Р. Г. СИМОНЯН

ПРОСТРАНСТВА ТОЛЕРАНТНОСТИ, ИНДУЦИРУЕМЫЕ МАЖОРИТАРНЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ

1. *Введение.* Отношение толерантности есть формальный аналог интуитивного понятия (неполного) сходства. Известно следующее: если на множестве X задано отношение толерантности, то можно задать на X семейство канонических бинарных признаков, таких, что любые два элемента из X толерантны тогда и только тогда, когда они обладают хотя бы одним общим признаком. В данной работе рассматривается специфический класс толерантностей, при котором требуется совпадение значений «большинства» признаков. Последнее выражение уточняется с помощью понятия мажоритарного пространства (см. [2]).

Коротко о содержании. В пункте 2 дается сводка предварительных определений и фактов. Все это взято из [1, 2]. В пункте 3 доказывается теорема об изоморфизме компонент пространства. Основная теорема пункта 3 утверждает, что аксиома М3) для мажоритарных пространств в нашем случае не играет большой роли. В пункте 4 вводится понятие правильного класса толерантности и показывается, что совокупность этих классов образует базис пространства. Там же даны необходимые и достаточные условия минимальности этого базиса. В пункте 5 доказываются некоторые факты о расстояниях между объектами (расстояние в нашем случае может служить мерой сходства). Наконец, в пункте 6 рассматриваются аналоги между изучаемыми толерантностями и конгруэнциями на булевых алгебрах.

Тема данной работы предложена автору Шрейдером Ю. А.

2. *Сводка необходимых сведений.* Все определения данного пункта взяты из работ [1, 2] за одним исключением: наше понятие базиса шире, чем предложенное в [1], которому в данной работе соответствует понятие минимального по включению базиса.

Толерантностью называется произвольное рефлексивное и симметричное отношение. Пара $\langle X, \tau \rangle$ — где τ — толерантность на X, называется *пространством толерантности. Предклассом толерантности* называется любое подмножество из X, все элементы которого попарно толерантны друг к другу. Максимальные по включению предклассы называются *классами толерантности.* Совокупность всех классов толерантности полностью определяет пространство толерантности в следующем смысле: x толерантно y тогда и только тогда, когда существует класс толерантности, содержащий и x, и y. Часто, однако, для полного определения пространства толерантности в описанном выше смысле достаточно лишь части классов толерантности. Любая такая совокупность классов толерантности будет называться *базисом* пространства толерантности. Всякий базис содержит в себе минимальный по включению базис.

Будем писать $x \equiv_\tau y$, если справедливо соотношение

$$\forall z (x \tau z \Longleftrightarrow y \tau z).$$

Ясно, что $\equiv_\tau$ есть эквивалентность. Классы эквивалентности по $\equiv_\tau$ называются *ядрами толерантности*. Толерантность τ есть эквивалентность тогда и только тогда, когда τ совпадает с $\equiv_\tau$.

Мажоритарным пространством на некотором множестве X называется пара $\langle X, \mathfrak{M} \rangle$, где $\mathfrak{M}$ — семейство подмножеств из X, удовлетворяющее следующим условиям:

M1) $X \in \mathfrak{M}$;

M2) $A \in \mathfrak{M} \,\&\, A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathfrak{M}$ $\quad A, B \subseteq X$;

M3 $A \in \mathfrak{M} \Rightarrow \overline{A} \notin \mathfrak{M}$ $\quad A \subseteq X, \ \overline{A} = X \setminus A$.

Элементы из $\mathfrak{M}$ называются *большинствами*. *Доминирующим* называется любое подмножество A из X такое, что для любого большинства C имеем $A \cap C \in \mathfrak{M}$. Совокупность доминирующих множеств есть подмножество $\mathfrak{M}$ и образует фильтр в $B(X)$ ($B(X)$ — множество всех подмножеств из X).

Говорят, что пространство $\langle X, \mathfrak{M} \rangle$ *конечного ранга*, если существуют $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{M}$ такие, что $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \varnothing$; при этом n будет называться *рангом* пространства, если для всякого набора из $n-1$ большинств, их пересечение не пусто.

3. *Основное определение и некоторые его следствия.* Монотонные системы. Пусть задано мажоритарное пространство $\langle X, \mathfrak{M} \rangle$. Определим на $B(X)$ отношение τ правилом:

$$A \tau B \underset{df}{\Longleftrightarrow} A \oplus B \in \mathfrak{M}, \quad \text{где } A \oplus B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}).$$

Введенное нами отношение есть толерантность. Симметричность τ следует из коммутативности операции $\oplus$, а рефлексивность — из соотношения $A \oplus A = X \in \mathfrak{M}$.

