной формулы видно, что в общем случае это довольно громоздкое вычисление. Однако, если $\mathbf{A}$ произвольная $+$-уплотненная последовательность Δ_n-наборов, функция $\psi_k(\{\mathbf{A}\})$ принимает сравнительно простой вид.

Лемма 12*. *Для произвольной $+$-уплотненной последовательности $\Delta_n^{k_1}$-наборов.* $\mathbf{A} = \Gamma_n^{k_1}(m_1), \Gamma_n^{k_1}(m_1+1), \dots, \Gamma_n^{k_1}(m_2)$, *где* $0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant n$, $1 \leqslant m_1 \leqslant m_2 \leqslant C_n^{k_1}$, *выполняется;*

$$\psi_{k_2}(\mathbf{A}) = \sum_{j=0}^{k_1-1} \left(C_{n-a_{j+1}}^{k_2-j} - C_{n-b_{j+1}}^{k_2-j}\right),$$

где

$$a_j = (\Gamma_n^{k_1}(m_1-1))_j, \quad b_j = (\Gamma_n^{k_1}(m_2))_j, \quad \text{при } j = 1, \dots, k_1;$$

и

$$(\Gamma_n^{k_1}(0))_j = \begin{cases} j & \text{при } 1 \leqslant j \leqslant k_1 - 1,\\ k_1 - 1 & \text{при } j = k_1.\end{cases}$$

Лемма 12* непосредственно следует из леммы 18, которой предшествуют следующие леммы.

Лемма 13. *Для того, чтобы произвольный $\Delta_n^{k_1}$-набор A имел хотя бы одно k_2-расширение, где $0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant n$, необходимо и достаточно выполнение неравенства*

$$(A)_{k_1} \leqslant k_1 + n - k_2.$$

Доказательство.

При $k_1 = 0$ необходимость очевидна.

При $k_1 \neq 0$ необходимость следует из леммы 2. Действительно, если B—k_2-расширение A, то

$$(A)_{k_1} = (B)_{k_1} \leqslant k_1 + n - k_2.$$

Достаточность. Если A имеет хотя бы одно k_2-расширение, то согласно следствию 1.5, $C_{n-(A)_{k_1}}^{k_2-k_1} \geqslant 1$, что справедливо при выполнении неравенства $0 \leqslant k_2 - k_1 \leqslant n - (A)_{k_1}$. Из этого неравенства следует требуемое, так как по условию леммы $0 \leqslant k_1 \leqslant k_2$.

Лемма 14. *Если* $\mathbf{A} = A_1, \ldots, A_m$ — *произвольная* $+$-*уплотненная последовательность* $\Delta_n^{k_1}$-*наборов, где* $0 \leqslant k_1 \leqslant n$, *а* $\mathbf{B}_j = B_{j1}, \ldots, B_{jr_j}$ — k_2-*продолжение* A_j, *при* $j = 1, \ldots, m$, $k_1 \leqslant k_2 \leqslant n$, *то последовательность* $B_1, B_2, \ldots, B_m = \mathbf{B}$ — $+$-*уплотненная и есть* k_2-*продолжение* $\mathbf{A}$. *При этом, если* $A_1 = \Gamma_n^{k_1}(1)$, *то* $\mathbf{B}$ *совпадает с начальным отрезком последовательности* $\Gamma_n^{k_2}$.

Доказательство.

При $\{\mathbf{B}\} = \varnothing$ или $k_2 = k_1$ лемма очевидна.

Пусть $\{\mathbf{B}\} \neq \varnothing$ и $k_1 \neq k_2$.

Из следствия 1.5 следует, что при некоторых $j \in \mathrm{I}_m$ множество $\{\mathbf{B}_j\}$ может оказаться пустым. Поэтому лемму достаточно доказать для последовательности $\mathbf{B}' = \mathbf{B}_{j1}, \ldots, \mathbf{B}_{jt}$, которая получается из $\mathbf{B}$ после удаления из $\mathbf{B}$ всех последовательностей $\mathbf{B}_j$ таких, что $\{\mathbf{B}_j\} = \varnothing$, $j = 1, \ldots, m$.

Для произвольного $p \in \mathrm{I}_{t-1}$, $\mathbf{B}_{j_p}$ и $\mathbf{B}_{j_{p+1}}$ является k_2-продолжениями соответственно A_{j_p} и $A_{j_{p+1}}$, и $A_{j_p} < A_{j_{p+1}}$. Поэтому

$$\forall B' B'' (B' \in \{\mathbf{B}_{j_p}\} \,\&\, B'' \in \{\mathbf{B}_{j_{p+1}}\} \rightarrow B' \lesssim B''). \tag{1}$$

Так как каждая из последовательностей $\mathbf{B}_{j_p}$, $p \in \mathrm{I}_t$ $+$-уплотненная (лемма 9), то из (1) следует, что наборы в $\mathbf{B}'$ расположены в лексикографическом порядке. А так как $\mathbf{B}'$ совпадает с множеством всех расширений наборов из $\mathbf{A}$, то $\mathbf{B}'$ есть k_2-продолжение $\mathbf{A}$.

Покажем, что $\mathbf{B}'$ $+$-уплотненная последовательность. Для этого достаточно показать, что для произвольного $p \in \mathrm{I}_{t-1}$ последовательность $\mathbf{B}_{j_p}, \mathbf{B}_{j_{p+1}}$ $+$-уплотненная.

Возможны следующие случаи:

а. Наборы A_{j_p} и $A_{j_{p+1}}$ являются соседними в $\mathbf{A}$. Так как $\mathbf{A}$ $+$-уплотненная последовательность $\Delta_n^{k_1}$-наборов, то

$$\neg\exists A\,(A \in R_n^{k_1} \,\&\, A_{j_p} \prec A \prec A_{j_{p+1}}). \tag{2}$$

Пусть B' и B'' соответственно последний и первый наборы $\mathbf{B}_{j_p}$ и $\mathbf{B}_{j_{p+1}}$.

Допустим, что $\mathbf{B}_{j_p}, \mathbf{B}_{j_{p+1}}$ не является $+$-уплотненной. Тогда

$$\exists B\,(B \in R_n^{k_2} \,\&\, B' \prec B \prec B'') \tag{3}$$

и для $A = \{(B)_1, (B)_2, \ldots, (B)_{k_1}\}$ выполняется соотношение

$$(A_{j_p} \preceq A \preceq A_{j_{p+1}}) \,\&\, (A \in R_n^{k_1}). \tag{4}$$

Поскольку B'-последний, а B''-первый наборы соответственно $\mathbf{B}_{j_p}$ и $\mathbf{B}_{j_{p+1}}$, то из (3) следует, что $B \,\overline{\in}\, \{\mathbf{B}_{j_p}\}$ и $B \,\overline{\in}\, \{\mathbf{B}_{j_{p+1}}\}$, поэтому B не может быть k_2-расширением ни A_{j_p}, ни $A_{j_{p+1}}$. Поэтому из (4) получаем

$$(A_{j_p} \prec A \prec A_{j_{p+1}}) \,\&\, (A \in R_n^{k_1}), \tag{5}$$

что противоречит (2).

б. Наборы A_{j_p} и $A_{j_{p+1}}$ не являются соседними в $\mathbf{A}$, т. е. $\mathbf{A}$ имеет вид $A_1, A_2, \ldots, A_{j_p}, A_{j_p+l}, \ldots, A_{j_p+s}, A_{j_{p+1}}, \ldots, A_m$, где для k_2-продолжений наборов A_{j_p+l}, $i = 1, \ldots, s$ выполняется равенство:

$$\{\mathbf{B}_{j_p+l}\} = \varnothing.$$

Повторяя рассуждения случая а, получаем, что

$$\exists A\,(A \in R_n^{k_1} \,\&\, A_{j_p} \prec A \prec A_{j_{p+1}}) \tag{6}$$

и A имеет k_2-расширение B.

Так как $\mathbf{A}$ — $+$-уплотненная последовательность, то A совпадает с одним из наборов $A_{j_p+1}, \ldots, A_{j_p+S}$. Однако ни один из них не имеет k_2-расширений и потому (6) неверно.

Итак, $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$ является $+$-уплотненной последовательностью.

Последнее утверждение леммы получаем посредством тех же рассуждений, что и при доказательстве аналогичного утверждения леммы 9.

Лемма 14 доказана.

Лемма 15. *Если* $\mathbf{B} = B_1, \ldots, B_r$ k_2—*продолжение произвольного* $\Delta_n^{k_1}$-*набора* A, *где* $0 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant n$, *то при* $r \neq 0$,

$$B_1 = A \cup \{(A)_{k_1} + 1, \ldots, (A)_{k_1} + k_2 - k_1\},$$

$$B_r = A \cup \{k_1 + n - k_2 + 1, \ldots, n\}.$$

Утверждение леммы 15 легко получить из леммы 6*.

Лемма 16. *Если* $\mathbf{B} = B_1, \ldots, B_r$ k_2*-продолжение произвольной* $+$*-уплотненной последовательности* $\Delta_n^{k_1}$*-наборов* $\mathbf{A} = A_1, \ldots, A_m$ *где* $0 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant n$. *то при* $r \neq 0$, *можно указать число* s *такое, что*

$$\forall x (0 \leqslant x \leqslant s \leqslant k_1 \rightarrow (A_m)_x \leqslant x + n - k_2 \& (A_m)_{s+1} > s + 1 + n - k_2),$$

где $(A_m)_{k_1+1} = \infty$, *и*

$$B_r = \{(A_m)_1, \ldots, (A_m)_s, \ s + 1 + n - k_2, \ s + 2 + n - k_2, \ldots, n\},$$

Доказательство.

Пусть A_j-первый справа набор в последовательности $\mathbf{A}$, имеющий хотя бы одно k_2-расширение, $1 \leqslant j \leqslant m$.

Так как $r \neq 0$, то такой набор A_j можно указать.

Пусть $\mathbf{B}_j = B_{j1}, \ldots, B_{jv}$ k_2-продолжение A_j.

Так как $\mathbf{A}$- $+$ -уплотненная последовательность, то из леммы 14 получаем, что последние члены последовательностей $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}_j$ совпадают, т. е. $B_r = B_{jv}$.

Поэтому, с учетом леммы 15 получаем, что

$$B_r = B_{jv} = A_j \cup \{k_1 + 1 + n - k_2, \ k_1 + 2 + n - k_2, \ldots, n\}. \tag{1}$$

Выразим компоненты набора A_j через компоненты набора A_m. Согласно лемме 13 имеем, что

$$(A_j)_{k_1} \leqslant k_1 + n - k_2, \tag{2}$$

$$(A_{j+t})_{k_1} > k_1 + n - k_2, \quad (t = 1, \ldots, m - j). \tag{3}$$

Из (2) и (3) для наборов A_j и A_m получаем, что

$$\exists s_1 \forall x (0 \leqslant x \leqslant s_1 \leqslant k_1 \rightarrow (A_j)_x < x + n - k_2 \& (A_j)_{s_1+1} = \\ = s_1 + 1 + n - k_2), \tag{4}$$

$$\exists s_2 \forall x (0 \leqslant x \leqslant s_2 \leqslant k_1 \rightarrow (A_m)_x \leqslant x + n - k_2 \& (A_m)_{s_2+1} > \\ > s_2 + 1 + n - k_2). \tag{5}$$

(Мы полагаем в (3) и (4), что $(A)_{|A|+1} = \infty$ и $(A_j)_0 = -\infty$, где $A \in \{A_j, A_m\}$. При этом, если $s_1 = k_1$, то $A_j = A_m$ и рассматривается только соотношение (4).

Для наборов $A_j, A_{j+1}, \ldots, A_m$ справедливы также следующие равенства:

$$(A_j)_x = (A_t)_x, \quad \text{при } 0 \leqslant x \leqslant s_1, \ t = j + 1, \ldots, m. \tag{6}$$

Действительно. Последовательность $A_j, A_{j+1}, \ldots, A_m$ — $+$ -уплотненная и потому может быть последовательно получена посредством алгоритма $\Gamma_n^{k_1}$. При этом, как следует из анализа работы $\Gamma_n^{k_1}$, вначале будут получены наборы, для которых выполняется условие (6) и лишь после того, как все такого типа наборы будут исчерпаны, мы получим некоторый набор

$$\Gamma_n^{k_1}(p) = \{(A_j)_1, \ldots, (A_j)_{s_1-1}, (A_j)_{s_1}+1, (A_j)_{s_1}+2, \ldots, (A_j)_{s_1}+k_1-s_1+1\}.$$

Набор $\Gamma_n^{k_1}(p)$ не может принадлежать последовательности A_j, $A_{j+1}, \ldots, A_m$, так как из (4) следует, что $(\Gamma_n^{k_1}(p))_{k_1} \leqslant k_1+n-k_2$, т. е. $\Gamma_n^{k_1}(p)$ имеет k_2-расширения, в то время как все наборы $A_{j+1}, \ldots, A_m$ согласно предположению, k_2-расширений не имеют.

Из (4), (5) и (6) следует, что

$$A_j = \{(A_m)_1, \ldots, (A_m)_{s_2}, \quad s_2+1+n-k_2, \ldots, k_1+n-k_2\}. \tag{7}$$

Из (1) и (7) получаем, что

$$B_r = \{(A_m), \ldots, (A_m)_{s_2}, \; s_2+1+n-k_2, \; s_2+2+n-k_2, \ldots, n\},$$

что и т. д.

Заметим, что аналогичным способом можно выразить компоненты первого члена последовательности **B** через компоненты первого члена последовательности **A**.

Пусть **B** k_2-продолжение $+$-уплотненной последовательности

$$\mathbf{A} = \Gamma_n^{k_1}(m_1), \Gamma_n^{k_1}(m_1+1), \ldots, \Gamma_n^{k_1}(m'_2),$$

где

$$0 < k_1 < k_2 \leqslant n, \qquad 1 \leqslant m_1 \leqslant m'_2 < C_n^{k_1}.$$

Согласно лемме 14, последовательность **B** будет также $+$-уплотненной. Последовательности **A** и **B** однозначно определяются параметрами соответственно k_1, m_1, m'_2 и k_2, k_1, m_1, m'_2. Поэтому число наборов в k_2-продолжении последовательности **A**, в частном случае, когда **A** $+$-уплотненная последовательность, может быть задано посредством некоторой функции $\theta(k_2, k_1, m_1, m'_1)$.

Лемма 17. $m = \theta(k, k, 1, m) = C_n^k - \sum\limits_{j=0}^{k-1} C_{n-a_{j+1}}^{k-j}$, *где* $0 < k \leqslant n$, $1 \leqslant m \leqslant C_n^k$, $a_j = (\Gamma_n^k(m))_j$, *при* $j = 1, \ldots, k$.

