А. А. МОКАЦЯН

НЕТОТАЛЬНОСТЬ И МИНИМАЛЬНЫЕ μ-ПОКРЫТИЯ

В [2] доказано, что любая тотальная μ-степень имеет минимальное покрытие. Ниже будет доказано существование нетотальных степеней, имеющих минимальные покрытия, а именно, для произвольной тотальной степени $\underline{a}$ будет построена $\underline{a}$-квазиминимальная степень, имеющая минимальное покрытие.

Мы будем пользоваться терминологией и понятиями, введенными в [1—4]:

$\{D_i\}$ — каноническая нумерация конечных множеств;

$\{W_i\}$ — допустимая нумерация рекурсивно перечислимых множеств;

$\{\Phi_i\}$ — допустимая нумерация операторов перечисления;

N — множество всех натуральных чисел;

$$N_0 = \{2x \mid x \in N\}, \qquad N_1 = \{2x+1 \mid x \in N\};$$

S_A — полухарактеристическая функция множества A (т. е. $S_A(x)=0$, если $x \in A$ и $S_A(x)$ не определено в противном случае).

Если A, B множества, то $A \oplus B = \{y \mid (y = 2x \,\&\, x \in A) \vee (y = 2x + 1 \,\&\, x \in B)\}$.

Если A, B функции, то функция $A \oplus B$ определяется следующим образом:

$$(A \oplus B)(2n) = A(n); \qquad (A \oplus B)(2n+1) = B(n).$$

Пусть машины Тьюринга определены как множества четверок (см. [1]). Напомним, что при описании машины Тьюринга с оракулом A четверка $q_i S_j q_k q_l$, если она применима, ведет к состоянию q_k, если число, кодированное на ленте, принадлежит A и к состоянию q_l в противном случае.

Будем рассматривать только однозначные множества A (т. е. графики частичных функций); в этом случае четверка $q_i S_j q_k q_l$, если применима, будет интерпретироваться, как ведущая к состоянию q_k, если число $\langle m, n \rangle$, кодированное на ленте, принадлежит A и как ведущая к состоянию q_l, если $\exists n' (n' \neq n \,\&\, \langle m, n' \rangle \in A)$; в противном случае считается, что вычисление „застопорилось".

Зафиксируем допустимую нумерацию машин Тьюринга. $\{i\}^f$ обозначает одноместную частичную функцию, вычисляемую i-ой машиной Тьюринга относительно f (в вышеуказанном смысле).

Функция g μ-сводится к f, если $\exists i\ (g = \{i\}^f)$.

Если D_n однозначно (т. е. D_n есть график конечной функции f), то $\{i\}^n$ означает $\{i\}^f$.

Пусть τ — функция пересчета пар, π_1 и π_2 — общерекурсивные функции, осуществляющие отображение, обратное отображению τ (т. е. для всех z $\tau(\pi_1(z), \pi_2(z)) = z$).

Мы будем использовать символ $\langle x, y \rangle$ в качестве сокращения для $\tau(x, y)$.

Скажем, что кодированная тройка $\langle \langle m, r \rangle, n \rangle$ является i-минимальной, тогда и только тогда, когда $\{i\}^n(m) = r$ и $\{i\}^k(m)$ расходится, если $D_k \subset D_n$.

Множество T_i всех i-минимальных троек называется i-ым Тьюринговым оператором.

Для функции f положим

$$T_i(f) = \{\pi_1(k) \mid k \in T_i \,\&\, D_{\pi_2(k)} \subseteq \tau(f)\}.$$

Для произвольного k обозначим $D_k^0 = \{n \mid \langle n, 0 \rangle \in D_k\}$, для каждого i пусть $T_i^0 = \{\langle m, k \rangle \mid \langle \langle m, 0 \rangle, k \rangle \in T_i \,\&\, D_k \subseteq N \times \{0\}\}$; $T_i^0(A) = \{m \mid \exists k\, [\langle m, k \rangle \in T_i^0 \,\&\, D_k^0 \subseteq A]\}$ (для произвольного A).

Тогда $S_B \leqslant_\mu S_A \Longleftrightarrow \exists i\, [B = T_i^0(A)]$; и для каждого i T_i^0 однозначно.

Частичными степенями называются классы эквивалентностей частичных функций относительно отношений эквивалентности (индуцированных сводимостями).