Нашей задачей будет характеризация пространства $\langle B(X), \tau \rangle$.

Теорема 1. *$A \equiv_\tau B$ тогда и только тогда, когда $A \oplus B$ есть доминирующее множество.*

Доказательство. Пусть $A \oplus B$ доминирующее множество. Следует показать, что $A \tau C$ эквивалентно $B \tau C$ для любого C. Пусть $A \tau C$. Тогда по определению $A \oplus C \in \mathfrak{M}$. Так как $A \oplus B$ — доминирующее множество, то

$$(A \oplus B) \cap (A \oplus C) \in \mathfrak{M}, \tag{1}$$

Однако

$$(A \oplus B) \cap (A \oplus C) \subseteq (A \oplus B) \oplus (A \oplus C) = C \oplus B. \tag{2}$$

Из (1) и (2), по M2) выводим $C \oplus B \in \mathfrak{M}$, что, по определению, означает $B \tau C$. Симметрично, из $B \tau C$ следует $A \tau C$. Тем самым $A \equiv_\tau B$.

Пусть теперь $A \oplus B$ не является доминирующим множеством. Тогда имеется $C \in \mathfrak{M}$, такое, что $C \cap (A \oplus B) \bar{\in} \mathfrak{M}$. Положим $D = A \oplus (C \cap (A \oplus B))$. С одной стороны,

$$D \oplus A = A \oplus A \oplus (C \cap (A \oplus B)) = C \cap (A \oplus B) \bar{\in} \mathfrak{M}$$

и потому $D \bar{\tau} A$. С другой — из тождества $Y \oplus (Z \cap Y) = Z \cup \overline{Y}$ (проверяется непосредственно) выводим

$$D \oplus B = (A \oplus B) \oplus (C \cap (A \oplus B)) = C \cup (\overline{A \oplus B}).$$

Тогда $C \subseteq D \oplus B$, что вместе с $C \in \mathfrak{M}$ дает $D \oplus B \in \mathfrak{M}$, т. е. $D \tau B$. Итак $D \bar{\tau} A$ и $D \tau B$, значит, $A \not\equiv_\tau B$. Теорема доказана.

Следствие. *Толерантность τ есть эквивалентность тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ есть фильтр.*

Доказательство. Если $\mathfrak{M}$ — фильтр, то из определения τ следует, что τ — эквивалентность. Обратно, пусть τ — эквивалентность. Как сказано в п. 2, в этом случае τ совпадает с $\equiv_\tau$. Мы покажем, что $\mathfrak{M}$ состоит из одних доминирующих множеств, поскольку их совокупность образует фильтр, то тем самым все будет доказано. Итак, пусть $C \in \mathfrak{M}$; тогда $X \oplus C = C \in \mathfrak{M}$. По определению, $X \tau C$, а это в нашем случае влечет $X \equiv_\tau C$. Наконец, по теореме 1, $X \oplus C = C$ — доминирующее множество. Следствие доказано.

Следующая теорема нужна для обоснования важного определения. *Компонентой связности* пространства $\langle B(X), \tau \rangle$ назовем компоненту связности графа отношения τ.

Теорема 2. *В пространстве $\langle B(X), \tau \rangle$ все компоненты связности изоморфны между собой.*

Доказательство. Для любого $B \subseteq X$ определим отображение $\varphi_B : B(X) \to B(X)$ правилом $\varphi_B(A) \underset{df}{=} A \oplus B$. Поскольку $B(X)$ есть группа относительно операции $\oplus$, а φ_B есть просто сдвиг на этой группе, то Y_B взаимно-однозначно. Кроме того,

$$A \oplus A' = (A \oplus B) \oplus (A' \oplus B) = \varphi_B(A) \oplus \varphi_B(A'),$$

откуда следует, что $A \tau A$ тогда и только тогда, когда $\varphi_B(A) \tau \varphi_B(A')$. Короче, φ_B есть автоморфизм пространства $\langle B(X), \tau \rangle$. Поэтому если K — компонента связности, то $\varphi_B(K)$ также компонента связности, причем изоморфная K. Так как уравнение $A \oplus Y = C$ имеет при любых A, $C \subseteq X$ в точности одно решение, то $\varphi_B(K)$ при различных B пробегает все компоненты связности. Теорема доказана.

Мы несколько расширим предмет исследования, впрочем, как будет видно ниже, несущественно. Дело в том, что введенное выше определение отношения τ на $B(X)$ имеет смысл и при более общих условиях, когда $\mathfrak{M}$ будет произвольной *монотонной системой*, т. е. $\mathfrak{M}$ будет удовлетворять лишь условиям M1) и M2) пункта 1. Все предыдущее изложение не использовало M3), поэтому все доказанные факты сохраняют силу и при этих более общих условиях. Будем теперь $\mathfrak{M}$ считать монотонной системой и введем определение, которое корректно в силу теоремы 2.