Доказательство.

Рассмотрим последовательность $\mathbf{A} = \Gamma_n^k(1), \ldots, \Gamma_n^k(m)$. Поскольку она является $+$-уплотненной и начинается с $\Gamma_n^k(1)$, то в ней представлены все Δ_n^k-наборы, не превышающие при лексикографическом упорядочении набора $\Gamma_n^k(m)$.

Из алгоритма Γ_n^k следует, что множество $\{\mathbf{A}\}$ можно разбить на подмножества $Q_1, \ldots, Q_k$, где Q_j, $j = 1, \ldots k$, есть множество всех Δ_n^k-наборов, у которых первые $j-1$ компоненты совпадают и равны соответственно $a_1, a_2, \dots, a_{j-1}$, j-ая компонента не превышает a_j, а остальные компоненты принимают всевозможные значения.

Легко видеть, что

$$|Q_1| = \sum_{x=1}^{a_1-1} C_{n-x}^{k-1},$$

$$|Q_2| = \sum_{x=a_1+1}^{a_2-1} C_{n-x}^{k-2},$$

$$\dots\dots\dots\dots \tag{1}$$

$$|Q_{k-1}| = \sum_{x=a_{k-1}+1}^{a_{k-1}-1} C_{n-x}^{1},$$

$$|Q_k| = \sum_{x=a_{k-1}+1}^{a_k} C_{n-x}^{0}.$$

Так как $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \dots + C_{n-p-1}^{k-1} + C_{n-p-1}^{k}$, то из (1) получаем:

$$|Q_1| = C_n^k - C_{n-a_1-1}^{k},$$

$$|Q_2| = C_{n-a_1}^{k-1} - C_{n-a_2+1}^{k-1},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$|Q_{k-1}| = C_{n-a_{k-2}}^{2} - C_{n-a_{k-1}+1}^{2},$$

$$|Q_k| = C_{n-a_{k-1}}^{1} - C_{n-a_k}^{1},$$

откуда следует, что

$$m = \sum_{j=1}^{k} |Q_j| + 1 = C_n^k - C_{n-a_1}^{k} - C_{n-a_2}^{k-1} - \dots - C_{n-a_{k-2}}^{3} - C_{n-a_{k-1}}^{2} -$$

$$- C_{n-a_k}^{1} = C_n^k - \sum_{j=0}^{k-j} C_{n-a_{j+1}}^{k-j}, \text{ что и т. д.}$$

Лемма 18. $\theta(k_2, k_1, 1, m) = C_n^{k_2} - \sum_{j=0}^{k_1-1} C_{n-a_{j+1}}^{k_2-j}$, *где* $0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant n$, $1 \leqslant m \leqslant C_n^{k_1}$, $a_j = (\Gamma_n^{k_1}(m))_j$, $j = 1, \dots, k$.

Рассмотрим последовательность $A_2 = \Gamma_n^{k_2}(1), \dots, \Gamma_n^{k_2}(\theta(k_2, k_1, 1, m))$. Эта последовательность — $+$-уплотненная и является k_2-продолжением последовательности $A = \Gamma_n^{k_1}(1), \dots, \Gamma_n^{k_1}(m)$ (лемма 14 и определение функции $\theta(x, y, z, u)$).

Из леммы 16 имеем, что

$$\Gamma_n^{k_2}(\theta(k_2, k_1, 1, m)) = \{a_1, \dots, a_s, s+1+n-k_2, \dots, n\}, \tag{1}$$

где s получено из условия

$$\forall x (0 \leqslant x \leqslant s \leqslant k_1 \rightarrow a_x \leqslant x + n - k_2 \,\&\, a_{s+1} > s+1+n-k_2). \tag{2}$$

Из леммы 17 и (1) получаем, что

$$\vartheta(k_2, k_1, 1, m) = C_n^{k_2} - \sum_{j=0}^{s-1} C_{n-a_{j+1}}^{k_2-j} - \sum_{j=s}^{k_1-1} C_{k_2-j-1}^{k_2-j} = C_n^{k_2} - \sum_{j=0}^{s-1} C_{n-a_{j+1}}^{k_2-j}. \quad (3)$$

В то же время, с учетом (2) получаем:

$$C_n^{k_2} - \sum_{j=0}^{k_1-1} C_{n-a_{j+1}}^{k_2-j} = C_n^{k_2} - \sum_{j=0}^{s-1} C_{n-a_{j+1}}^{k_2-j} - \sum_{j=s}^{k_1-1} C_{n-a_{j+1}}^{k_2-j} =$$

$$= C_n^{k_2} - \sum_{j=0}^{s-1} C_{n-a_{j+1}}^{k_2-j}. \quad (4)$$

Из (3) и (4) следует искомое равенство.

Лемма 18 доказана.

§ 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ О СИСТЕМАХ НЕСРАВНИМЫХ МНОЖЕСТВ С МИНИМАЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПОДМНОЖЕСТВ (ОКОНЧАНИЕ)

При доказательстве теоремы 1 нам потребуются факты, полученные в предыдущих параграфах, а также ряд лемм, из которых основной является следующая лемма 19*.

Лемма 19*. *Число всех различных Δ_n^i-поднаборов, построенных из Δ_n^l-наборов множества $\{L_n^l(1), \dots, L_n^l(m)\}$, где $0 \leqslant i \leqslant l \leqslant n$, $1 < m \leqslant C_n^l$, не больше числа всех различных Δ_n^i-поднаборов, построенных из Δ_n^l-наборов произвольного множества, состоящего из m различных Δ_n^l-наборов.*

Непосредственно из определения Δ_n-поднаборов и Δ_n-наднаборов получаем следующую лемму.

Лемма 20. *Для произвольных Δ_n-наборов A и B, если A (собственный) $\Delta_n^{|A|}$-поднабор B, то $I_n \setminus A$ (собственный) $\Delta_n^{n-|A|}$-наднабор $I_n \setminus B$, и, надборот, если A (собственный) $\Delta_n^{|A|}$-наднабор B, то $I_n \setminus A$-(собственный) $\Delta_n^{n-|A|}$-поднабор $I_n \setminus B$.*

Следствие 1. 20. *Если $S = \{A_1, \dots, A_m\}$-произвольное множество Δ_n-наборов и $S' = \{I_n \setminus A_1, \dots, I_n \setminus A_m\}$, то для произвольного k, $0 \leqslant k \leqslant n$, число всех различных Δ_n^k-поднаборов наборов из S равно числу всех различных Δ_n^{n-k}-наднаборов наборов из S'.*

Из следствия 1.20 следует, что для доказательства леммы 19* достаточно доказать следующую лемму.

---

* Лемма 19* по существу совпадает с теоремой Макалея [1]. Она была получена также Краскалом (1950) и Катоной (1960). Данное доказательство леммы, независимо получено автором [10] и существенно отлично от [2].

Лемма 19. (о минимальном числе наднаборов). *Число всех различных $\Delta_n^{k_2}$-наднаборов, построенных из $\Delta_n^{k_1}$-наборов множества $\{\Gamma_n^{k_1}(1), \ldots, \Gamma_n^{k_1}(m)\}$, где $0 \leqslant k_1 \leqslant k \leqslant n$, $1 \leqslant m \leqslant C_n^{k_1}$, не больше числа всех различных $\Delta_n^{k_2}$-наднаборов, построенных из $\Delta_n^{k_1}$-наборов произвольного множества, состоящего из m различных $\Delta_n^{k_1}$-наборов.*

Докажем лемму 19. С этой целью предварительно докажем ряд утверждений, в которых исследуются соотношения между совокупностями Δ_n-наборов, связанные со свойством одних наборов быть наднаборами других.

Введем следующие обозначения.

Если S—произвольное множество $\Delta_{n,p}$-наборов, то через $\mathring{S}$ будем обозначать лексикографически упорядоченную последовательность, составленную из всех наборов S. Для произвольного множества Δ_n-наборов-S, через $V(k, S)$ обозначим множество всех различных Δ_n-наднаборов длины k наборов из S, где $0 \leqslant k \leqslant n$, а через $N_k^{\circ}(S)$ — число $|V(k, S)|$.

Лемма 21. *Если последовательность $B_1, \ldots, B_r$ является k_2-продолжением $\Gamma_n^{k_1}(1), \ldots, \Gamma_n^{k_1}(m)$, где $0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant n$, то*

$$\forall jB\,(1 \leqslant j \leqslant m \,\&\, B \in R_n^{k_2} \setminus \bigcup_{j=1}^{r} \{B_1, \ldots, B_r\} \to \Gamma_n^{k_1}(j) \sqsubset B).$$

Доказательство.

Пусть B произвольный элемент из $R_n^{k_2} \setminus \bigcup_{j=1}^{r} \{B_1, \ldots, B_r\}$.

Ясно, что набор B является k_2-расширением $\Delta_n^{k_1}$-набора

$$A = \{(B)_1, \ldots, (B)_{k_1}\}.$$

Так как в множестве $\bigcup_{j=1}^{r}\{B_j\}$ содержатся все k_2-расширения каждого набора $\Gamma_n^{k_1}(j)$, при $j = 1, \ldots, m$, и $B \neq B_j$, $j = 1, \ldots, m$, то

$$A \in R_n^{k_1} \setminus \bigcup_{j=1}^{m} \{\Gamma_n^{k_1}(j)\}. \tag{1}$$

Из (1) следует, что

$$\Gamma_n^{k_1}(j) \lessdot A \qquad j = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

или

$$\forall j \exists q_j \forall x\,(1 \leqslant j \leqslant m \,\&\, 0 \leqslant x \leqslant q_j < k_1 \to (A)_x =$$

$$= (\Gamma_n^{k_1}(j))_x \,\&\, (A)_{q_j+1} > (\Gamma_n^{k_1}(j))_{q_j+1}). \tag{3}$$

Так как

$$(A)_x = (B)_x \qquad x = 1, \ldots, q_j, \tag{4}$$

и

$$\forall jy\,(1 \leqslant j \leqslant m \,\&\, q_j + 1 \leqslant y \leqslant k_2 \to (B)_y > (B)_{q_j+1}), \tag{5}$$

то из (3), (4), (5) получаем, что $(\Gamma_n^{k_1}(j))_{q_j+1} \overline{\in} B$, при $j = 1, \dots, m$ откуда следует, что $\Gamma_n^{k_1}(j) \urcorner\subset B$, что и т. д.

Следствие 1.21. *Множество всех $\Delta_n^{k_2}$-наднаборов наборов последовательности $\Gamma_n^{k_1}(1), \dots, \Gamma_n^{k_1}(m)$, где $0 < k_1 < k_2 \leqslant n$, $1 \leqslant m \leqslant C_m^{k_1}$, совпадает с множеством всех наборов k_2-продолжения $\Gamma_n^{k_1}(1), \dots, \dots, \Gamma_n^{k_1}(m)$, откуда, в частности, следует, что*

$$N_{k_2}^0(\{\Gamma_n^{k_1}(1), \dots, \Gamma_n^{k_1}(m)\}) = \psi_{k_2}(\{\Gamma_n^{k_1}(1), \dots, \Gamma_n^{k_1}(m)\}).$$

Следствие 2.21. *k_2-продолжение произвольного набора $\Gamma_n^{k_1}(m)$, где $0 < k_1 < k_2 \leqslant n$, $1 \leqslant m \leqslant C_n^{k_1}$, совпадает с множеством всех тех $\Delta_n^{k_2}$-наднаборов $\Gamma_n^{k_1}(m)$, ни один из которых не является $\Delta_n^{k_2}$-наднабором ни одного из наборов $\Gamma_n^{k_1}(1), \dots, \Gamma_n^{k_1}(m-1)$, откуда, в частности, следует, что*

$$N_{k_2}^0(\{\Gamma_n^{k_1}(1), \dots, \Gamma_n^{k_1}(m)\}) = N_{k_2}^0(\{\Gamma_n^{k_1}(1), \dots, \Gamma_n^{k_1}(m-1)\} + \psi_{k_2}(\{\Gamma_n^{k_1}(m)\}).$$

Лемма 22. *Для произвольного $\tilde{\delta}\Delta$-графа G, если G — некоторый $\tilde{\delta}\Delta_n^{a,p}$-граф, $G^л$ и $G^п$ — соответственно левый и правый подграфы G, B — произвольная левая вершина G, то*

$$\nu(\{B\}, G^л, G^п) = \{B \setminus \{a+p+\}\}.$$

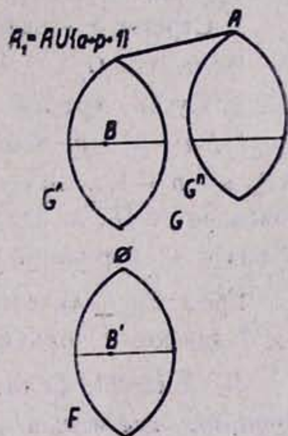

Рис. 10.

Доказательство.

Пусть A — корень G и F — $\Delta_{n-a-p-1}^{(0)}$-граф (рис. 10).

Согласно определению, $G^л$ есть Δ_n-граф с корнем $A \cup \{a+p+1\}$ а $G^п$ — $\tilde{\delta}\Delta_n^{a,p+1}$-граф с корнем A.

Из леммы 6* следует, что $G^л$ и $G^п$ изоморфны графу F. Поэтому, если

$$\{B\}' = \nu(\{B\}, G^л, F),$$

то

$$\{B''\} = \nu(\{B'\}, F, G^п) = \nu(\{B\}, G^л, G^п).$$

Поскольку B — вершина из $G^л$, а $G^л$ является Δ-графом, то, согласно определению Δ-графов, B является расширением корня G, т. е. вершины $A_1 = A \cup \{a+p+1\}$. Поэтому B можно представить на основании леммы 5 в виде $A_1 \cup C$, где C — некоторый поднабор набора $\{a+p+2, \dots, n\}$.

Из леммы 6* п. 2 получаем:

1. если $B = A_1$, то $B' = \varnothing$ и $B'' = A = A_1 \setminus \{a+p+1\} = B \setminus \{a+p+1\}$;

2. если $B \neq A_1$, то $B' = \{(B)_{|A_1|+1} - a - p - 1, \ldots, (B)_{|B|} - a - p\} = \{(C)_1 - a - p - 1, \ldots, (C)_{|C|} - a - p - 1\}$ и

$$B'' = A \cup \{(C)_1, \ldots, \{(C)_{|C|}\} = (A_1 \setminus \{a + p + 1\}) \cup C = B \setminus \{a + p + 1\}.$$

Лемма 22 доказана.