Мы будем рассматривать отношения $\equiv_e$, $\equiv_\mu$, индуцированные сводимостями $\leqslant_e$, $\leqslant_\mu$ соответственно.

Через Λ обозначим множество всех частичных степеней (в случае необходимости будет указываться о каких именно сводимостях ($\leqslant_e$ или $\leqslant_\mu$) идет речь).

Через Θ обозначим подмножество тех степеней из Λ, которые содержат всюду определенную функцию (степени, содержащие всюду определенную функцию, называются тотальными степенями).

Через Ξ обозначим подмножество тех степеней из Λ, которые содержат полухарактеристическую функцию.

Ниже мы не будем указывать какую из сводимостей ($\leqslant_e$ или $\leqslant_\mu$) имеем в виду, если высказываемое утверждение верно для обеих сводимостей.

Если A функция или множество, то через $\underline{A}$ обозначим степень A.

Операция $\vee$ на степенях индуцируется, как обычно, операцией $\oplus$. Λ, Θ и Ξ являются верхними полурешетками.

Идеалом верхней полурешетки $(\Sigma, \leqslant)$ называется всякое непустое подмножество $\Delta \subseteq \Sigma$ удовлетворяющее условиям:

а) если $a, b \in \Delta$, то $a \cup b \in \Delta$;

б) если $a \leqslant b$ и $b \in \Delta$, то $a \in \Delta$.

Для любого фиксированного элемента $a_0 \in \Sigma$ множество всех элементов $a \leqslant a_0$ является идеалом, называемым главным идеалом, порожденным элементом a_0.

Главный идеал, порожденный $\underline{a}$, будет обозначаться через $(\underline{a})$. Конусом над $\underline{a}$ называется множество $\{\underline{b} | \underline{a} \leqslant \underline{b}\}$.

Если Σ и Ψ идеалы, то

$$\Sigma \cup \Psi = \{\underline{a} \cup \underline{b} | \underline{a} \in \Sigma \,\&\, \underline{b} \in \Psi\}; \quad \underline{a} \cup \Sigma = (\underline{a}) \cup \Sigma.$$

В дальнейшем будет использована следующая теорема, доказанная в [2]:

Теорема конуса (μ-). Для произвольных $\underline{a}$, $\underline{b}$ и C

$$1) \ \underline{a} \leqslant \underline{b} \leqslant \underline{a} \cup S_c \Rightarrow \underline{b} \in \underline{a} \cup \Xi;$$

$$2) \ \underline{a} \in \Theta \,\&\, \underline{a} < \underline{b} \Rightarrow \exists \underline{c} \, [\underline{c} \in \underline{a} \cup \Xi \,\&\, \underline{a} < \underline{c} \leqslant \underline{b}].$$

Степень $\underline{b}$ называется $\underline{a}$-квазиминимальной (квазиминимальным покрытием еля $\underline{a}$), если $\underline{a} < \underline{b}$ и $\forall \underline{c}$ $(((\underline{c}$ — тотальная$) \,\&\, (\underline{c} \leqslant \underline{b})) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\underline{c} \leqslant \underline{a}))$.

$\underline{0}$ — квазиминимальные степени называются квазиминимальными.

Степень $\underline{b}$ называется $\underline{a}$-минимальной (минимальным покрытием для $\underline{a}$), если $\underline{a} < \underline{b}$ и

$$\forall \underline{c} \, (\underline{a} \leqslant \underline{c} \leqslant \underline{b} \Rightarrow (\underline{c} = \underline{a} \vee \underline{c} = \underline{b})).$$

$\underline{0}$ — минимальные степени называются минимальными.

Пусть $\leqslant_r$ некоторая сводимость, A, B — функции или множества. Тогда выражения „$\underline{B}$ $\underline{A}$ — квазиминимальна (по r-)“, „$\underline{B}$ $\underline{A}$-минимальная (по r-)“ означают соответственно „r-степень $\underline{B}$ $\underline{A}$-квазиминимальна в упорядочении r-степеней“, r-степень $\underline{B}$ $\underline{A}$-минимальна в упорядочении r-степеней“.

Теорема (μ-). Если $\underline{a} \in \Theta$, то существует $\underline{a}$-квазиминимальная степень $\underline{b}$, имеющая минимальное покрытие.

Сначала дадим доказательство для $\underline{a} = \underline{O}$, то есть докажем что существует квазиминимальная степень $\underline{b}$, имеющая минимальное покрытие.