Определение. *Будем говорить, что два пространства $\langle B(X), \tau \rangle$ и $\langle B(X'), \tau' \rangle$ имеют один и тот же тип, или однотипны, если компоненты связности их изоморфны.*

Ясно, что отношение однотипности есть эквивалентность. Типом пространств толерантности будем называть произвольный класс эквивалентности по этому отношению. Однотипные пространства могут различаться лишь количеством компонент связности, но внутренние структуры их компонент одинаковы.

Выделим теперь среди монотонных систем два класса. Один класс составят уже известные нам мажоритарные системы, во второй класс попадут монотонные системы, которые удовлетворяют условиям M1), M2) и

$$\text{M4)} \quad \cap A = \varnothing \ (A \in \mathfrak{M}).$$

Объединение этих двух классов дает все монотонные системы, потому что если $\mathfrak{M}$ не удовлетворяет условию M3), то найдется такое $A \in \mathfrak{M}$, что $\bar{A} \in \mathfrak{M}$, а тогда обязательно имеет место M4).

Соответствующие классы пространств толерантности обозначим через Γ_1 и Γ_2.

Теорема 3. *Любой тип пространств толерантности имеет непустое пересечение как с Γ_1, так и с Γ_2.*

Доказательство. Нужно доказать, что для любого пространства толерантности из Γ_1 существует однотипное ему пространство из T_2 и наоборот.

Пусть $\langle B(X), \tau \rangle$ находится в классе Γ_1 и $\langle X, \mathfrak{M} \rangle$ — соответствующее мажоритарное пространство. Через X_0 обозначим $\cap A (A \in \mathfrak{M})$. Если $X_0 = \varnothing$, то $\langle B(X), \tau \rangle$ уже лежит в Γ_2 и для него соответствующее утверждение доказано. Пусть $X_0 \neq \varnothing$.

Для каждого $Y \subseteq X_0$ через $B_Y(X)$ обозначим семейство $\{B \subseteq X /$ $B \cap X_0 = Y\}$. Очевидно, что $\{B_Y(X)\}_{Y \subseteq X_0}$ образует разбиение $B(\lambda)$. Пусть $Y, Y' \subseteq X_0$, $Y \neq Y'$ (поскольку $X_0 \neq \varnothing$, такие Y и Y' найдутся), $B \in B_Y(X)$, $B' \in B_{Y'}(X)$. Покажем, что $B \bar{\tau} B'$.

Положим, для определенности $Y \setminus Y' \neq \varnothing$. Так как $Y \subseteq B$, $Y' \subseteq B'$, то $Y \setminus Y' \subseteq B \setminus B'$, а потому

$$(Y \setminus Y') \cap (B \oplus B') = \varnothing. \tag{3}$$

С другой стороны, $Y \setminus Y' \subseteq X_0 = \cap A$ и значит для всякого $A \in \mathfrak{M}$ $Y \setminus Y' \subseteq A$. Последнее вместе с (3) дает $B \oplus B' \bar{\in} \mathfrak{M}$, или, что то же, $B \bar{\tau} B'$.

Теперь ясно, что если Y, $Y' \subseteq X_0$, $Y \neq Y'$, то никакое $B \in B_Y(X)$ не связано ни с каким $B' \in B_{Y'}(X)$. Иными словами, для любого $Y \subseteq X_0$ всякая компонента связности либо не пересекается с $B_Y(X)$, либо целиком содержится в нем.

Далее заметим, что $B_{\varnothing}(X)$ есть просто $B(\overline{X}_0)$. Пусть τ' — толерантность, являющаяся ограничением толерантности τ на $B(\overline{X}_0)$. Мы выше уже показали, что всякая компонента связности пространства $\langle B(\overline{X}_0), \tau' \rangle$ есть компонента пространства $\langle B(X), \tau \rangle$; по теореме 2, эти пространства имеют изоморфные компоненты связности.

Ниже мы покажем, что $\langle B(\overline{X}_0), \tau' \rangle \in \Gamma_2$ и этим первая часть доказательства завершится.