Следствие 1.22. *Если S—произвольное множество наборов и G—некоторый $\delta\Delta$-граф, то для каждого натурального числа k,*

$$V^{п}(k, S) \neq \varnothing \to V^{л}(k, S) \neq \varnothing,$$

где $V^{л}(k, S)$ и $V^{п}(k, S)$ равны множествам наднаборов наборов из S, принадлежащих соответственно левому и правому подграфам G.

Следствие 2.22. *Для произвольного $\delta\Delta$-графа G, если G — некоторый $\delta\Delta_n^{a,p}$-граф, $G^{л}$ и $G^{п}$ — соответственно левый и правый подграфы G, B—произвольная правая вершина G, то $\nu(\{B\}, G^{п}, G^{л})$ является $\Delta_n^{|B|+1}$-наднабором B, содержащим число $\{a + p + 1\}$.*

Заметим, что лемма 22 позволяет сформулировать простой алгоритм синтеза произвольного Δ-подграфа. Действительно. Пусть требуется построить $\delta\Delta_n^{a,p}$-граф с корнем A.

Выполняем следующие построения.

1. Строим Δ_n-граф G_{n-a-p} с корнем $A \cup \{a + p+1, a+p + 2, \ldots, n\}$. Ясно, что G_{n-a-p} совпадает со своим корнем.

2. Пусть Δ_n-граф G_i с корнем $A\cup\{a + p + 1, \ldots, a + p + i\}$, где $1 \leqslant i \leqslant n - a - p$, нами уже построен. Тогда Δ_n-граф G_{i-1} с корнем $A \cup \{a + p + 1, \ldots, a + p + i - 1\}$ есть граф, левый подграф которого совпадает с G_i, а правый — получен из G_i заменой каждой вершины B графа G_i вершиной $C = B \setminus \{a + p + i\}$.

Граф G_0, полученный вышеуказанным способом, будет искомым $\delta\Delta_n^{a,p}$-графом с корнем A.

Лемма 23. *Если G_r — $\Delta_r^{(0)}$-граф, где $r \in \{n - 1, n\}$, B и C — произвольные вершины соответственно $G_n^{л}$ и G_{n-1}, B_1 и C_1 произвольные наднаборы, соответственно B и C, то:*

1. $B_1 \in \{G_n^{л}\}$, $C_1 \in \{G_{n-1}\}$;

2. *Набор $B_1' = \nu(\{B_1\}, G_n^{л}, G_{n-1})$ будет $\Delta_{n-1}^{|B_1|-1}$-наднабором набора $B' = \nu(\{B\}, G_n^{л}, G_{n-1})$, а набор $C_1' = (\{C_1\}, G_{n-1}, G_n^{л})$ — $\Delta_n^{|C_1'|+1}$-наднабором набора $C' = \nu(\{B\}, G_{n-1}, G_n^{л})$.*

Доказательство.

Пусть $|B| = k_1$, $|B_1| = k_2$, $|C| = l_1$, $|C_1| = l_2$.

1. Так как $B \in \{G_n^{л}\}$, то из п. 2а леммы 19 получаем, что $B = \Gamma_n^{k_1}(t)$, где $1 \leqslant t \leqslant C_{n-1}^{k_1-1}$.

Из следствия 1. 21 получаем, что B_1 является k_2-расширением одного из наборов $\Gamma_n^{k_1}(1), \ldots, \Gamma_n^{k_1}(t)$. Так как каждый из этих наборов принадлежит $\{G_n^n\}$ и G_n^n является Δ_n^1-графом, то из леммы 4 следует, что B_1 также принадлежит $\{G_n^n\}$.

В справедливости утверждения $C_1 \in \{G_{n-1}\}$ убеждаемся аналогичным способом.

2. Мы докажем первую часть утверждения леммы 23, а именно то, что B_1' является $\Delta_{n-1}^{k_n-1}$-наднабором B'.

Вторая часть этого утверждения доказывается аналогичными методами.

Из того, что G_n и G_{n-1} — Δ-графы следует, что $n \geqslant 1$, откуда получаем: $B \neq \varnothing$.

Так как B, $B_1 \in \{G_n^n\}$, а G_n^n — Δ_n-граф с корнем $A = \{1\}$, то B и B_1 являются расширениями A. Поэтому $B = A \cup \widetilde{B}$, $B_1 = A \cup \widetilde{B}_1$, где $\widetilde{B}$ и $\widetilde{B}_1$, согласно лемме 5, поднаборы набора $\{2, \ldots, n\}$.

Так как B_1 — наднабор B, то ясно, что B — поднабор B_1, а следовательно, $\widetilde{B}$ — поднабор B_1.

Из п. 2 леммы 6* получаем, что при $B \neq \varnothing$,

$$B' = \{(\widetilde{B})_1 - 1, \ldots, (\widetilde{B})_{|B|} - 1\}, \tag{1}$$

$$B_1' = \{(\widetilde{B}_1)_1 - 1, \ldots, (\widetilde{B}_1)_{|B_1|} - 1\}. \tag{2}$$

Так как $\widetilde{B}$ поднабор $\widetilde{B}_1$, то из (1) и (2) следует, что B' будет поднабором B_1' и, следовательно, B_1' — наднабор B'.

Лемма 23 доказана.

Лемма 24. *Если G_r — Δ_r^0-граф, где $r \in \{n-1, n\}$, B и C — произвольные вершины соответственно $G_n^п$ и G_{n-1}, B_1 — произвольный наднабор B, не содержащий числа 1, C_1 — произвольный наднабор C, то*:

1. $B_1 \in \{G_n^п\}$, $C_1 \in \{G_{n-1}\}$;

2. *Набор* $B_1' = \nu(\{B_1\}, G_n^п, G_{n-1})$ *будет* $\Delta_{n-1}^{|B_1'|}$*-наднабором* $B' = \nu(\{B\}, G_n^п, G_{n-1})$, *а набор* $C_1' = \nu(\{C_1\}, G_{n-1}, G_n^п)$ — $\Delta_n^{|C_1'|}$*-наднабором набора* $C' = \nu(\{C\}, G_{n-1}, G_n^п)$.

Доказательство.

1. Так как B_1 не содержит цифру 1, то из леммы 22 следует, что $B_1 \in \{G_n^п\}$.

Утверждение: $C_1 \in \{G_{n-1}\}$ есть повторение п. 1 леммы 23.

2. Покажем, что B_1' является $\Delta_{n-1}^{|B_1'|}$-наднабором B'.

Действительно. Если $B = \varnothing$, то доказываемое утверждение очевидным образом следует из п. 2 леммы 6*.

Пусть $B = \varnothing$. Так как B_1 является наднабором B, то согласно определению, B — поднабор B_1.

Из п. 2 леммы 6* получаем, что при $B \neq \varnothing$,

$$B' = \{(B)_1 - 1, \dots, (B)_{|B|} - 1\}, \quad (1)$$

$$B'_1 = \{(B_1)_1 - 1, \dots, (B_1)_{|B_1|} - 1\}. \quad (2)$$

Так как B поднабор B_1, то из (1) и (2) следует, что B' будет поднабором B'_1 и, следовательно, B'-наднабор В.

Вторая часть п. 2 леммы 24 доказывается аналогичным образом.

Лемма 24 доказана.

Введем следующие обозначения.

Если G_n — $\Delta_n^{(0)}$-граф, S — произвольное подмножество $\{G_n\}$, то через $V_n^p(k, S)$ будем обозначать множество всех Δ_n^k-наднаборов наборов из S, принадлежащих $\{G_n^p\}$, где k — произвольное натуральное число, $p \in \{\varnothing, л, п, лл, лп, пл, пп\}$, $G_n^{\varnothing} = G_n$, $V_n^{\varnothing}(k, S) = V_n(k, S)$.

Лемма 25. *Если G_r — $\Delta_r^{(0)}$-граф, где $r \in \{n-2, n-1, n\}$, S — произвольное подмножество наборов одинаковой длины, то:*

1. *Если* $S \subseteq \{G_n^{л}\}$ *и* $S_1 = \nu(S, G_n^{л}, G_{n-1})$, *то:*

   а. $V_n(k, S) = V_n^{л}(k, S)$;

   б. $|V_n(k, S)| = |V_{n-1}(k-1, S_1)|$;

2. *Если* $S \subseteq \{G_n^{п}\}$ *и* $S_2 = \nu(S, G_n^{п}, G_{n-1})$, *то:*

   а. $V_n(k, S) = V_n^{л}(k, S) \cup V_n^{п}(k, S)$;

   б. $V_n^{л}(k, S) = V_n(k, \nu(S, G_n^{п}, G_n^{л}))$;

   в. $|V_n^{п}(k, S)| = |V_{n-1}(k, S_2)|$;

   г. $\nu(\nu(S, G_n^{п}, G_n^{л}), G_n^{л}, G_{n-1}) = S_2$;

3. *Если* $S \subseteq \{G_n^{лл}\}$ *и* $S_3 = \nu(S, G_n^{лл}, G_{n-2})$, *то:*

   а. $V_n(k, S) = V_n^{лл}(k, S)$;

   б. $|V_n(k, S)| = |V_{n-2}(k-2, S_3)|$;

4. *Если* $S \subseteq \{G_n^{лп}\}$, $S_4 = \nu(S, G_n^{лп}, G_{n-2})$, $P = \nu(S, G_n^{лп}, G_n^{пл})$, $P_1 = \nu(P, G_n^{пл}, G_{n-2})$, *то:*

   а. $V_n(k, S) = V_n^{лл}(k, S) \cup V_n^{лп}(k, S)$;

   б. $V_n^{лл}(k, S) = V_n(k, \nu(S, G_n^{лп}, G_n^{лл})$;

   в. $|V_n^{лп}(k, S)| = |V_{n-2}(k-1, S_4)|$;

   г. $V_n(k, P) = V_n^{лл}(k, P) \cup V_n^{пл}(k, P)$;

   д. $V_n^{лл}(k, P) = V_n(k, \nu(P, G_n^{п}, G_n^{л}))$;

   е. $|V_n^{пл}(k, P)| = |V_{n-2}(k-1, P_1)|$;

   ж. $\nu(P, G_n^{п}, G_n^{л}) = \nu(S, G_n^{лп}, G_n^{лл})$;

   з. $P_1 = S_4$;

5. *Если* $S \subseteq \{G_n^{пп}\}$ *и* $S_3 := \nu(S, G_n^{пп}, G_{n-2})$, *то*:

а. $V_n(k, S) = V_n^л(k, S) \cup V_n^{пл}(k, S) \cup V_n^{пп}(k, S)$;

б. $V_n^л(k, S) = V_n(k, \nu(S, G_n^п, G_n^л))$;

в. $V_n^{пл}(k, S) = V_n^{пл}(k, \nu(S, G_n^{пп}, G_n^{пл}))$;

г. $|V_n^{пп}(k, S)| = |V_{n-2}(k, S_3)|$.

Доказательство.

1а; 1б. Утверждения 1а и 1б леммы непосредственно следуют из леммы 23.

2а. Утверждение 2а следует из следствия 1.22 и из того факта, что все Δ_n-наборы принадлежат $\{G_n\}$.

2б. Как следует из леммы 22, каждый набор из $G_n^л$ содержит и никакой набор из $G_n^п$ не содержит числа 1.

В то же время каждый наднабор произвольного набора из S, содержащий 1, будет очевидно наднабором одного из $\Delta_n^{k_1+1}$-наднаборов, содержащих 1, наборов из S, где k_1—длина наборов из S.

Поэтому с учетом следствия 2.22 получаем

$$V_n^л(k, S) = V_n^л(k, \nu(S, G_n^п, G_n^л)). \tag{1}$$

Из п. 1а леммы 25 и (1) следует требуемое утверждение.

2в. Так как ни один наднабор наборов из S, принадлежащий $V_n^п(k, S)$, не содержит числа 1, то из леммы 24 п. 2 следует требуемое утверждение.

2г. Это утверждение непосредственно следует из изоморфизма $G_n^л$, $G_n^п$ и G_{n-1} (лемма 11, п. 1).

3а. 3б. Пусть $S_1 = \nu(S, G_n^л, G_{n-1})$.

Так как $S \subseteq \{G_n^{лл}\}$, то $S_1 \subseteq \{G_{n-1}^л\}$. Это следует из того, что при изоморфизме $G_n^л$ и G_{n-1} графу $G_n^{лл}$ соответствует граф $G_{n-1}^{лл}$ (лемма 11, п. 1). Из изоморфизма $G_n^{лл}$, $G_{n-1}^л$ и G_{n-2} (лемма 11, п. 1) следует, что $\nu(S_1, G_{n-1}^л, G_{n-2}) = \nu(S, G_n^{лл}, G_{n-2}) = S_2$.

Из п. 1 доказываемой леммы имеем:

$$V_{n-1}(l, S_1) = V_{n-1}^л(l, S_1), \tag{1}$$

$$|V_{n-1}(l, S_1))| = |V_{n-2}(l-1, S_2)|, \tag{2}$$

а также

$$|V_n(k, S)| = |V_{n-1}(k-1, S_1)|. \tag{3}$$

Положив $l = k-1$ из (2) и (3), получаем:

$$|V_n(k, S)| = |V_{n-2}(k-2, S_2)|,$$

т. е. утверждение 3б леммы 25.

Поскольку $G_n^{лл}$ и $G_{n-1}^{л}$ соответствуют друг другу при изоморфизме G_n и G_{n-1}, то из п. 2 леммы 23 и (1) следует, что

$$V_n(k, S) = V_n^{лл}(k, S),$$

т. е. утверждение 3а леммы 25.

4а. Так как $S \subseteq \{G_n^{лп}\}$, то $S \subseteq \{G_n^{л}\}$ и потому, согласно п. 1а леммы 25 имеем

$$V_n(k, S) = V_n^{л}(k, S). \qquad (1)$$

Применив следствие 1.22 к графу $G_n^{л}$, получаем

$$V_n^{л}(k, S) = V_n^{лл}(k, S) \cup V_n^{лп}(k, S). \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует утверждение 4а.

4б. Как следует из леммы 22, каждый набор из $G_n^{лл}$ содержит и никакой набор из $G_n^{лп}$ не содержит числа 2.

Рассуждая аналогично случаю 2б, получаем, что

$$V_n^{лл}(k, S) = V_n^{лл}(k, \nu(S, G_n^{лп}, G_n^{лл})). \qquad (1)$$

Из (1) и п. 3а леммы 25 следует утверждение 4б.

4в. Доказательство утверждения п. 4в леммы 25 аналогично доказательству п. 3б леммы 25.