Из доказательства теоремы конуса [2] следует, что достаточно рассматривать элементы Ξ в проверке на минимальность, то есть достаточно построить множества $\underline{P}$ и $\underline{\widehat{A}}$ такие, что S_P квазиминимальна, $S_P <_\mu S_Q$ (где $Q = P \oplus \widehat{A}$) и таким образом

$$S_Q = S_P \oplus S_{\widehat{A}} \quad \text{и} \quad \forall E [S_P \leqslant_\mu S_E \leqslant_\mu S_Q \Rightarrow [S_E \leqslant_\mu S_P \vee S_Q \leqslant_\mu S_E]].$$

Мы дадим построение множеств A и B таких, что в итоге будем иметь $B = P \oplus \varnothing$, $A = \varnothing \oplus \hat{A}$.

При построении мы будем добиваться того, чтобы $\underline{B}$ было квазиминимально (по e-).

Заметим, что $\underline{B}$ квазиминимальна (по e-) $\Longleftrightarrow \underline{S}_B$ квазиминимальна (по e-) (так как $\forall B\ (B \equiv_e S_B)$). $\underline{f}$ квазиминимальна (по e-) $\Rightarrow \underline{f}$ квазиминимальна (по μ-), поэтому $\underline{B}$ квазиминимальна (по e-) $\Rightarrow \underline{S}_B$ квазиминимальна (по μ-).

Множество $\tilde{B}$ называется k-продолжением множества B, если $B \subseteq \tilde{B}$ и $\tilde{B} \setminus B$ конечно.

Построение осуществляется по этапам.

Каждый этап t (кроме нулевого) будет состоять из 4 шагов. На i-ом шаге ($1 \leqslant i \leqslant 3$) строятся множества A_t^i, B_t^i, C_t^i. На 4-ом шаге строятся множества A_t, B_t, C_t. При этом для каждого t будут выполняться следующие условия:

$$A_t^1 \subseteq A_t^2 \subseteq A_t^3 \subseteq A_t; \quad B_t^1 \subseteq B_t^2 \subseteq B_t^3 \subseteq B_t; \quad C_t^1 \subseteq C_t^2 \subseteq C_t^3 \subseteq C_t;$$

$$B_t \subset N_0; \quad A_t \subset N_1;$$

$(N_0 \setminus B_t)$ и $(N_1 \setminus A_t)$ — бесконечные множества; A_t и B_t — рекурсивные множества; C_t — конечное множество: $A_t \cap C_t = B_t \cap C_t = \varnothing$. На каждом этапе t может быть построена (в зависимости от того какой случай имеет место на шаге 4) последовательность конечных множеств $\{D_{k_t}\}$.

Положим $A = \bigcup_t A_t$, $B = \bigcup_t B_t$.

Этап 0. $A_0 = B_0 = C_0 = \varnothing$.

Этап $t+1$. Шаг 1. Пусть m_0 есть наименьшее число, принадлежащее $N_1 \setminus (A_t \cup C_t)$. Если существует такое k-продолжение $\tilde{B}$ множества B_t, что $(\tilde{B} \subset N_0 \,\&\, \tilde{B} \cap C_t = \varnothing \,\&\, m_0 \in T_t^0(\tilde{B}))$, то $B_t^1 = \tilde{B}_0$ (где $\tilde{B}_0$ — первое из таких k-продолжений при эффективном перечислении всех k-продолжений B_t), $C_{t+1}^1 = C_t \cup \{m_0\}$, $A_{t+1}^1 = A_t$. Если же нет, то $A_{t+1}^1 = A_t \cup \{m_0\}$, $B_{t+1}^1 = B_t$, $C_{t+1}^1 = C_t$. (Шаг 1 обеспечивает $\neg(S_Q \leqslant_\mu S_P)$).