Для доказательства выделим на $\overline{X}_0$ семейство подмножеств $\mathfrak{M}' = \{A \subseteq \overline{X}_0 / \exists B \in \mathfrak{M}\, (A = B \setminus X_0)\}$. Очевидно, что $\overline{X}_0 = X \setminus X_0 \in \mathfrak{M}'$. Значит $\langle \overline{X}_0, \mathfrak{M}' \rangle$ удовлетворяет M1). Так же легко показать, что $\langle \overline{X}_0, \mathfrak{M}' \rangle$ удовлетворяет M2). Наконец, $\cap A = \cap (B \setminus X_0) = (\cap B) \setminus$ $\setminus X_0 = X_0 \setminus X_0 = \varnothing (AB \in \mathfrak{M})$. Таким образом, $\langle \overline{X}_0, \mathfrak{M}' \rangle$ удовлетворяет M4). Остается показать, что $A \tau' A' \Longleftrightarrow A \oplus_{\overline{X}_0} A' \in \mathfrak{M}'$ для всех A, $A' \subseteq \overline{X}_0$. Заметим, что

$$A \setminus X_0 = A,\ A' \setminus X_0 = A',\ \overline{X}_0 \setminus A = (X \setminus X_0) \setminus A = (X \setminus A) \setminus X_0$$

и

$$\overline{X}_0 \setminus A' = (X \setminus A') \setminus X_0.$$

Тогда верна цепочка соотношений

$$A \underset{\overline{X}_0}{\oplus} A' \in \mathfrak{M}' \Longleftrightarrow (A \cap A') \cup ((\overline{X}_0 \setminus A) \cap (\overline{X}_0 \setminus A')) \in \mathfrak{M}' \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow ((A \setminus X_0) \cap (A' \setminus X_0)) \cup (((X \setminus A) \setminus X_0) \cap (((X \setminus A') \setminus X_0)) \in \mathfrak{M}' \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow ((A \cap A') \cup ((X \setminus A) \cap (X \setminus A'))) \setminus X_0 \in \mathfrak{M}' \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (A \cap A') \cup (\overline{A} \cap \overline{A'}) \in \mathfrak{M} \Longleftrightarrow A \oplus A' \in \mathfrak{M} \Longleftrightarrow A \tau A'.$$

Так как τ' есть ограничение τ на $\overline{X}_0$, то $A \tau A' \Longleftrightarrow A \tau' A'$. Таким образом, τ' порождается $\mathfrak{M}'$ и тем самым установлено, что $\langle B(\overline{X}_0), \tau' \rangle \in \Gamma_2$.

Пусть обратно, $\langle B(X), \tau \rangle$ принадлежит классу Γ_2; найдем однотипное с ним пространство Γ_1. Для этого положим $Y = X \cup \{X\}$, $\mathfrak{M}' = \{A \cup \{X\} / A \in \mathfrak{M}\}$. Так как $\mathfrak{M}$ — монотонная система, то и $\mathfrak{M}'$ — монотонная система. Кроме того, $Y_0 = \cap B = \{X\} \neq \varnothing\ (B \in \mathfrak{M}')$, так что $\mathfrak{M}'$ удовлетворяет M3). Таким образом, $\langle B(Y), \tau_{\mathfrak{M}'} \rangle$ принадлежит классу Γ_1. Наконец, поскольку $B(X) = B_{\varnothing}(Y)$, то по первой части доказательства $\langle B(X), \tau \rangle$ и $\langle B(Y), \tau_{\mathfrak{M}'} \rangle$ однотипны. Теорема доказана.

Нас в данной работе интересует внутренняя структура пространств толерантности и потому как предыдущие, так и дальнейшие наши утверждения зависят не от конкретных пространств, но от их типов. Исключения будут явно оговариваться. Это означает, что будут рассматриваться (как и рассматривались ранее) утверждения, которые справедливы относительно какого-либо конкретного пространства тогда и только тогда, когда они справедливы и для всех однотипных к нему пространств. Поэтому мы можем по своему усмотрению предполагать выполненным М3) или М4) или даже отбросить оба этих условия, так как, по теореме 3, в каждом из классов T_1, T_2 и $T = T_1 \cup T_2$ всякий тип имеет своего представителя. Это особенно удобно при построении контрпримеров.

4. *Правильные классы толерантности.* Правильный базис. Пусть $A, B \subseteq X$. *Сегментом* $[A, B]$ будем называть множество $\{C \subseteq X / A \cap B \subseteq C \subseteq A \cup B\}$. Предкласс (а также класс) толерантности назовем *правильным*, если он с любыми двумя своими элементами A и B содержит весь сегмент $[A, B]$.