4г; 4д; 4е. Согласно п. 2а леммы 25 имеем:

$$V_n(k, P) = V_n^{л}(k, P) \cup V_n^{п}(k, P). \qquad (1)$$

Так как $S \subseteq \{G_n^{пл}\}$, то $S \subseteq \{G_n^{п}\}$ и потому из п. 2б леммы 25 получаем, что

$$V_n^{л}(k, P) = V_n(k, \nu(P, G_n^{п}, G_n^{л})), \qquad (2)$$

а согласно п. 1а имеем:

$$V_n(k, \nu(P, G_n^{п}, G_n^{л})) = V_n^{л}(k, \nu(P, G_n^{п}, G_n^{л})). \qquad (2')$$

Все наборы из $\nu(P, G_n^{п}, G_n^{л})$ принадлежат $\{G_n^{лл}\}$. Это следует из п. 4а из 2в леммы 11. Поэтому из п. 3 леммы 25 получаем

$$V_n(k, \nu(P, G_n^{п}, G_n^{л})) = V_n^{лл}(k, \nu(P, G_n^{п}, G_n^{л})). \qquad (3)$$

Из (2) и (2′) следует, что при рассмотрении наднаборов наборов из P, принадлежащих $G_n^{л}$, мы можем вместо множества P рассматривать множество $\nu(P, G_n^{п}, G_n^{л})$.

Поэтому

$$V_n^{лл}(k, P) = V_n^{лл}(k, \nu(P, G_n^{п}, G_n^{л})). \qquad (4)$$

Из (2), (3) и (4) получаем:

$$V_n^{л}(k, P) = V_n^{лл}(k, P), \qquad (5)$$

$$V_n^{лл}(k, P) = V_n(k, \nu(P, G_n^{п}, G_n^{л})). \qquad (6)$$

Пусть $P_2 = \nu(P, G_n^{\text{п}}, G_{n-1})$. Тогда, согласно п. 2в леммы 25, имеем

$$|V_n^{\text{п}}(k, P)| = |V_n(k, P_2)|. \tag{7}$$

Из п. 2а леммы 11 следует, что все наборы из P_1 являются вершинами G_{n-1}. Поэтому на основании п. 2 леммы 25 можем написать

$$V_{n-1}(k, P_2) = V_{n-1}^{\text{л}}(k, P_2), \tag{8}$$

$$|V_{n-1}(k, P_2)| = |V_{n-2}(k-1, P_1)|. \tag{9}$$

При этом мы использовали тот факт, что

$$\nu(P_2, G_{n-1}^{\text{л}}, G_{n-2}) = P_1.$$

Так как графы $G_n^{\text{пл}}$ и $G_{n+1}^{\text{л}}$ соответствуют друг другу при изоморфизме графов $G_n^{\text{п}}$ и G_{n-1} (лемма 11, п. 1), то из (8) и п. 2 леммы 24 следует, что

$$V_n^{\text{п}}(k, P) = V_n^{\text{пл}}(k, P). \tag{10}$$

Из (7), (9) и (10) следует п. 4е леммы 25, из (1), (5) и (10) — п. 4г леммы 25, а (6) есть утверждение п. 4д леммы 25.

4ж; 4з. Пусть B произвольный набор из S, $|B| = k_1$,

$$\nu(\{B\}, G_n^{\text{лп}}, G_n^{\text{пл}}) = B_1.$$

Так как $S \subseteq \{G_n^{\text{лп}}\}$, то $B \in \{G_n^{\text{лп}}\}$ и, согласно п. 2г леммы 11, может быть представлен в следующем виде: $B = \Gamma_n^{k_1}(t)$, где

$$G_{n-2}^{k_1-2} + 1 \leqslant t \leqslant C_{n-1}^{k_1-1}.$$

Как следствие изоморфизма графов $G_n^{\text{лп}}$, $G_n^{\text{пл}}$, G_{n-2} и определения множества P непосредственно получаем утверждение п. 4з леммы 25, а с учетом п. 3б2, 3б3 леммы 11 получаем, что

$$B_1 = \nu(\{B\}, G_n^{\text{лп}}, G_n^{\text{пл}}) = \Gamma_n^{k_1}(t + C_{n-2}^{k_1-1}). \tag{1}$$

Тогда из (1), п. 4б и п. 4а леммы 11 следует, что

$$\nu(\{B\}, G_n^{\text{лп}}, G_n^{\text{лл}}) = \{\Gamma_n^{k_1+1}(t - C_{n-2}^{k_1-2})\} = \nu(\{B_1\}, G_n^{\text{п}}, G_n^{\text{л}}),$$

что, вследствии произвольности выбора элемента B и определения множества P, приводит к утверждению 4ж леммы 25.

5а. Так как $S \subseteq \{G_n^{\text{пп}}\}$, то $S \subseteq \{G_n^{\text{п}}\}$ и потому на основании п. 2а леммы 25 имеем:

$$V_n(k, S) = V_n^{\text{л}}(k, S) \cup V_n^{\text{п}}(k, S),$$

а с учетом следствия 1.22 получаем:

$$V_n(k, S) = V_n^{\text{л}}(k, S) \cup V_n^{\text{пл}}(k, S) \cup V_n^{\text{пп}}(k, S).$$

5б. Утверждение 5б леммы 25 есть частный случай п. 2б леммы 25.

5в; 5г. Пусть $S_2 = \nu(S, G_n^{\text{п}}, G_{n-1})$. Поскольку $S \subseteq \{G_n^{\text{пп}}\}$, то из п. 1 леммы 11 следует, что $S_2 \subseteq \{G_{n-1}^{\text{п}}\}$, а потому, для графа G_{n-1} на основании п. 2б, п. 2в леммы 25 и равенства

$$S_5 = \nu(S, G_n^{\text{пп}}, G_{n-2}) = \nu(S_2, G_{n-1}^{\text{п}}, G_{n-2}),$$

получаем:

$$V_{n-1}^{\text{л}}(k, S_2) = V_{n-1}(k, \nu(S_2, G_{n-1}^{\text{п}}, G_{n-1}^{\text{л}})), \tag{1}$$

$$|V_{n-1}^{\text{п}}(k, S_2)| = |V_{n-2}(k, S_5)|. \tag{2}$$

Так как при изоморфизме $G_n^{\text{п}}$ и G_{n-1} графы $G_n^{\text{пл}}$ и $G_n^{\text{пп}}$ соответствуют соответственно графам $G_{n-1}^{\text{л}}$ и $G_{n-1}^{\text{п}}$, то на основании п. 2 леммы 24, (1) и (2) получаем, что

$$V_n^{\text{пл}}(k, S) = V_n^{\text{пл}}(k, \nu(S, G_n^{\text{пп}}, G_n^{\text{пл}})),$$

$$|V_{n-1}^{\text{пп}}(k, S)| = |V_{n-2}(k, S_5)|,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 25 доказана.

Лемма 26. *Если S — произвольное множество правых вершин k_1-яруса Δ_n^0-графа G_n, $T^* = \{\Gamma_n^{k_1}(C_{n-1}^{k_1-1} + 1), \ldots, \Gamma_n^{k_1}(C_{n-1}^{k_1-1} + m)\}$, где $0 \leqslant k_1 \leqslant n$, $m = |S|$, и для вершин $\Delta_{n-1}^{(0)}$-графа G_{n-1} справедлива лемма 19, то*

$$N_{k_2}^0(T^*) \leqslant N_{k_2}^0(S), \tag{1}$$

где $k_1 \leqslant k_2 \leqslant n$.

Доказательство.

Из п. 2б леммы 11 следует, что $T^* \subseteq \{G_n^{\text{п}}\}$. Поэтому, используя п. 2а леммы 25 для множеств S и T^*, получаем, что

$$N_{k_2}^0(T^*) = |V_n(k_2, T^*)| = |V_n^{\text{л}}(k_2, T^*)| + |V_n^{\text{п}}(k_2, T^*)|, \tag{2}$$

$$N_{k_2}^0(S) = |V_n(k_2, S)| = |V_n^{\text{л}}(k_2, S)| + |V_n^{\text{п}}(k_2, S)|. \tag{3}$$

Пусть $S' = \nu(S, G_n^{\text{п}}, G_{n-1})$ и $T' = \nu(T^*, G_n^{\text{п}}, G_{n-1})$.

Из п. 2б леммы 25 получаем

$$V_n^{\text{л}}(k, S) = V_n(k, \nu(S, G_n^{\text{п}}, G_n^{\text{л}})), \tag{4}$$

затем из (4) и п. 1б леммы 25 получаем

$$|V_n^{\text{л}}(k, S)| = |V_{n-1}(k-1, \nu(\nu(S, G_n^{\text{п}}, G_n^{\text{л}})), G_n^{\text{л}}, G_{n-1})|, \tag{5}$$

и, окончательно, из (5) и п. 2г леммы 25 получаем

$$|V_n^{\text{л}}(k, S)| = |V_{n-1}(k-1, S')|. \tag{6}$$

Согласно п. 2в леммы 25 имеем, что

$$|V^{п}_{n}(k,\ S)|=|V_{n-1}(k,\ S')|. \tag{7}$$

Аналогично, для множества T^* получаем, что

$$|V^{л}_{n}(k,\ T^*)|=|V_{n-1}(k-1,\ T')|, \tag{8}$$

$$|V^{п}_{n}(k,\ T^*)|=|V_{n-1}(k,\ T')|. \tag{9}$$

Так как $\tilde{T}^*$ — + -уплотненная последовательность и $\Gamma^{k_1}_{n}(C^{k_1-1}_{n-1}+1)\in$ $\in T^*$, то из п. 5 леммы 6* и п. 3а2 леммы 11 получаем, что $\tilde{T}'$ является + уплотненной последовательностью Δ^{k}_{n-1}-наборов и $\Gamma^{k}_{n-1}(1)\in T'$.

Ясно также, что $|T'|=|S'|$. Поэтому на основании нашего предположения о справедливости леммы 19 для Δ^{0}_{n-1}-графов мы получаем, что

$$|V_{n-1}(k,\ T')|\leqslant|V_{n-1}(k,\ S')|. \tag{10}$$

Из (2), (3), (6), (8), (9) и (10) следует (1).

Лемма 26 доказана.

Лемма 27. *Если P и R — произвольные множества, соответственно левых и правых вершин k_1-яруса Δ^{0}_{n}-графа G_n,*

$P^*=\{\Gamma^{k_1}_{n}(1),\ \ldots,\ \Gamma^{k_1}_{n}(m_1)\}$, $\quad R^*=\{\Gamma^{k_1}_{n}(C^{k_1-1}_{n-1}+1),\ \ldots,\ \Gamma^{k_1}_{n}(C^{k_1-1}_{n-1}+m_2)\}$, *где $0\leqslant k\leqslant n$, $m_1=|P|$, $m_2=|R|$, и для вершин $\Delta^{(0)}_{n-1}$-графа G_{n-1} справедлива лемма 19, то*

$$N^{0}_{k_2}(P^*\cup R^*)\leqslant N^{0}_{k_2}(P\cup R), \tag{11}$$

где $k_1\leqslant k_2\leqslant n$.

Доказательство.

Введем следующие обозначения.

Пусть

$$P_1=\nu(P,\ G^{л}_{n},\ G_{n-1}),\quad P^*_1=\nu(P^*,\ G^{л}_{n},\ G_{n-1}),\quad R_1=\nu(R,\ G^{п}_{n},\ G_{n-1}),$$

$$R^*_1=\nu(R^*,\ G^{п}_{n},\ G_{n-1}),\quad R_2=\nu(R,\ G^{п}_{n},\ G^{л}_{n}),\quad R^*_2=\nu(R^*,\ G^{п}_{n},\ G^{л}_{n}).$$

На основе формулы «включения-исключения» (см. доказательство следствия 2 теоремы 1) для множеств P и R получаем, что

$$N^{0}_{k_2}(P\cup R)=|V_n(k_2,\ P)|+|V_n(k_2,\ R)|-|V_n(k_2,\ P)\cap V_n(k_2,\ R)|. \tag{12}$$

Так как $P\subseteq\{G^{л}_{n}\}$, $R\subseteq\{G^{п}_{n}\}$, то выражение (12) с учетом п. 1а, 2а, 2б леммы 25 приводится к следующему виду

$$N^{0}_{k_2}(P\cup R)=|V^{л}_{n}(k_2,\ P)|+|V^{л}_{n}(k_2,\ R_2)|+|V^{п}_{n}(k_2,\ R)|-$$

$$-|V^{л}_{n}(k_2,\ P)\cap V^{л}_{n}(k_2,\ R_2)|. \tag{13}$$

Из (13) на основе формулы «включения-исключения» получаем:

$$N^0_{k_2}(P \cup R) = |V^л_n(k_2, P) \cup V^л_n(k_2, R_2)| + |V^п_n(k_2, R)|. \qquad (14)$$

Рассмотрим множества P^* и R^*_2.

Так как $\mathring{R}^*$ — $+$-уплотненная последовательность наборов и $\Gamma^{k_1}_n(C^{k_1-1}_{n-1}+1) \in \{R^*\}$, то $\mathring{R}^*_2$ будет также $+$уплотненной и $\Gamma^{k_1+1}_n(1) \in \{R^*_2\}$. Это следует из п. 5 леммы 6* и п. 4а леммы 11.

Поэтому из следствия 1.21 следует, что множества $V^п_n(k_2, P^*)$ и $V^л_n(k_2, R^*_2)$ будут совпадать с множеством наборов своих k_2-продолжений. При этом, как следует из леммы 14, k_2-продолжения P^* и R^*_2 будут $+$-уплотненными и будут включать в себя набор $\Gamma^{k_2}_n(1)$.

Отсюда следует, что при каждом k_2 либо

$$V^л_n(k_2, P^*) \subseteq V^л_n(k_2, R^*_2), \qquad (15)$$

либо

$$V^л_n(k_2, R^*_2) \subseteq V^л_n(k_2, P^*). \qquad (16)$$

При фиксированном k_2 рассмотрим каждый из этих случаев. Пусть выполняется (15). Тогда

$$|V^л_n(k_2, P^*) \cup V^л_n(k_2, R^*_2)| = |V^л_n(k_2, R^*_2)|. \qquad (17)$$

Из (14) имеем, что

$$N^0_{k_2}(P \cup R) \geqslant |V^л_n(k_2, R_2)| + |V^п_n(k_2, R)|. \qquad (18)$$

Используя п. 2г, 1а и 2в леммы 25, из (18) получаем

$$N^0_{k_2}(P \cup R) \geqslant |V_{n-1}(k_2-1, R_1)+|V_{n-1}(k_2, R_1)|.$$

Из п. 5 леммы 6* и п. 3а1 леммы 11 следует, что последовательность $\mathring{R}^*_1$ $+$-уплотненная и включает набор $\Gamma^{k_1-1}_{n-1}(1)$.