Шаг 2. Пусть m_1 — наименьшее число, принадлежащее $N_0 \setminus B_{t+1}^1 \cup C_{t+1}^1$. Включим его в B_{t+1}^2, если $m_1 \bar{\in} W_t$ (таким образом $B_{t+1}^2 = B_{t+1}^1 \cup \{m_1\}$, $A_{t+1}^2 = A_{t+1}^1$, $C_{t+1}^2 = C_{t+1}^1$) и в C_{t+1}^2, если $m_1 \in W_t$.

$$(C_{t+1}^2 = C_{t+1}^1 \cup \{m_1\}, \quad B_{t+1}^2 = B_{t+1}^1, \quad A_{t+1}^2 = A_{t+1}^1).$$

Шаг 3. Проверим, существует ли такое k-продолжение $\tilde{B}$ множества B_{t+1}^2, что $(\tilde{B} \subset N_0 \,\&\, \tilde{B} \cap C_{t+1}^2 = \varnothing \,\&\, \Phi_t(\tilde{B})$ не однозначно). Если существует, то положим $B^3_{i+1} = \widetilde{B}_0$, (где $\widetilde{B}_0$ — первое из таких k-продолжений (при эффективном перечислении всех k-продолжений B^2_{i+1})), $A^3_{i+1} = A^2_{i+1}$, $C^3_{i+1} = C^2_{i+1}$.

Если нет, то проверим существует ли такое $\widetilde{D}$ и такое n, что $\widetilde{D} \subset N_0 \setminus B^2_{i+1}$ и $\forall \widetilde{B}\,[(\widetilde{B}$ — k-продолжение B^2_{i+1} & $\widetilde{B} \cap (\widetilde{D} \cup C^2_i) = \varnothing) \Rightarrow$ $\Rightarrow \Phi_i(\widetilde{B})(n)$ не определено].

Если да, то $C^3_{i+1} = C^2_{i+1} \cup \widetilde{D}_0$, $A^3_{i+1} = A^2_{i+1}$, $B^3_{i+1} = B^2_{i+1}$, (где D_0 — наименьшее из таких $\widetilde{D}$).

Если нет, то $C^3_{i+1} = C^2_{i+1}$, $A^3_{i+1} = A^2_{i+1}$, $B^3_{i+1} = B^2_{i+1}$.

В этом случае функция $\Phi_i(B)$ должна быть общерекурсивной, если только она всюду определена, так как ее значения можно эффективно вычислять, перечисляя все k-продолжения рекурсивного множества B^2_{i+1} и подставляя их в Φ_i.

Таким образом, B не может быть рекурсивно перечислимым (см. шаг 2) и для всякой всюду определенной функции f $f \leqslant_e B \Rightarrow f$ — общерекурсивная функция (см. шаг 3), то есть $\underline{B}$ квазиминимальна (по e-).

Шаг 4. Случай 1.

$$(\exists \widetilde{D} \subseteq \overline{A^3_{i+1} \cup B^3_{i+1}})\ [\widetilde{D} \text{ конечно } \& (\forall \langle m, k \rangle \in T^0_i)$$

$$[\neg(D_k \subseteq A^3_{i+1} \cup B^3_{i+1}) \Rightarrow D_k \cap \widetilde{D} \neq \varnothing]].$$

В этом случае $C_{i+1} = C^3_{i+1} \cup \widetilde{D}_0$ (где $\widetilde{D}_0$—наименьшее из таких $\widetilde{D}$),

$$B_{i+1} = B^3_{i+1}, \quad A_{i+1} = A^3_{i+1}.$$

Случай 2. Не имеет места случай 1 и

$$(\exists \widetilde{D} \subseteq \overline{A^3_{i+1} \cup B^3_{i+1}})\ [\widetilde{D} \text{ конечно } \& (\forall \langle m, k \rangle \in T^2_i)$$

$$[\neg(D_k \subseteq N_0 \cup A^3_{i+1}) \Rightarrow D_k \cap \widetilde{D} \neq \varnothing]].$$

В этом случае $C_{i+1} = C^3_{i+1} \cup \widetilde{D}_0$ (где $\widetilde{D}_0$—наименьшее из таких $\widetilde{D}$),

$$B_{i+1} = B^3_{i+1}, \quad A_{i+1} = A^3_{i+1}.$$

Случай 3. Не имеют места случаи 1 и 2 и

$$(\exists \widetilde{D} \subseteq (N_0 \setminus B^3_{i+1}))\ [\widetilde{D} \text{ конечно } \& (\forall \langle m, k \rangle \in T^0_i)$$

$$[\neg(D_k \subseteq N_1 \cup B^3_{i+1}) \Rightarrow D_k \cap \widetilde{D} \neq \varnothing]].$$