Лемма 1. *$A \tau B$ тогда и только тогда, когда $[A, B]$ — правильный предкласс.*

Доказательство. Если $[A, B]$ — правильный предкласс, то так как $A, B \in [A, B]$, то $A \tau B$. Пусть $A \tau B$ и пусть $C, C' \in [A, B]$. Надо показать, что $[C, C'] \subseteq [A, B]$ и $C \tau C'$. Имеем $A \cap B \subseteq C \cap C'$ и $C \cap C' \subseteq A \cup B$. Из последнего выводим также $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} \subseteq \overline{C \cup C'} = \overline{C} \cap \overline{C'}$. Первые два из выписанных соотношений дают $C'' \in [C, C'] \Longleftrightarrow C'' \in [A, B]$, т. е. $[C, C'] \subseteq [A, B]$. Первое с третьим дают $A \oplus B \subseteq C \oplus C'$, а поскольку $A \oplus B \in \mathfrak{M}$, то $C \oplus C' \in \mathfrak{M}$, т. е. $C \tau C'$. Лемма доказана.

Теорема 4. *Всякий правильный предкласс толерантности можно вложить в некоторый правильный класс толерантности.*

Доказательство. Упорядочим совокупность всех правильных предклассов по включению. Пусть $\mathbf{K}$—максимальная цепь правильных предклассов и пусть $K^* = \bigcup_{K \in \mathbf{K}} K$. Если $A, B \in K^*$, то $A, B \in K$ для некоторого $K \in \mathbf{K}$. Тогда $A \tau B$ и $[A, B] \subseteq K \subseteq K^*$. Тем самым показано, что K^* — правильный предкласс. Покажем, что K^* есть класс толерантности; этим мы докажем теорему. Достаточно показать, что если $A \subseteq X$ толерантно всем элементам из K^*, то $A \in K^*$. Для доказательства последнего рассмотрим $A^* = \bigcup_{B \in K^*} [A, B]$. Разумеется, $K^* \subseteq A^*$ и $A \in A^*$. Если мы покажем, что A^* — правильный предкласс, то из максимальности $\mathbf{K}$ будет следовать, что $A^* = K^*$, откуда $A \in K^*$.

Итак, нам осталось показать, что если $C', C'' \in A^*$, то $C' \tau C''$ и $[C', C''] \subseteq A^*$. На самом деле, достаточно найти такое $B \in K^*$, что $C', C'' \in [A, B]$. Тогда, поскольку $A \tau B$, то $[A, B]$ — правильный предкласс, откуда следует как $C' \tau C''$, так и $[C', C''] \subseteq [A, B] \subseteq \bigcup_{B \in A^*} [A, B] = A^*$.

Пусть $C', C'' \in A^*$. Тогда существуют $B', B'' \in K^*$ такие, что $C \in [A, B]$ и $C'' \in [A, B'']$. В качестве B выберем $(B' \cap B'') \cup ((C' \cup C'') \setminus A)$.

С одной стороны,

$$B' \cap B'' \subseteq B. \tag{4}$$

С другой стороны, $C' \cup C'' \subseteq A \cup B' \cup B''$ и значит

$$(C' \cup C'') \setminus A \subseteq B' \cup B''. \tag{5}$$

Из (5) следует $B \subseteq B' \cup B''$, а последнее вместе с (4) дает $B \in [B', B'']$, а так как K^* — правильный предкласс, то $[B', B''] \subseteq K^*$ и, значит, $B \in K^*$.

Осталось показать, что $C', C'' \in [A, B]$. Так как $A \cap B' \subseteq C'$ и $A \cap B'' \subseteq C''$, то требуемое соотношение следует из цепочки

$$A \cap B = A \cap B' \cap B'' \subseteq C', \quad C'' \subseteq (B' \cap B') \cup C' \cup C'' \subseteq$$

$$\subseteq (B' \cap B') \cup ((C' \cup C'')) \setminus A) \cup A = A \cup B.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Правильные классы толерантности образуют базис пространства* $\langle B(X), \tau \rangle$.

Доказательство. Следует непосредственно из леммы и теоремы 4.

Пусть φ_B — автоморфизм пространства $\langle B(X), \tau \rangle$, определенный в пункте 3. Очевидно, что $\mathbf{A}$ — класс толерантности тогда и только тогда, когда $\varphi_B(\mathbf{A})$ класс толерантности. Если при этом $B \in \mathbf{A}$, то для любого $A \in \mathbf{A}$ имеем $B \tau A$ и, значит, $A \oplus B \in \mathfrak{M}$. Следовательно, в в этом случае $\varphi_B(\mathbf{A})$ — класс толерантности, целиком состоящий из большинств. Достаточно описать именно такие классы толерантности; все остальные можно получить с помощью автоморфизмов вида φ_B. До некоторой степени этому служит утверждение: класс $\mathbf{A} \subseteq \mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда $X \in \mathbf{A}$. В самом деле, из тождества $X \oplus B = B$ следует $X \tau B \Longleftrightarrow B \in \mathfrak{M}$. Это означает, с одной стороны, что всякий класс, состоящий из большинств, содержит и X, а с другой стороны, класс, содержащий X, не может содержать небольшинства.