Поэтому на основании нашего предположения о справедливости леммы 19 для Δ^0_{n-1} -графов мы получаем, что

$$|V_{n-1}(k_2, R^*_1)| \leqslant |V_{n-1}(k_2, R_1)|. \qquad (19)$$

Из (18) и (19) получаем

$$N^0_{k_2}(P \cup R) \geqslant |V_{n-1}(k_2-1, R^*_1)| + |V_{n-1}(k_2, R^*_1)|$$

или, сделав обратный переход к множествам R^* и R^*_2, получаем

$$N^0_{k_2}(P \cup R) \geqslant |V^л_n(k_2, R^*_2)| + |V^п_n(k_2, R^*)|. \qquad (20)$$

Из (20), используя (17), получаем

$$N^0_{k_2}(P \cup R) \geqslant |V^л_n(k_2, P^*) \cup V^л_n(k_2, R^*_2)| + |V^п_n(k_2, R^*)| =$$

$$= N^0_{k_2}(P^* \cup R^*),$$

т. е. требуемое неравенство (11).

Пусть теперь выполняется (16). Тогда

$$|V_n^{\text{л}}(k_2, P^*) \cup V_n^{\text{л}}(k_2, R_2^*)| = |V_n^{\text{л}}(k_2, P^*)|. \qquad (21)$$

На основе (14) имеем, что

$$N_{k_2}^0(P \cup R) \geqslant |V_n^{\text{л}}(k_2, P)| + |V_n^{\text{п}}(k_2, R)|. \qquad (22)$$

Рассуждая аналогично предыдущему случаю, из (22) получаем

$$N_{k_2}^0(P \cup R) \geqslant |V_n^{\text{л}}(k_2, P^*)| + |V_n^{\text{п}}(k_2, R^*)|,$$

откуда, используя (21), вновь приходим к (11). Лемма 27 доказана.

Доказательство леммы 19.

Утверждение леммы 19 сформулируем следующим образом: для натуральных чисел $n, k_1, k_2, m, j_1, \ldots, j_m$, если $0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant n$,

$$1 \leqslant m \leqslant C_n^{k_1}, \ j_1, \ldots, \ j_m \in \{1, \ldots, C_n^{k_1}\}, \quad j_1 \neq j_2 \neq \ldots \neq j_m,$$

$$S^* = \{\Gamma_n^{k_1}(1), \ldots, \Gamma_n^{k_1}(m)\}, \qquad S = \{\Gamma_n^{k_1}(j_1), \ldots, \Gamma_n^{k_1}(j_m)\},$$

то

$$N_{k_2}^0(S^*) \leqslant N_{k_2}^0(S). \qquad (1)$$

При $k_1 = 0$, или $k_1 = k_2$, или $k_2 = n$ лемма очевидна.

Пусть $0 < k_1 < k_2 < n$.

Доказательство проводим индукцией по параметру n.

При $n = 0, 1, 2$ в справедливости леммы убеждаемся непосредственной проверкой.

Пусть лемма верна при значениях n, равных $t-2$ и $t-1$, где $t \geqslant 3$.

Покажем, что лемма будет верна и при $n = t$.

Введенное индуктивное предположение означает, что лемма верна для случаев, когда последовательности $\overset{\circ}{S}$ и $\overset{\circ}{S}{}^*$ принадлежат k_1-ярусу $\Delta_n^{(0)}$-графа G_n при $n \in \{t-2, t-1\}$. Нам надо убедиться в справедливости леммы в случае, когда S и S^* принадлежат k_1-ярусу $\Delta_t^{(0)}$-графа G_t. Для доказательства леммы в случае $n = t$ мы разобьем множество всех возможных случаев, определяемых расположением множества S в k_1-ярусе G_t и величиной параметра m, на подмножества, задаваемые следующим образом:

1а. $S \subseteq \{G_t^{\text{л}}\}, \quad 1 \leqslant m \leqslant C_{t-1}^{k_1-1};$

1б. $S \subseteq \{G_t^{\text{п}}\}, \quad 1 \leqslant m \leqslant C_{t-1}^{k_1-1};$

1в. $S = P \cup R, \quad P \subseteq \{G_t^{\text{л}}\}, \quad R \subseteq \{G_t^{\text{п}}\}, \quad |P| = m_1,$

$|R| = m_2, \quad m_1 + m_2 = m, \quad 1 \leqslant m \leqslant C_{t-1}^{k_1-1};$

2. $C_{t-1}^{k_1-1} + 1 \leqslant m \leqslant C_t^{k_1}.$

Легко видеть, что данное разбиение является исчерпывающим. Рассмотрим каждый случай в отдельности (рис. 11).

1а. Пусть $S_1 = \nu(S,\ G_t^a,\ G_{t-1})$ и $S_1^{\bullet} = \nu(S^*,\ G_t^a,\ G_{t-1})$.

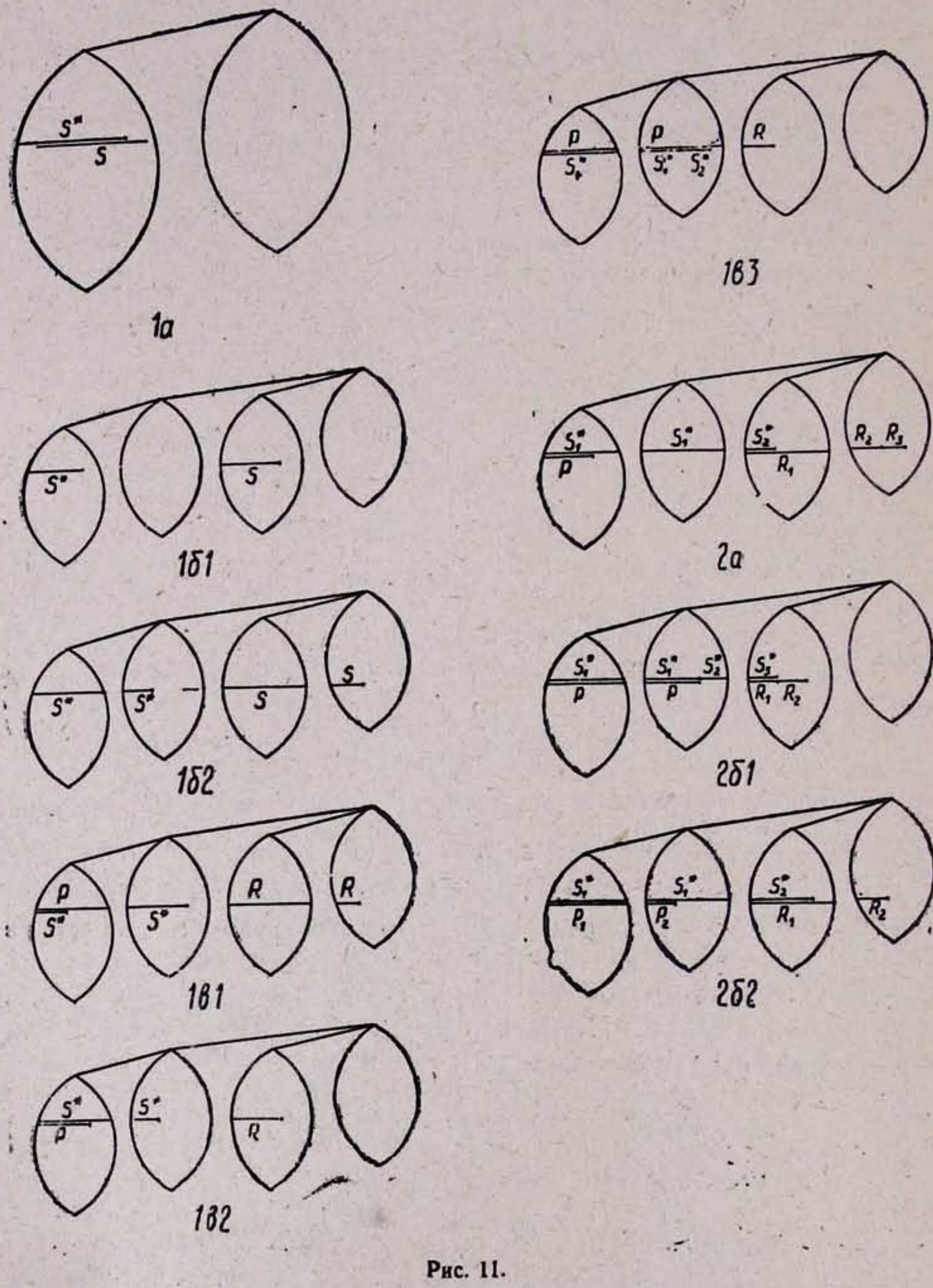

Рис. 11.

Так как $\overset{\circ}{S^*}$ — $+$-уплотненная последовательность и $\Gamma_l^{k_2}(1) \in \{S^*\}$, то из п. 5 леммы 6* и п. 3а1 леммы 11 получаем, что $\overset{\circ}{S_1^*}$ будет $+$-уплотненной последовательностью и $\Gamma_{l-1}^{k_2-1}(1) \in \{S_1^*\}$.

Поэтому на основе нашего индуктивного предположения можно написать, что

$$|V_{l-1}(k_2-1,\ S_1^*) \leqslant |V_{l-1}(k_2-1,\ S_1)|,$$

откуда, используя утверждение п. 1б леммы 25, приходим к (1).

1б. Из леммы 26 следует, что случай 1б достаточно рассмотреть для $S = \{\Gamma_l^{k_2}(C_{l-1}^{k_2-1}+1), \ldots, \Gamma_l^{k_2}(C_{l-1}^{k_2-1}+m)\}$.

Случай 1б разобьем на следующие подслучаи:

1б1. $1 \leqslant m \leqslant C_{l-2}^{k_2-1}$,

1б2. $C_{l-2}^{k_2-1} \leqslant m \leqslant C_{l-1}^{k_2-1}$,

1б1. Согласно п. 2д леммы 11, в этом случае $S \subseteq \{G_l^{\text{пл}}\}$.

Пусть $S_1 = \nu(S,\ G_l^{\text{пл}},\ G_l^{\text{лп}})$.

Из п. 4 леммы 25 следует, что

$$|V_l(k_2,\ S)| = |V\ (k_2,\ S_1)|, \tag{2}$$

Но S_1 удовлетворяет условиям случая 1а.

Поэтому, согласно доказанному,

$$|V_l(k_2,\ S^*)| \leqslant |V_l(k_2,\ S_1)|. \tag{3}$$

Из (3) и (2) получаем (1).

1б2. Пусть $T = \{\Gamma_l^{k_2}(C_{l-1}^{k_2-1}+1), \ldots, \Gamma_l^{k_2}(C_{l-1}^{k_2-1}+C_{l-2}^{k_2-1})\}$.

Ясно, что

$$N_{k_2}^0(T) \leqslant N_{k_2}^0(S). \tag{4}$$

Из п. 2д леммы 11 следует, что $T \subseteq \{G_l^{\text{пл}}\}$.

Пусть $S_1^* = \nu(S^*,\ G_l^{\text{л}},\ G_{l-1})$, $T_1 = \nu(T,\ G_l^{\text{пл}},\ G_{l-2})$.

Согласно п. 1б леммы 25 имеем, что

$$|V_l(k_2,\ S^*)| = |V_{l-1}(k_2-1,\ S_1^*)|. \tag{5}$$

Ясно, что

$$|V_{l-1}(k_2-1,\ S_1^*)| \leqslant C_{l-1}^{k_2-1}. \tag{6}$$

Для множества T, используя утверждения п. 3 и 4 леммы 25, получаем

$$|V_l(k_2,\ T)| = |V_{l-2}(k_2-1,\ T_1)| + |V_{l-2}(k_2-2,\ T_1)|. \tag{7}$$

Ясно, что

$$|T_1| = |T| = C_{l-2}^{k_2-1},$$

т. е. T_1 содержит все наборы (k_1-1)-яруса Δ^0_{l-2}-графа G_{l-2}. Следовательно,

$$|V_{l-2}(k_2-1,\ T_1)|=C_{l-2}^{k_2-1}. \tag{8}$$

Из (7) и (8) получаем, что

$$|V_l(k_2,\ T)|=C_{l-2}^{k_2-1}+C_{l-2}^{k_2-2}=C_{l-1}^{k_2-1}. \tag{9}$$

Из (5), (6) и (9) следует, что

$$|V_l(k_2,\ S^*)|\leqslant|V_l(k_2,\ T)|.$$

Последнее неравенство и неравенство (4) приводят к (1).

Iв. Из леммы 27 следует, что случай Iв достаточно рассмотреть для таких множеств P и R, которые имеют следующий вид:

$$P=\{\Gamma_l^{k_1}(1),\dots,\Gamma_l^{k_1}(m_1)\};\ \ R=\{\Gamma_l^{k_1}(C_{l-1}^{k_1-1}+1),\dots,\Gamma_l^{k_1}(C_{l-1}^{k_1-1}+m_2)\}.$$

Разобьем случай Iв на следующие подслучаи:

Iв1. $m_2\geqslant C_{l-2}^{k_1-1}$;

Iв2. $m_2<C_{l-2}^{k_1-1}$ и $m_1\leqslant C_{l-2}^{k_1-2}$;

Iв3. $m_2<C_{l-2}^{k_1-1}$ и $m_1>C_{l-2}^{k_1-2}$.

Рассмотрим эти случаи.

Iв1. Пусть $T=\{\Gamma_l^{k_1}(C_{l-1}^{k_1-1}+1),\dots,\Gamma_l^{k_1}(C_{l-1}^{k_1-1}+C_{l-2}^{k_1-1})\}$.

Рассуждая так же, как и в случае Iб2, последовательно получаем:

$$N^0_{k_2}(S)=N^0_{k_2}(P\cup R)\geqslant N^0_{k_2}(R)\geqslant N^0_{k_2}(T),$$

$$N^0_{k_2}(T)=C_{l-1}^{k_2-1},$$

$$N^0_{k_2}(S^*)\leqslant C_{l-1}^{k_2-1},$$

откуда следует (1).

Iв2. Из п. 2д леммы 11 следует, что в этом случае $R\subseteq\{G_l^{\text{пл}}\}$.

Пусть $R_1=\nu(R,\ G_l^{\text{пл}},\ G_l^{\text{лп}})$, $S_1^*=\nu(S^*,\ G_l^{л},\ G_{l-1})$, $S_1=\nu(P\cup R_1,\ G_l^{л},\ G_{l-1})$.