В этом случае существует рекурсивное перечисление $\langle m_0, k_0 \rangle$, $\langle m_1, k_1 \rangle$, ... подмножества T_t^0 такого, что

$$\forall i\, [D_{k_i} \cap C_{t+1}^3 = \varnothing \,\&\, D_{k_i} \cap (N_1 \setminus A_{t+1}^3) \neq \varnothing \,\&\, D_{k_i} \cap (N_0 \setminus (B_{t+1}^3 \cup \tilde{D}_0)) = \varnothing$$
$$\&\, \max (D_{k_i} \cap (N_1 \setminus A_{t+1}^3)) < \min (D_{k_{i+1}} \cap (N_1 \setminus A_{t+1}^3))] \qquad (1)$$

(где $\tilde{D}_0$ — наименьшее из таких $\tilde{D}$).

Продолжим A_{t+1}^3 следующим образом:

$$C_{t+1} = C_{t+1}^3 \cup \tilde{D}_0,\ A_{t+1} = N_1 \setminus (\{\min (D_{k_i} \cap (N_1 \setminus A_{t+1}^3)) \mid i \in N\} \cup C_{t+1});$$
$$B_{t+1} = B_{t+1}^3.$$

Выполнение условия (1) гарантирует, что A_{t+1} рекурсивно и $N_1 \setminus A_{t+1}$ бесконечно.

Случай 4. Не имеет места ни один из предыдущих случаев. В этом случае существует рекурсивное перечисление $\langle m_0, k_0 \rangle$, $\langle m_1, k_1 \rangle$, ... подмножества T_t^0 такого, что

$$\forall i\, [D_{k_i} \cap C_{t+1}^3 = \varnothing \,\&\, D_{k_i} \cap (N_1 \setminus A_{t+1}^3) \neq \varnothing \,\&\, \max (D_{k_i} \cap (N_1 \setminus A_{t+1}^3)) <$$
$$< \min (D_{k_{i+1}} \cap (N_1 \setminus A_{t+1}^3))] \,\&\, \forall ij [[j > i \,\&\, D_{k_i} \cap (N_0 \setminus B_{t+1}^3) \neq \varnothing \,\&$$
$$\&\, D_{k_j} \cap (N_0 \setminus B_{t+1}^3) \neq \varnothing] \Rightarrow \exists x\, [x \in (N_0 \setminus (B_{t+1}^3 \cup C_{t+1}^3)) \,\&\, \max (D_{k_i} \cap$$
$$\cap (N_0 \setminus B_{t+1}^3)) < x < \min (D_{k_j} \cap (N_0 \setminus B_{t+1}^3))]]. \qquad (2)$$

Продолжим A_{t+1} следующим образом:

$$C_{t+1} = C_{t+1}^3,\ A_{t+1} = N_1 \setminus (\{\min (D_{k_i} \cap (N_1 \setminus A_{t+1}^3)) \mid i \in N\} \cup C_{t+1});$$
$$B_{t+1} = B_{t+1}^3 \cup (N_0 \cap \bigcup_i D_{k_i}).$$

Выполнение условия (2) гарантирует, что $N_1 \setminus A_{t+1}$ бесконечно, A_{t+1} рекурсивно и $N_0 \setminus B_{t+1}$ бесконечно.

Если имеет место случай 1, то $T_t^0(Q)$ рекурсивно перечислимо (напомним, что $Q = B \cup A = P \oplus \hat{A}$).

Если имеет место случай 2, то $S_{T_t^0(Q)} \leqslant_\mu S_B$.

Если имеют место случаи 3 или 4, то следующие факты: конечность C_t;

$$N_1 \setminus A \subseteq C_t \cup \{\min (D_{k_i} \cap (N_1 \setminus A_t^3) \mid i \in N\};$$

$$\min (D_{k_i} \cap (N_1 \setminus A_t^3)) \in A \Longleftrightarrow m_i \in T_t^0(Q)$$

(так как $[x \in A \setminus A_t \,\&\, x = \min (D_{k_i} \cap (N_1 \setminus A_t^3))] \Rightarrow D_{k_i} \subset B \cup A$) обеспечивают выполнение условия $S_A \leqslant_\mu S_{T_t^0(Q)}$ (так как A_t рекурсивно).

Таким образом, если $S_P \leqslant_\mu S_{T_t^0(Q)}$, то $S_Q \leqslant_\mu S_{T_t^0(Q)}$.