Далее заметим, что любой автоморфизм φ_B переводит сегмент в сегмент (непосредственно вычисляется соотношение $\varphi_B([A, A']) = [A \oplus B, A' \oplus B]$). Это означает, что $\mathbf{A}$ — правильный класс толерантности тогда и только тогда, когда $\varphi_B(\mathbf{A})$ — правильный класс Вновь достаточно описать правильные классы, состоящие только из большинств. Их характеристика дается в следующей теореме.

Теорема 5. *Пусть* $\mathbf{A}$ — *класс толерантности и* $\mathbf{A} \subseteq \mathfrak{M}$ *Тогда* $\mathbf{A}$ — *правильный класс в том и только том случае, когда* $\mathbf{A}$ *есть максимальный по включению фильтр в* $\mathfrak{M}$.

Доказательство. В самом деле, если $\mathbf{A} \subseteq \mathfrak{M}$, то $X \in \mathbf{A}$. Если $\mathbf{A}$ к тому же правильный класс, то $\mathbf{A}$ вместе с любым $A \in \mathbf{A}$ содержит и весь сегмент $[A, X] = \{B / A \subseteq B\}$. С другой стороны, для любых $A, B \in \mathbf{A}$ имеем $[A, B] \subseteq A$ и, значит, $A \cap B \in A$, Таким образом, $\mathbf{A}$ — фильтр. Всякий фильтр, состоящий из большинств есть предкласс толерантности, причем правильный. Из всего сказанного следует наше утверждение.

Существуют пространства толерантности, в которых всякий класс толерантности правильный (например, если $\mathfrak{M}$ — фильтр; имеются и менее тривиальные примеры, скажем, при большинстве «в два голоса из трех»). Есть, однако, пространства, в которых имеется базис, не содержащий ни одного правильного класса толерантности. Позже будет построен соответствующий пример. Мажоритарные пространства, порождающие толерантность первого рода, будем называть *правильными*. Имеется простая их характеристика.

Теорема 6. *Пространство $\langle X, \mathfrak{M} \rangle$ правильное тогда и только тогда, когда для любых $A, B \in \mathfrak{M}$, $A \tau B \Longleftrightarrow A \cap B \in \mathfrak{M}$.*

Доказательство. Пусть $\langle X, \mathfrak{M} \rangle$ — правильное пространство и $A, B \in \mathfrak{M}$. Если $A \tau B$, то $\{A, B, X\}$ составят некоторый предкласс толерантности, который можно вложить в некоторый класс $\mathbf{A}$. Так как $X \in A$, то $\mathbf{A} \subseteq \mathfrak{M}$, а из правильности нашего пространства следует, что A — фильтр. Тогда $A \cap B \in \mathbf{A}$ и тем более $A \cap B \in \mathfrak{M}$. Если же $A \cap B \in \mathfrak{M}$, то из $A \cap B \subseteq A \oplus B$ следует $A \oplus B \in \mathfrak{M}$, то означает $A \tau B$.

Пусть теперь для всех $A, B \in \mathfrak{M}$ выполняется $A \tau B \Longleftrightarrow A \cap B \in \mathfrak{M}$. Пусть $A, B \subseteq \mathfrak{M}$, $A \tau B$. Это значит, что $A \cap B \in \mathfrak{M}$. Если $A \subseteq A'$, то $A' \in \mathfrak{M}$, и так как $A \cap B \subseteq A' \cap B$, то $A' \cap B \in \mathfrak{M}$. А тогда, по предположению $A' \tau B$. Это означает, что любой класс толерантности $\mathbf{A} \subseteq \mathfrak{M}$ вместе с любым $A \in \mathbf{A}$ содержит и все подмножества A, т. е. содержит сегмент $[A, X]$.

Далее, пусть $\mathbf{A}$ — произвольный класс толерантности пространства $\langle B(X), \tau \rangle$. Пусть $A, B \in A$. Тогда $\varphi_B(\mathbf{A})$ – класс толерантности, состоящий из большинств и $A \oplus B \in \varphi_B(\mathbf{A})$. По доказанному $[A \oplus B, X] \subseteq \varphi_B(\mathbf{A})$, а это возможно лишь при условии $[A, B] \subseteq A$. Последнее же означает, что $\mathbf{A}$ — правильный класс и теорема доказана.

Приведем пример пространства, в котором имеется базис, не содержащий ни одного правильного класса толерантности.