На основе формулы «включения-исключения» для множеств P и R соответственно P и R_1 получаем, что

$$N^0_{k_2}(P\cup R)=|V_l(k_2,\ P)|+|V_l(k_2,\ R)|-|V_l(k_2,\ P)\cap V_l(k_2,\ R)|, \tag{10}$$

$$N^0_{k_2}(P\cup R_1)=|(V_l(k_2,\ P)|+|V_l(k_2,\ R_1)|-|V_l(k_2,\ P)\cap V_l(k_2,\ R_1)|. \tag{11}$$

Так как $P\subseteq\{G_l^{\text{лл}}\}$, то с учетом утверждений п. 2 и 3 леммы 25 из (10) и (11) получаем:

$$N^0_{k_2}(P\cup R)=|V_l^{\text{лл}}(k_2,\ P)|+|V_l^{\text{лл}}(k_2,\ R)|+|V_l^{\text{пл}}(k_2,\ R)|-$$
$$-|V_l^{\text{лл}}(k_2,\ P)\cap V_l^{\text{лл}}(k_2,\ R)|, \tag{12}$$

$$N^0_{k_2}(P\cup R_1)=|V_l^{\text{лл}}(k_2,\ P)|+|V_l^{\text{лл}}(k_2,\ R_1)|+|V_l^{\text{лп}}(k_2,\ R_1)|-$$
$$-|V_l^{\text{лл}}(k_2,\ P)\cap V_l^{\text{лл}}(k_2,\ R_1)|. \tag{13}$$

Так как $R_1 = \nu(R, G_l^{пл}, G_l^{лп})$, то, используя утверждения п. 4 леммы 25, получаем:

$$V_l^{лл}(k_2, R) = V_l^{лл}(k_2, R_1),$$

$$|V_l^{пл}(k_2, R)| = |V_l^{лп}(k_2, R_1)|.$$

Это с учетом (12) и (13) означает, что

$$N_{k_2}^0(P \cup R) = N_{k_2}^0(P \cup R_1). \tag{14}$$

Согласно п. 1б леммы 25 для множеств S^* и $P \cup R_1$ имеем, что

$$N_{k_2}^0(S^*) = |V_{l-1}(k_2 - 1, S_1^*)|, \tag{15}$$

$$N_{k_2}^0(P \cup R_1) = |V_{l-1}(k_2 - 1, S_1)|. \tag{16}$$

Так как $\mathring{S}^*$ — $+$-уплотненная последовательность и $\Gamma_l^{k_1}(1) \in S^*$, то из п. 5 леммы 6* и п. 3а1 леммы 11 следует, что $\mathring{S}_1^*$ также $+$-уплотненная последовательность и $\Gamma_{l-1}^{k_1-1}(1) \in S_1^*$. Следовательно, на основании индуктивного предположения имеем, что

$$|V_{l-1}(k_2 - 1, S_1^*)| \leqslant |V_{l-1}(k_2 - 1, S_1)|,$$

откуда с учетом (14), (15) и (16) приходим к (1).

Iв3. Множество S^* представим в следующем виде: $S^* = S_1^* \cup S_2^*$, где $S_1^* = P$ и $S_2^* = \{\Gamma_l^{k_1}(m_1 + 1), \ldots, \Gamma_l^{k_1}(m)\}$.

Так как $\mathring{S}^*$ — $+$-уплотненная последовательность и $\Gamma_l^{k_1}(1) \in S^*$, то из следствия 1. 21 имеем, что

$$N_{k_2}^0(S^*) = \psi_{k_2}(S^*),$$

откуда с использованием леммы 17 и повторным применением следствия 1.21 получаем:

$$N_{k_2}^0(S^*) = N_{k_2}^0(S_1^*) + \psi_{k_2}(S_2^*). \tag{17}$$

Используя формулу «включения-исключения» для множеств P и R, получаем:

$$N_{k_2}^0(P \cup R) = |V_l(k_2, P)| + |V_l(k_2, R)| - |V_l(k_2, P) \cap V_l(k_2, R)|. \tag{18}$$

Так как $P \subseteq \{G_l^{л}\}$, $R \subseteq \{G_l^{пл}\}$ (лемма 11, п. 2а и п. 2д), то с учетом утверждений п. 1а и п. 4г леммы 25, из (18) получаем:

$$N_{k_2}^0(P \cup R) = |V_l^{л}(k_2, P)| + |V_l^{лл}(k_2, R)| + V_l^{пл}(k_2, R)| -$$

$$- |V_l^{л}(k_2, P) \cap V_l^{лл}(k_2, R)|. \tag{19}$$

Так как $m_1 = |P| > C_{l-2}^{k_1-2}$ и, следовательно, $\{\Gamma_l^{k_1}(1), \ldots, \Gamma_l^{k_1}(C_{l-2}^{k_1-2})\} \subseteq P$, то легко получить, что для каждого k_2 все $\Delta_l^{k_2}$ — наднаборы, принадлежащие $\{G_l^{лл}\}$, будут также $\Delta_l^{k_2}$-наднаборами некоторых наборов из P. Поэтому $V_l^{лл}(k_2, R) \subseteq V_l^{л}(k_2, P)$ и $N_{k_2}^0(P \cup R) = |V_l^{л}(k_2, P)| + |V_l^{пл}(k_2, R)|$, или

$$N_{k_2}^0(P \cup R) = N_{k_2}^0(P) + |V_l^{пл}(k_2, R)|. \tag{20}$$

Так как $m_1 > C_{l-2}^{k_1-2}$ и $m \leqslant C_{l-1}^{k_1-1}$, то из п. 2г леммы 11 следует, что $S_2^* \subseteq \{G_l^{\text{зп}}\}$.

Пусть $S_3^* = \nu(S_2^*, G_l^{\text{зп}}, G_{l-2})$ и $R_1 = \nu(R, G_l^{\text{пл}}, G_{l-2})$.

Из следствий 1.10 и 1.6* получаем, что

$$\psi_{k_2}(S_2^*) = \psi_{k_2-1}(S_3^*), \tag{21}$$

а согласно п. 4е леммы 25 имеем, что

$$|V_l^{\text{пл}}(k_2, R)| = |V_{n-2}(k_2 - 1, R_1)|. \tag{22}$$

Заметим, что при использовании следствий 1.10 и 1.6* случаи, когда среди рассматриваемых наборов находятся корни графов, мы особо не выделяем, ввиду тривиальности их разбора.

Так как $\overset{\circ}{R}$ — $+$-уплотненная последовательность и $\Gamma_l^{k_1}(C_{l-1}^{k_1-1}+1) \in R$, то из п. 5 леммы 6* и п. 3б3 леммы 11 следует, что $\overset{\circ}{R}_1$ также будет $+$-уплотненной и $\Gamma_{n-2}^{k_1-1}(1) \in R_1$.

Легко видеть, что $|R_1| = |S_3^*|$ и наборы из R_1 и S_3^* имеют одинаковую длину.

Поэтому из леммы 8* получаем, что

$$\psi_{k_2-1}(R_1) \geqslant \psi_{k_2-1}(S_3^*), \tag{23}$$

а из следствия 1.21 получаем, что

$$\psi_{k_2-1}(R_1) = |V_{n-2}(k_2-1, R_1)|. \tag{24}$$

Из (23) с учетом (24), (22) и (21) получаем:

$$\psi_{k_2}(S_2^*) \leqslant |V_l^{\text{пл}}(k_2, R)|. \tag{25}$$

Так как $P = S_1^*$, то из (17), (20) и (25) следует (1).

Итак, случай 1 полностью разобран.

Рассмотрим случай 2. В этом случае справедливо неравенство: $C_{l-1}^{k_1-1} + 1 \leqslant m \leqslant C_l^{k_1}$. Это означает (см. п. 2а леммы 11), что множеству S принадлежат как левые, так и правые вершины графа G_l. Поэтому множество S можно разбить на два подмножества P и R, такие, что $P \subseteq \{G_l^{\text{л}}\}$, $R \subseteq \{G_l^{\text{п}}\}$ и $P \cup R = S$.

Пусть $|P| = m_1$, $|R| = m_2$. Ясно, что $m_1 < C_{l-1}^{k_1-1}$.

Из леммы 27 следует, что рассмотрение случая 2 достаточно провести для $P = \{\Gamma_l^{k_1}(1), \ldots, \Gamma_l^{k_1}(m_1)\}$,

$$R = \{\Gamma_l^{k_1}(C_{l-1}^{k_1-1}+1), \ldots, \Gamma_l^{k_1}(C_{l-1}^{k_1-1}+m_2)\}.$$

В зависимости от параметра m_1 случай 2 разобьем на следующие подслучаи:

2а. $1 \leqslant m_1 \leqslant C_{l-2}^{k_1-2}$,

2б. $C_{l-2}^{k_1-2} < m_1 \leqslant C_{l-1}^{k_1-1}$.

Рассмотрим каждый из этих случаев.

Обозначим через r разность $m_1 - C_{l-1}^{k_1-1}$. Ясно, что $r > 0$.

2а. Обозначим через x разность $C_{l-2}^{k_1-2} - m_1$.

Выразим параметр m_2 через r и x:

$$m_2 = m - m_1 = (r + C_{l-1}^{k_1-1}) - (C_{l-2}^{k_1-2} - x) = r + x + C_{l-2}^{k_1-1}. \qquad (26)$$

Множества S^* и R представим в следующем виде:

$$S^* = S_1^* \cup S_2^*,$$

где

$$S_1^* = \{\Gamma_l^{k_1}(1), \ldots, \Gamma_l^{k_1}(C_{l-1}^{k_1-1})\},$$

$$S_2^* = \{\Gamma_l^{k_1}(C_{l-1}^{k_1-1} + 1), \ldots, \Gamma_l^{k_1}(C_{l-1}^{k_1-1} + r)\},$$

$$R = R_1 \cup R_2 \cup R_3,$$

где

$$R_1 = \{\Gamma_l^{k_1}(C_{l-1}^{k_1-1} + 1), \ldots, \Gamma_l^{k_1}(C_{l-1}^{k_1-1} + C_{l-2}^{k_1-1})\},$$

$$R_2 = \{\Gamma_l^{k_1}(C_{l-1}^{k_1-1} + C_{l-2}^{k_1-1} + 1), \ldots, \Gamma_l^{k_1}(C_{l-1}^{k_1-1} + C_{l-2}^{k_1-1} + r)\},$$

$$R_3 = \{\Gamma_l^{k_1}(C_{l-1}^{k_1-1} + C_{l-2}^{k_1-1} + r + 1), \ldots, \Gamma_l^{k_1}(C_{l-1}^{k_1-1} + C_{l-2}^{k_1-1} + r + x)\}.$$

Так как $m > C_{l-1}^{k_1-1}$ и справедливо (26), то S^* и R можно представить в указанном виде.

Так же, как и в случае 1в3, для множества S^* можно написать выражение, аналогичное (17), т. е.

$$N_{k_2}^0(S^*) = N_{k_2}^0(S_1^*) + \psi_{k_2}(S_2^*). \qquad (27)$$

При этом, так как $|S_1^*| = C_{l-1}^{k_1-1}$ и $S_1^* \subseteq \{G_l^{\text{л}}\}$, то, используя утверждения п. 2б леммы 25 и п. 3а1 леммы 11, получаем, что

$$N_{k_2}^0(S_1^*) = C_{l-1}^{k_1-1}. \qquad (28)$$

Из п. 2 леммы 11 следует, что $R_1 \subseteq \{G_l^{\text{пл}}\}$, $R_2 \subseteq \{G_l^{\text{пп}}\}$.

Пусть $R_2' = \nu(R_2, G_l^{\text{п}}, G_l^{\text{л}})$. Из п. 4а леммы 11 получаем, что $R_2' = \{\Gamma_l^{k_1+1}(C_{l-2}^{k_1-1} + 1), \ldots, \Gamma_l^{k_1+1}(G_{l-2}^{k_1-1} + r)\}$, а из п. 2г той же леммы следует, что $R_2' \subseteq \{G_l^{\text{лп}}\}$.

Используя утверждения п. 4г, п. 5а, п. 5б леммы 25, для множеств R_1 и R_2 получаем:

$$V_l(k_2, R_1) = V_l^{\text{лл}}(k_2, R_1) \cup V_l^{\text{пл}}(k_2, R_1), \qquad (29)$$

$$V_l(k_2, R_2) \supseteq (V_l^{\text{л}}(k_2, R_2) \cup V_l^{\text{пп}}(k_2, R_2) =$$

$$= (V_l(k_2, R_2') \cup V_l^{\text{пп}}(k_2, R_2)) \supseteq (V_l^{\text{лп}}(k_2, R_2') \cup V_l^{\text{пп}}(k_2, R_2)). \qquad (30)$$

Так как

$$V_l(k_2, P \cup R) \supseteq V_l(k_2, R) \supseteq (V_l(k_2, R_1) \cup V_l(k_2, R_2)), \qquad (31)$$

то, подставив (29) и (30) в (31), получаем:

$$N_{k_2}^0(P \cup R) \geqslant |V_l^{\text{лл}}(k_2, R_1)| + |V_l^{\text{пл}}(k_2, R_1)| + |V_l^{\text{лп}}(k_2, R_2')| +$$

$$+ |V_l^{\text{пп}}(k_2, R_2)| = |V_l(k_2, R_1)| + |V_l^{\text{лп}}(k_2, R_2')| + |V_l^{\text{пп}}(k_2, R_2)|. \qquad (32)$$

Так же, как в случае 1б2, для множества R_1 получаем, что

$$|V_l(k_2, R_1)| = C_{l-1}^{k_1-1}. \tag{33}$$

Пусть $R_2^* = \nu(R_2', G_l^{лп}, G_l^{пл})$. Ясно, что $R_2^* = \nu(R_2, G_l^{пп}, G_l^{пл})$.

Используя п. 4в леммы 11, получаем, что

$$R_2^* = \{\Gamma_l^{k_1+1}(C_{l-1}^{k_1}+1), \ldots, \Gamma_l^{k_1+1}(C_{l-1}^{k_1}+r)\}.$$

Из п. 4в, п. 4е и п. 4з леммы 25 следует, что

$$|V_l^{лп}(k_2, R_2')| = |V_l^{пл}(k_2, R_2^*)|. \tag{34}$$

Пусть $T_1 = \nu(S_2^*, G_l^{п}, G_{l-1})$, $T_2 = \nu(R_2^*, G_l^{п}, G_{l-1})$ и $T_3 = \nu(R_2, G_l^{п}, G_{l-1})$.