Заметим, что из доказательства теоремы (для $\underline{a}=0$) следует (с учетом того, что $S_A \leqslant_\mu S_B \Longleftrightarrow A \leqslant_{pc} B$ (см. [6], [7])), что существует квазиминимальная степень $\underline{b}$ (по pc-), имеющая минимальное покрытие (по pc-).

В общем случае, для $\underline{a} \in \Theta$, построим множества P и Q такие, что $a \oplus S_P \leqslant_\mu a \oplus S_Q$, степень $\underline{a \oplus S_P}$ $\underline{a}$-квазиминимальна и

$$a \oplus S_E \leqslant_\mu a \oplus S_Q \Rightarrow [S_E \leqslant_\mu S_P \vee a \oplus S_Q \leqslant_\mu a \oplus S_E].$$

Для этого в предыдущем доказательстве T_i^0 заменим на

$$T_i^{0,a} = \{\langle m, k\rangle \mid \exists k' [\langle \langle m, 0\rangle, k'\rangle \in T_i \,\&\, D_k \subseteq D_{k'} \,\&\, D_k \subseteq$$

$$\subseteq N \otimes \{0\} \,\&\, \forall n, r [[\langle 2n, r\rangle \in D_{k'} \Rightarrow a(n) = r \,\&$$

$$\& [\langle 2n+1, r\rangle \in D_{k'} \Rightarrow \langle n, r\rangle \in D_k]]]\}.$$

Благодаря тотальности a, каждая из последовательностей $\langle m_0, k_0\rangle$, $\langle m_1, k_1\rangle, \ldots$ использованных в случаях 3 или 4, является областью изменения соответствующей всюду определенной функции μ-сводящейся к a.

А так же нужно произвести следующие изменения:

1) на шаге 2 задать вопрос „$\langle m_1, 0\rangle \in T_i(a)$?" а не „$m_1 \in W_i$?" и в зависимости от ответа произвести действия аналогичные действиям (в соответствующей ситуации) в предыдущем доказательстве;

2) на шаге 3 заменить Φ_i на $T_i^{0,a}$.

Ա. Հ. ՄՈԿԱՑՅԱՆ

ՈՉ ՏՈՏԱԼՈՒԹՅՈՒՆ ԵՎ ՄԻՆԻՄԱԼ μ-ԾԱԾԿՈՒՅԹՆԵՐ

Դիցուք $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ անլուծելիության μ-աստիճաններ են։

$\underline{b}$ աստիճանը կոչվում է $\underline{a}$-քվազիմինիմալ, եթե $\underline{a} < \underline{b}$ և $\forall \underline{c}(((\underline{c}$ տոտալ է$) \,\&\, (\underline{c} \leqslant \underline{b})) \Rightarrow (\underline{c} \leqslant \underline{a}))$:

$\underline{b}$ աստիճանը կոչվում է $\underline{a}$-մինիմալ (մինիմալ ծածկույթ $\underline{a}$-ի համար), եթե $\underline{a} < \underline{b}$ և $\forall \underline{c}(\underline{a} \leqslant \underline{c} \leqslant \underline{b} \Rightarrow (\underline{c} = \underline{a} \vee \underline{c} = \underline{b}))$:

Սասսոն [2] ապացուցել է, որ կամայական տոտալ μ-աստիճանը ունի մինիմալ ծածկույթ։

Այս հոդվածում ապացուցված է մինիմալ ծածկույթ ունեցող ոչ տոտալ μ-աստիճանների գոյությունը։

Կամայական $\underline{a}$ տոտալ μ-աստիճանի համար կառուցված է մինիմալ ծածկույթ ունեցող $\underline{a}$-քվազիմինիմալ μ-աստիճան։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Davis M.* Computability and unsolvability, McGraw-Hill Book Company, New York, 1958.
2. *Sasso L.* A survey of partial degrees. The Journal of Symbolic Logic, v. 40, 130—140, 1975.
3. *Поляков В. А., Розинас М. Г.* Теория алгоритмов. Иваново, 1976.
4. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М., Мир, 1972.
5. *Медведев Ю. Т.* Степени трудности массовых проблем. ДАН СССР, 104, 501—504, 1955.
6. *Sasso L.* A minimal partial degree $<0'$, Proc. of Amer. Math. Soc., 38, 2, 388—392, 1973.
7. *Скордев Д. Г.* О частичной конъюктивной сводимости, II Всесоюзная конференция по мат. логике, Тезисы, М., 43—44, 1972.