Пусть X — произвольное множество, такое, что $|X| \geqslant 3$. Положим $\mathfrak{M} = \{A / A \neq \varnothing\}$. Заметим, что соответствующее пространство толерантности лежит в $\Gamma_2 \setminus \Gamma_1$, однако, в соответствии с теоремой 3, нужный пример можно построить и с помощью мажоритарных пространств. В нашем пространстве $A \tau B \Longleftrightarrow A \oplus B \neq \varnothing$, т. е. $A \tau B \Longleftrightarrow B \neq \overline{A}$. Нетрудно видеть, что классы толерантности в этом пространстве — это такие совокупности подмножеств из X, что для любого $A \subseteq X$, из пары A, $\overline{A}$ в точности одно множество лежит в этом классе. В частности, любой класс толерантности содержит либо X, либо $\varnothing$, но не оба вместе. Опишем правильные классы в таком пространстве. Если $\mathbf{A}$ — правильный класс и $\mathbf{A} \subseteq \mathfrak{M}$, то, по теореме 5, $\mathbf{A}$ есть фильтр; так как для любого $A \subseteq A$ либо $A \in \mathbf{A}$, либо $\overline{A} \in \mathbf{A}$, то A — максимальный собственный фильтр. Если же $\mathbf{A} \setminus \mathfrak{M} \neq \varnothing$, то найдется B такое, что $B \in A$ и $B \overline{\in} \mathfrak{M}$. Поскольку $X \tau B$, то $X \overline{\in} \mathbf{A}$, а тогда $\varnothing \in \mathbf{A}$. Рассмотрим $\varphi_{\varnothing}(A)$. Это правильный класс, содержащий X (поскольку $\varnothing \in \mathbf{A}$), а потому является максимальным собственным фильтром. Но $\varphi_{\varnothing}(\mathbf{A}) = \{A \oplus \varnothing / A \in \mathbf{A}\} = \{\overline{A}/A \in \mathbf{A}\}$; отсюда следует. что $\mathbf{A}$ — максимальный собственный идеал.

Для каждого правильного класса $\mathbf{A}$ определим класс $\mathbf{A}^*$, поменяв X на $\varnothing$ или $\varnothing$ на X. Так как $|X| \geqslant 3$, то $\mathbf{A}^*$ не будет правильным, поскольку не является ни максимальным собственным фильтром, ни максимальным собственным идеалом. Мы утверждаем, что семейство $\{\mathbf{A}^*\}$ образует базис пространства $\langle B(X), \tau \rangle$. В самом деле, пусть $A, B \subseteq X$ и $A \tau B$. Тогда найдется правильный класс $\mathbf{A}$, такой, что $A, B \in \mathbf{A}$. Если $A, B \neq X, \varnothing$, то $A, B \in \mathbf{A}^*$. Если для определенности $B = X$, то пусть $\mathbf{A}$ — максимальный собственный идеал, содержащий A. Тогда $\mathbf{A}^*$ содержит и A и B. Аналогично, при $B = \varnothing$ находится класс вида $\mathbf{A}^*$, содержащий A и B. Пример построен.

Можно подсчитать, что если X — конечное множество, то в нашем пространстве имеется $2^{2^{|X|-1}}$ классов толерантности.

Опишем конструкцию, которая по заданному правильному мажоритарному пространству дает новое правильное мажоритарное пространство (принадлежащее уже другому типу, если пространство конечно).

Пусть $\langle X, \mathfrak{M} \rangle$ — правильное мажоритарное пространство и $a \overline{\in} X$. Положим $Y = X \cup \{a\}$ и пусть $\mathfrak{M}'$ состоит из всех множеств вида $A \cup \{a\}$, где $A \in \mathfrak{M}$, и, кроме того, $X \in \mathfrak{M}'$. Мы утверждаем, что $\langle Y, \mathfrak{M}' \rangle$ — правильное мажоритарное пространство. Соответствующие толерантности будем обозначать τ_M и $\tau_{M'}$.

Пусть $A, B \in \mathfrak{M}$ и $A \tau_{M'} B$. Надо показать, что $A \cap B \in \mathfrak{M}'$. Имеем $A \oplus_Y B \in \mathfrak{M}'$. Возможны два случая: $a \in A \oplus_Y B$ и $a \overline{\in} A \oplus_Y B$. В первом случае из A, B в точности одно равно X. Пусть для определенности $A = X$. Тогда $a \overline{\in} X \oplus_Y B$ и $X \oplus_Y B \in \mathfrak{M}'$, что влечет $X \oplus_Y B = X$; это возможно лишь в случае, когда $B = Y$. Но тогда $A \cap B = X \cap Y = X \in \mathfrak{M}'$. Второй случай разобъем на два подслучая: $a \in A \cap B$ и $a \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Во втором подслучае $a \overline{\in} A, B$, а так как $A, B \in \mathfrak{M}'$, то $A = B = X$. Понятно, что $A \cap B = X \in \mathfrak{M}'$.