Используя п. 3а2 леммы 11 получаем:

$$T_1 = \{\Gamma_{l-1}^{k_1}(1), \ldots, \Gamma_{l-1}^{k_1}(r)\}, \qquad T_2 = \{\Gamma_{l-1}^{k_1+1}(1), \ldots, \Gamma_{l-1}^{k_1+1}(r)\},$$

$$T_3 = \{\Gamma_{l-1}^{k_1}(C_{l-1}^{k_1-1}+1), \ldots, \Gamma_{l-1}^{k_1}(C_{l-1}^{k_1-1}+r)\}.$$

Из п. 4а леммы 11 следует, что $T_2 = \nu(T_3, G_{l-1}^{п}, G_{l-1}^{л})$. Поэтому, согласно п. 1 и 2 леммы 25 имеем, что

$$|V_{l-1}^{л}(k_2, T_2)| + |V_{l-1}^{п}(k_2, T_3)| = |V_{l-1}(k_2, T_3)|. \tag{35}$$

Исходя из индуктивного предположения, для множеств T_1 и T_3 получаем:

$$|V_{l-1}(k_2, T_1)| \leqslant |V_{l-1}(k_2, T_3)|. \tag{36}$$

Так как при изоморфизме графов $G_l^{п}$ и G_{l-1}, подграфы $G_l^{пл}$ и $G_{l-1}^{л}$, $G_l^{пп}$ $G_{l-1}^{п}$ соответствуют друг другу, то с учетом п. 2 леммы 24 получаем, что

$$|V_l^{пл}(k_2, R_2^*)| = |V_{l-1}^{л}(k_2, T_2)|, \tag{37}$$

$$|V_l^{пп}(k_2, R_2)| = |V_{l-1}^{п}(k_2, T_3)|. \tag{38}$$

Одновременно для множеств S_2^* и T_1 из следствий 1.10 и 1.6* получаем, что

$$\psi_{k_2}(S_2^*) = \psi_{k_2}(T_1)$$

или с учетом следствия 1.21

$$\psi_{k_2}(S_2^*) = |V_{l-1}(k_2, T_1)|. \tag{39}$$

Подставив (37) и (38) в (35), а затем полученное и (39) в (36), получаем:

$$\psi_{k_2}(S_2^*) \leqslant |V_l^{пл}(k_2, R_2^*)| + |V_l^{пп}(k_2, R_2)|$$

или с учетом (34)

$$\psi_{k_2}(S_2^*) \leqslant |V_l^{лп}(k_2, R_2')| + |V_l^{пп}(k_2, R_2)|. \tag{40}$$

Сравнивая (27) с (32) и учитывая (28), (33) и (40), приходим к (1).

2б. Введем следующие обозначения:

$$x = m_1 - C_{l-2}^{k_1-2}, \quad y = C_{l-1}^{k_1-1} - m_1.$$

Тогда

$$m_2 = m - m_1 = C_{l-1}^{k_1-1} + r - m_1 = r + y. \tag{41}$$

В зависимости от величины параметра m_2 случай 2б разобьем на следующие два подслучая:

2б1. $m_2 \leqslant C_{l-2}^{k_1-1}$,

2б2. $m_2 > C_{l-2}^{k_1-1}$.

Рассмотрим каждый из этих случаев.

2б1. Множество S^* представим в следующем виде:

$$S^* = S_1^* \cup S_2^* \cup S_3^*,$$

где

$$S_1^* = P; \quad S_2^* = \{\Gamma_l^{k_1}(m_1+1), \ldots, \Gamma_l^{k_1}(m_1+y)\};$$

$$S_3^* = \{\Gamma_l^{k_1}(C_{l-1}^{k_1-1}+1), \ldots, \Gamma_l^{k_1}(C_{l-1}^{k_1-1}+r)\}.$$

Из определения параметров r и y легко следует, что S^* можно представить в указанном виде.

Используя следствия 1.21 и лемму 17, для множеств S^* получаем:

$$N_{k_2}^0(S^*) = N_{k_2}^0(S_1^*) + \psi_{k_2}(S_2^*) + \psi_{k_2}(S_3^*). \tag{42}$$

Для множества $S = PUR$ можно записать следующее соотношение:

$$V_l(k_2, S) = V_l(k_2, P) \cup V_l(k_2, R). \tag{43}$$

Из п. 2 леммы 11 следует, что $P \subseteq \{G_l^{\text{л}}\}$ и $R \subseteq \{G_l^{\text{пл}}\}$. Поэтому с учетом п. 1а и п. 4г леммы 25 из (43) получаем:

$$V_l(k_2, S) \supseteq (V_l^{\text{л}}(k_2, P) \cup V_l^{\text{пл}}(k_2, R)),$$

откуда следует, что

$$N_{k_2}^0(S) \geqslant |V_l^{\text{л}}(k_2, P)| + |V_l^{\text{пл}}(k_2, R)|,$$

или

$$N_{k_2}^0(S) \geqslant N_{k_2}^0(P) + |V_l^{\text{пл}}(k_2, R)|. \tag{44}$$

Пусть $S_2' = \nu(S_2^*, G_l^{\text{лп}}, G_l^{\text{пл}})$. Из леммы 11 получаем, что

$$S_2' = \{\Gamma_l^{k_1}(m_1 + 1 + C_{l-2}^{k_1-1}), \ldots, \Gamma_l^{k_1}(C_{l-1}^{k_1-1} + C_{l-2}^{k_1-1})\}.$$

Так как $y = C_{l-1}^{k_1-1} - m_1$, то

$$|S_2'| = y. \tag{45}$$

Из следствий 1.10 и 1.6* получаем, что

$$\psi_{k_2}(S_2^{*}) = \psi_{k_2}(S_2^{'}). \tag{46}$$

Пусть $R' = \nu(R, G_t^{зп}, G_{t-2})$, $S_3^{'} = \nu(S_3^{*}, G_t^{зп}, G_{t-2})$, $S_2^{'} = \nu(S_2^{'}, G_t^{зп}, G_{t-2})$.

Из п. 3б3 леммы 11 получаем, что

$$R' = \{\Gamma_{t-2}^{k_2-1}(1), \ldots, \Gamma_{t-2}^{k_2-1}(m)\}, \qquad S_3^{'} = \{\Gamma_{t-2}^{k_2-1}(1), \ldots, \Gamma_{t-2}^{k_2-1}(r)\},$$

$$S_2^{'} = \{\Gamma_{t-2}^{k_2-1}(m_1+1), \ldots, \Gamma_{t-2}^{k_2-1}(C_{t-2}^{k_2-1})\}.$$

Из п. 4е леммы 24, следствий 1.10 и 1.6* получаем:

$$|V_t^{пл}(k_2, R)| = |V_{t-2}(k_2-1, R')|, \tag{47}$$

$$\psi_{k_2}(S_3^{*}) = \psi_{k_2-1}(S_3^{'}), \tag{48}$$

$$\psi_{k_2}(S_2^{'}) = \psi_{k_2-1}(S_2^{*}). \tag{49}$$

Множество R' представим в следующем виде:

$$R' = R_1^{'} \cup R_2^{'},$$

где

$$R_1^{'} = S_3^{'}, \qquad R_2^{'} = \{\Gamma_{t-2}^{k_2-1}(r+1), \ldots, \Gamma_{t-2}^{k_2-1}(m_2)\}.$$

Из (41) следует, что

$$|R_2^{'}| = y,$$

откуда с учетом равенств $|S_2^{*}| = |S_2^{'}|$ и (45) получаем, что

$$|R_2^{'}| = |S_2^{*}|. \tag{50}$$

Используя лемму 7 и следствие 1.21 для множеств R' и $S_3^{'}$ получаем:

$$|V_{t-2}(k_2-1, R')| = |V_{t-2}(k_2-1, R_1^{'})| + \psi_{k_2-1}(R_2^{'}), \tag{51}$$

$$\psi_{k_2}(S_3^{'}) = |V_{t-2}(k_2-1, S_3^{'})|, \tag{52}$$

а из леммы 8*, для множеств $R_2^{'}$ и S_2^{*} получаем:

$$\psi_{k_2-1}(S_2^{*}) \leqslant \psi_{k_2-1}(R_2^{'}). \tag{53}$$

Из (51) с учетом (52) и (53) получаем, что

$$|V_{t-2}(k_2-1, R')| \geqslant \psi_{k_2-1}(S_3^{'}) + \psi_{k_2-1}(S_2^{*}), \tag{54}$$

или, после соответствующих подстановок (47), (48), (49) и (46) в (54), получаем:

$$|V_t^{пл}(k_2, R)| \geqslant \psi_{k_2}(S_3^{*}) + \psi_{k_2}(S_2^{*}). \tag{55}$$

Так как $P = S_1^{*}$, то из (44) с учетом (55) и (42) получаем (1).

2б2. Множества S^*, P и R представим в следующем виде:

$$S^* = S_1^* \cup S_2^*; \quad P = P_1 \cup P_2; \quad R = R_1 \cup R_2,$$

где

$$S_1^* = \{\Gamma_l^{k_1}(1), \ldots, \Gamma_l^{k_1}(C_{l-1}^{k_1-1})\}; \quad S_2^* = \{\Gamma_l^{k_1}(C_{l-1}^{k_1-1}+1), \ldots, \Gamma_l^{k_1}(C_{l-1}^{k_1-1}+r)\};$$

$$P_1 = \{\Gamma_l^{k_1}(1), \ldots, \Gamma_l^{k_1}(C_{l-2}^{k_1-2})\}; \quad P_2 = \{\Gamma_l^{k_1}(C_{l-2}^{k_1-2}+1), \ldots, \Gamma_l^{k_1}(C_{l-2}^{k_1-2}+x)\};$$

$$R_1 = \{\Gamma_l^{k_1}(C_{l-1}^{k_1-1}+1), \ldots, \Gamma_l^{k_1}(C_{l-1}^{k_1-1}+C_{l-2}^{k_1-1})\};$$

$$R_2 = \{\Gamma_l^{k_1}(C_{l-1}^{k_1-1}+C_{l-2}^{k_1-1}+1), \ldots, \Gamma_l^{k_1}(C_{l-1}^{k_1-1}+C_{l-2}^{k_1-1}+r-x)\}.$$

Указанное представление множеств S^*, P и R легко следует из определения параметров r и x.

Используя лемму 7 и следствие 1.21 для множества S^*, получаем

$$N_{k_2}^0(S^*) = N_{k_2}^0(S_1^*) + \psi_{k_2}(S_2^*). \tag{56}$$

Для множества $S = PUR$ можно записать следующее соотношение:

$$V_l(k_2, S) \supseteq (V_l^{лл}(k_2, P_1) \cup V_l^{лп}(k_2, P_2) \cup V_l^{пл}(k_2, R_1) \cup$$
$$\cup V_l^{лп}(k_2, R_2) \cup V_l^{пп}(k_2, R_2)),$$

откуда получаем:

$$N_{k_2}^0(S) \geqslant |V_l^{лл}(k_2, P_1)| + |V_l^{лп}(k_2, P_2) \cup V_l^{лп}(k_2, R_2)| +$$
$$+ |V_l^{пл}(k_2, R_1)| + |V_l^{пп}(k_2, R_2)|. \tag{57}$$

Из п. 2 леммы 11 следует, что

$$P_1 \subseteq \{G_l^{лл}\}, \quad P_2 \subseteq \{G_l^{лп}\}, \quad R_1 \subseteq \{G_l^{пл}\}, \quad R_2 \subseteq \{G_l^{пп}\}.$$

Аналогично случаю 2а для множества $S_1{}^*$ получаем:

$$N_{k_2}^0(S^*) = C_{l-1}^{k_2-1}. \tag{58}$$

Так как $|P_1| = C_{l-2}^{k_1-2}$ и $|R_1| = C_{l-2}^{k_1-1}$, то используя леммы 11 и 25, легко получить, что

$$|V_l^{лл}(k_2, P_1)| + |V_l^{пл}(k_2, P_1)| = C_{l-1}^{k_2-1}. \tag{59}$$

Покажем, что

$$\psi_{k_2}(S_2^*) \leqslant |V_l^{лп}(k_2, P_2) \cup V_l^{лп}(k_2, R_2)| + |V_l^{пп}(k_2, R_2)|. \tag{60}$$

Пусть

$$R_2' = \nu(R_2, G_l^{п}, G_l^{л}), \quad R_2^* = \nu(R_2, G_l^{пп}, G_l^{пл}), \quad P_2' = \nu(P_2, G_l^{лп}, G_l^{пл}),$$

Посредством утверждений п. 2 и 4 леммы 25 легко проверить, что

$$R_2' \subseteq \{G_l^{лп}\} \quad \text{и} \quad R_2^* = \nu(R_2', G_l^{лп}, G_l^{пл}).$$

Используя утверждения лемм 23 и 24, заключаем, что

$$|V_t^{лп}(k_2, P_2) \cup V_t^{лп}(k^2, R_2)| = |V_t^{пл}(k_2, P_2') \cup V_t^{пл}(k_2, R_2')|. \quad (61)$$

Пусть

$$S_2' = \nu(S_2^*, G_t^п, G_{t-1}), \quad T_1 = \nu(P_2', G_t^п, G_{t-1}), \quad T_2 = \nu(R_2', G_t^п, G_{t-1})$$

и

$$T_3 = \nu(R_2, G_t^п, G_{t-1}).$$

Так как при изоморфизме $G_t^п$ и G_{t-1}, подграфы $G_t^{пл}$ и $G_{t-1}^л$, $G_t^{пп}$ и $G_{t-1}^п$ соответствуют друг другу, то используя п. 2 леммы 24, получаем, что

$$|V_t^{пл}(k_2, P_2') \cup V_t^{пл}(k_2, R_2') = |V_{t-1}^л(k_2, T_1) \cup V_{t-1}^л(k_2, T_2)|, \quad (62)$$

$$|V_t^{пп}(R_2)| = |V_{t-1}^п(T_3)|. \quad (63)$$

Так как $R_2' = \nu(R_2, G_t^{пп}, G_t^{пл}$, то легко получить, что

$$T_2 = \nu(T_3, G_{t-1}^п, G_{t-1}^л).$$

Поэтому, из п. 1 и 2 леммы 25 следует, что

$$|V_{t-1}^л(k_2, T_1) \cup V_{t-1}^л(k_2, T_2)| + |V_{t-1}^п(k_2, T_3)| = |V_{t-1}(k_2, T_1 \cup T_3)|. \quad (64)$$

Из п. 3а2 леммы 11 получаем, что

$$S_2' = \{\Gamma_{t-1}^{k_1}(1), \ldots, \Gamma_{t-1}^{k_1}(r)\}.$$

Так как

$$|S_2'| = |T_1 \cup T_3|$$

и наборы из S_2' и $T_1 \cup T_3$ одинаковой длины, то на основе индуктивного предположения имеем:

$$N_{k_2}^0(S_2') \leqslant |V_{t-1}(k_2, T_1 \cup T_3)|. \quad (65)$$

В то же время, как следует из следствий 1.10 и 1.6* и следствия 1.21,

$$\psi_{k_2}(S_2^*) = N_{k_2}^0(S_2'). \quad (66)$$

Подставляя в (65) выражения (66), (64) затем (62) и (63) и учитывая (61), приходим к (60).

Из (57) с учетом (59) и (60) получаем:

$$N_{k_2}^0(S) \geqslant C_{t-1}^{k_2-1} + \psi_{k_2}(S_2^*),$$

что вместе с (56) и (58) доказывает (1).

Итак, случай 2 полностью разобран, а вместе с тем и всевозможные случаи.

Индуктивный шаг полностью проведен.

Лемма 19, а вместе с тем и лемма 19*, доказаны.

Лемма 28. *Если* $L_\chi = \{L_n^{l_1}(1), L_n^{l_1}(2), \ldots, L_n^{l_1}(m_1), L_n^{l_2}(\tilde{m}_1+1), \ldots, L_n^{l_2}(\tilde{m}_1 + m_2), \ldots, L_n^{l_k}(\tilde{m}_{k-1}+1), \ldots, L_n^{l_k}(\tilde{m}_{k-1} + m_k)\}$ — *уплотненное множество с х. п.* $\chi = (n, l_1, \ldots, l_k, m_1, \ldots, m_k)$, *то:*

1. *Наборы множества* L_χ *попарно несравнимы;*
2. *Множество* L_χ *представимо в виде*

$$L_\chi = \{L_n^{l_1}(1), L_n^{l_1}(2), \ldots, L_n^{l_1}(t_{l_1}), L_n^{l_2}(\theta(n-l_2, n-l_1, 1, t_{l_1})+1), \ldots,$$
$$L_n^{l_2}(t_{l_2}), \ldots, L_n^{l_k}(\theta(n-l_k, n-l_{k-1}, t_{l_{k-1}})+1), \ldots, L_n^{l_k}(t_{l_k})\},$$

где

$$t_{l_1} = m_1; \quad t_{l_i} = \theta(n-l_i, n-l_{i-1}, 1, t_{l_{i-1}}) + m_i, \quad \text{при } i = 2, \ldots, k;$$

$\theta(k_2, k_1, r_1, r_2)$ — число наборов в k_2-продолжении последовательности $\Gamma_n^{k_1}(r_1), \Gamma_n^{k_1}(r_1+1), \ldots, \Gamma_n^{k_1}(r_2)$ (см. лемму 14).

Утверждение леммы 28 непосредственно следует из определения уплотненных множеств, следствия 1.21 и определения функции $\theta(x, y, z, u)$.

Отметим, что при фиксированной х. п. обозначения $t_{l_1}, \ldots, t_{l_k}$ в дальнейшем изложении будут употребляться только в определенном выше смысле.

Лемма 29. *Если* S — *произвольное уплотненное множество с х. п.* $\chi = (n, l_1, \ldots, l_k, m_1, \ldots, m_k)$, *то множество всех* $\Delta_n^{l_k}$*-поднаборов наборов из* S *совпадает с множеством* $\{L_n^{l_k}(1), \ldots, L_n^{l_k}(t_{l_k})\}$.

Доказательство.

Из леммы 20 и связи между алгоритмами L_n^l и Γ_n^{n-l} следует, что для доказательства леммы 29 достаточно показать, что множество всех $\Delta_n^{n-l_k}$-наднаборов дополнений наборов из S совпадает с множеством

$$\{\Gamma_n^{n-l_k}(1), \ldots, \Gamma_n^{n-l_k}(t_{l_k})\}.$$

Используя определение уплотненного множества, мы получаем, что множество дополнений наборов из S есть множество

$$S' = \{\Gamma_n^{n-l_1}(1), \ldots, \Gamma_n^{n-l_1}(t_{l_1}), \ldots, \Gamma_n^{n-l_k}(\theta(n-l_k, n-l_{k-1}, 1, t_{l_{k-1}}) +$$
$$+1), \ldots, \Gamma_n^{n-l_k}(t_{l_k})\}.$$

На основании следствия 1.21 и определения функции $\theta(x, y, z, u)$ для множества S' последовательно получаем:

$$V_n(n-l_1, S') = \{\Gamma_n^{n-l_1}(1), \dots, \Gamma_n^{n-l_1}(t_{l_1})\},$$

$$V_n(n-l_2, S') = V_n(n-l_2, V_n(n-l_1, S')) =$$
$$= \{\Gamma_n^{n-l_2}(1), \dots, \Gamma_n^{n-l_2}(\theta(n-l_2, n-l_1, 1, t_{l_1})),$$
$$\Gamma_n^{n-l_2}(\theta(n-l_2, n-l_1, 1, t_{l_1})+1), \dots, \Gamma_n^{n-l_2}(t_{l_2})\},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$V_n(n-l_k, S') = V_n(n-l_k, V_n(n-l_{k-1}, S')) =$$
$$= \{\Gamma_n^{n-l_k}(1), \dots, \Gamma_n^{n-l_k}(\theta(n-l_k, n-l_{k-1}, 1, t_{l_{k-1}})),$$
$$\Gamma_n^{n-l_k}(\theta(n-l_k, n-l_{k-1}, 1, t_{l_{k-1}})+1), \dots, \Gamma_n^{n-l_k}(t_{l_k})\},$$

где $V_n(l, S')$ — равно множеству Δ_n^{l}-наднаборов наборов из S'.

Из последнего равенства следует утверждение леммы 29.

Для произвольного множества Δ_n-наборов T через $W_i(T)$ будем обозначать множество всех Δ_n^{i}-поднаборов наборов множества T, где $0 \leqslant i \leqslant n$.

Доказательство теоремы 1.

Пусть K_χ — непустой класс м. п. н. н. для χ и S — произвольный элемент K_χ.

Покажем, что можно построить уплотненное множество L_χ с х. п. χ.

Поскольку S—м. п. н.н., то для S справедливы следующие неравенства:

$$N_i(S) < C_n^i \quad \text{при } l_k + 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{1}$$

$$N_{l_k}(S) \leqslant C_n^{l_k}, \tag{2}$$

так как нарушение этих неравенств привело бы к невыполнению условия попарной несравнимости наборов из S.

Для множеств S и L_χ очевидны следующие равенства:

$$W_i(S) = W_i\left(\bigcup_{j=1}^{r} P_j\right), \tag{3}$$

$$W_i(L_\chi) = W_i\left(\bigcup_{j=1}^{r} Q_j\right), \tag{4}$$

где

$$P_j = \{A \mid A \in S \mathbin{\&} |A| = l_j\}, \qquad Q_j = \{A \mid A \in L_\chi \mathbin{\&} |A| = l_j\}$$

при $j = 1, \dots, k$; $l_{r+1} + 1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant r \leqslant k-1$.

Поскольку

$$|P_1| = |Q_1| = m_1,$$

то с учетом (1) и (3) при $i = l_1$ получаем, что множество $Q_1 = \{L_n^{l_1}(1), \dots, L_n^{l_1}(t_{l_1})\}$ можно построить.

Из леммы 19*, соотношений (1), (3), (4) при $r = 1$; $l_2 + 1 \leqslant i \leqslant n$, получаем, что

$$N_i(L_\chi) = N_i(Q_1) \leqslant N_i(P_1) = N_i(S) < C_n^i. \qquad (5)$$

Так как

$$W_{l_2}(L_\chi) = W_{l_2}(Q_1) \cup Q_2, \quad W_{l_2}(Q_1) \cap Q_2 = \varnothing, \quad W_{l_2}(S) = W_{l_2}(P_1) \cup P_2,$$

$$W_{l_2}(P_1) \cap P_2 = \varnothing, \quad |P_2| = |Q_2| = m_2,$$

то из (5) с учетом (1) получаем:

$$N_{l_2}(L_\chi) \leqslant N_{l_2}(S) < C_n^{l_2}, \qquad (6)$$

откуда следует, что множество Q_2 также можно построить.

Рассуждая аналогично при $r = 2, 3, \dots, k-1$, мы получим множества $Q_3, \dots, Q_k$, что вследствии равенства $L_\chi = \bigcup_{j=1}^{k} Q_j$ означает существование уплотненного множества L_χ с х. п. χ. При этом мы одновременно получили, что

$$N_i(L_\chi) \leqslant N_i(S), \qquad (7)$$

при $l_k \leqslant i \leqslant n$.

Поскольку $W_{l_k}(L_\chi) = \{L_n^{l_k}(1), \dots, L_n^{l_k}(t_{l_k})\}$, лемма (29),

$$W_{l_k+j}(L_\chi) = \{W_{l_k+j}(W_{l_k}(L_\chi)) \quad \text{и} \quad W_{l_k+j}(S) = W_{l_k+j}(W_{l_k}(S))$$

при $j = 0, 1, \dots, n - l_k$, то из леммы 19* с учетом (7), получаем, что

$$N_i(L_\chi) \leqslant N_i(S) \qquad (8)$$

при $0 \leqslant i \leqslant l_k$.

Неравенства (7) и (8) доказывают вторую часть утверждения теоремы 1.

Для завершения доказательства теоремы остается отметить, что в случае, когда можно построить уплотненное множество L_χ с заданной х. п. χ, класс $K_\chi \neq \varnothing$, так как $L_\chi \in K_\chi$.

Теорема 1 полностью доказана.

Следствие 2. *Для произвольной х. п. χ, $\chi = (n, l_1, \dots, l_k, m_1, \dots, m_k)$, если K_χ — непустой класс м. п. н. н. с х. п. χ и L_χ — уплотненное множество с х. п. χ, то*

$$N_i(L_\chi) = \min_{S \in K_\chi} \left(\sum_{t=1}^{m} (-1)^{t-1} \sum_{\{S_{p_1}, \dots, S_{p_t}\} \subseteq S} C^i_{|S_{p_1} \cap S_{p_2} \cap \dots \cap S_{p_t}|} \right),$$

где $0 \leqslant i \leqslant n$, $m = \sum_{j=1}^{k} m_j$.

Доказательство.

Покажем, что

$$N_i(S)=\sum_{t=1}^{m}(-1)^{t-1}\sum_{\{S_{p_1},\ldots,S_{p_t}\}\subseteq S} C^i\,|S_{p_1}\cap S_{p_2}\cap\ldots\cap S_{p_t}|,$$

где полагаем $C_r^i=0$ при $i>r$.

Используем принцип «включения-исключения», который формулируется следующим образом [11]:

Если из N объектов $N(a_1)$ обладают свойством a_1, $N(a_2)$ — свойством $a_2,\ldots,N(a_r)$ — свойством a_r, $N(a_1,a_2)$ обладают как свойством a_1, так и свойством $a_2,\ldots,N(a_{r-1},a_r)$ — свойствами a_{r-1} и $a_r,\ldots$ $\ldots,N(a_1,\ldots,a_r)$ обладают свойствами $a_1,\ldots,a_r$, то число объектов $N(a_1',a_2',\ldots,a_r')$, не обладающих ни одним из этих свойств $a_1,\ldots,a_r$, находится по формуле:

$$N(a_1',a_2',\ldots,a_r')=N-\sum_{p_1\in\{1,\ldots,r\}}N(a_{p_1})+$$

$$+\sum_{\substack{p_1\neq p_2\\ p_1,p_2\in\{1,\ldots,r\}}}N(a_{p_1},a_{p_2})-\cdots+(-1)^r N(a_1,\ldots,a_r).$$

В данном случае $N=N_i(S)$, т. е. объектами нашего рассмотрения являются все различные поднаборы длины i, полученные из наборов множества S.

Обозначение a_r, $r=1,\ldots,m$ в данном случае понимается как свойство быть поднабором набора S_r, а a_r^1 — означает отсутствие этого свойства.

Тогда $N(a_1',\ldots,a_m')=0$, так как каждый рассматриваемый набор длины i получен из какого-либо набора $S_r\in S$ и потому обладает по меньшей мере свойством a_r.

Учитывая, что $N(a_{p_1},\ldots,a_{p_t})=C^i_{|S_{p_1}\cap S_{p_2}\cap\ldots\cap S_{p_t}|}$, $\quad t=1,\ldots,m$,

из формулы „включения-исключения", получаем равенство (1), откуда на основе теоремы 1 получаем требуемое утверждение.

В заключение отметим, что теорема 1 и следствие 2, кроме приложений в теории тестов и самостоятельного интереса в комбинаторике могут быть полезны в теории управляющих систем, в теории кодирования и др.

Է. Մ. ՊՈՂՈՍՅԱՆ

ՆՎԱԶԱԳՈՒՅՆ ԹՎՈՎ ԵՆԹԱԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ԱՆՀԱՄԵՄԱՏԵԼԻ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

Դիտարկված է վերջավոր բազմությունների համակարգերի հատկությունների ուսումնասիրման կոմբինատոր ապարատ, որի օգնությամբ լուծվում է

վերնագրում նշված համակարգերի կառուցման էքստրեմալ կոմբինատոր պրոբլեմը։ Նախկինում այդ ապարատը կիրառվել է նվազագույն թվով ենթաբազմություններ ունեցող համեմատելի բազմությունների համակարգերի կառուցման համար։ Վերջինս հիմք հանդիսացավ նկարագրությունների վերծանման պրոբլեմների էնտրոպիկ բարդության ներքին գնահատականների կառուցման համար։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Macaulay F. S.* Tome properties of enumeration in the theory of modular systems, "Proc. London Math. Soc.", v. 26, 531—555, 1927.
2. *Clements G. F., Lindström B.* A generalization of a Combinatorial theorem of Macaulay, J. Comb. Theory , v. 7, 230—238, 1969.
3. *Погосян Э. М.* О нижних оценках длин минимальных тестов, ДАН АрмССР, т. L, № 2, 1970.
4. *Погосян Э. М.* Адаптация комбинаторных алгоритмов. Изд-во АН АрмССР, Ереван, 286 с., 1983.
5. *Коршунов А. В.* О длине минимальных тестов для прямоугольных таблиц, «Кибернетика», № 6, 1970.
6. *Андреев А. Е.* О тупиковых и минимальных тестах. ДАН СССР, т. 256, № 3, 1981.
7. *Яглом А. М., Яглом И. М.* Неэлементарные задачи в элементарном изложении. М., Гостехиздат, 1954.
8. *Виленкин Н. Я.* Комбинаторика, М., Наука, 1969.
9. *Саркисян О. А.* Обобщенные Δ-графы, сб. «Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники», Ереван, 176—187, 1975.
10. *Погосян Э. М.* Об одной комбинаторной задаче и ее приложениях в теории тестов, дис. на соискание степени канд. физ.-мат. наук, М., 1970.
11. *Риордан Дж.* Введение в комбинаторный анализ, М., ИЛ, 1963.