Выпишем условия, при которых правильный базис (т. е. базис, состоящий из правильных классов толерантности) является минимальным по включению. Введем следующее определение.

Определение. *Пусть $T_A = \{B \subseteq X / B \tau A\}$. Совокупность классов толерантности, содержащих A и покрывающих T_A, назовем базисным покрытием T_A.*

Пусть для каждого A, π_A обозначает базисное покрытие T_A. Тогда $\bigcup\limits_{A\subseteq X} \pi_A$ есть базис пространства толерантности, поскольку для любых A и B, толерантных друг другу, найдется класс, скажем в π_A, а значит и в $\bigcup\limits_{A\subseteq X} \pi_A$, содержащий A и B. С другой стороны, любой базис можно представить в виде $\bigcup\limits_{A\subseteq X} \pi_A$, где π_A — некоторое базисное покрытие T_A. В самом деле, для любых толерантных друг к другу A и B, найдется в базисе класс содержащий A и B. Потому совокупность классов толерантности из базиса, содержащих A, покрывает T_A. Эта совокупность и образует π_A. В частности, если базис правильный, то π_A — совокупность правильных классов, содержащих A. Из сказанного выше, π_A образует базисное покрытие T_A, которое назовем *правильным покрытием*.

Теорема 7. *Пусть Q — правильный базис пространства $\langle B(X), \tau \rangle$ и π_A — правильное базисное покрытие T_A. Тогда Q — минимальный базис в том и только в том случае, когда для любого A π_A — минимальное по включению базисное покрытие T_A.*

Доказательство. Вновь используем автоморфизмы вида φ_A. Имеем $A \tau C$ тогда и только тогда, когда $B = \varphi_{A\oplus B}(A) \tau \varphi_{A\oplus B}(C) = C \oplus A \oplus B$. Поэтому $\varphi_{A\oplus B}(T_A) = T_B$, и $\varphi_{A\oplus B}(\pi_A) = \pi_B$. Пусть $A, A' \in \pi_A$ и $C \in A \cap A'$; тогда $\varphi_{A\oplus B}(C) \in \varphi_{A\oplus B}(A) \cap \varphi_{A\oplus B}(A)$. Поэтому, если какой-либо класс A из φ_A покрывается другими классами из π_A, то класс $\varphi_{A\oplus B}(A)$ покрывается другими классами из π_B.

Пусть A правильный класс толерантности и $A, B \in A$. Покажем, что $\varphi_{A\oplus B}(A) = A$. В самом деле, $\varphi_A(A)$ — правильный класс, состоящий из большинств вида $A \oplus B$, где $C \in A$), а потому фильтр. Имеем $A \oplus B \in \varphi_A(A)$; для любого $B' \in A$, $A \oplus B' \in \varphi_A(A)$, а так как $\varphi_A(A)$ — фильтр, то $(A \oplus B) \cap (A \oplus B') \in \varphi_A(A)$; тогда, поскольку $(A \oplus B) \cap (A \oplus B') \subseteq A \oplus B \oplus A \oplus B' = B \oplus B'$, то $B \oplus B' \in \varphi_A(B)$ для любого $B' \in A$. Это означает, что классы $\varphi_A(A)$ и $\varphi_B(A)$ совпадают, а тогда $\varphi_{A\oplus B}(A) = \varphi_{B\oplus B}(A) = A$.

Пусть теперь Q — правильный базис и он минимален. Пусть при этом, в противоречие с утверждением теоремы, A — некоторый класс толерантности из π_A, покрываемый другими классами из π_A. Пусть $B, B' \in A$. Как было сказано выше, $A = \varphi_{A\oplus B}(A)$ покрывается другими классами из π_B. Каждый из последних содержит B и хотя бы один содержит B'. Таким образом, для любых $B, B' \in A$ найден класс, отличный от A и содержащий B и B'. Это означает, что A можно исключить из базиса, хотя предполагалось, что Q — минимальный базис.

Обратное утверждение следует из следующей леммы.

Лемма 2. *Пусть Q — базис и для каждого A пусть π_A — совокупность всех классов базиса Q, содержащих A. Если Q не минимальный базис, то существует A такое, что π_A не минимальное базисное покрытие.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{A} \in Q$ и $Q \setminus \{\mathbf{A}\}$ — вновь базис. Это значит, что для любых $A, B \in A$ найдется Q такое, что $A, B \in \mathbf{A}'$. Зафиксируем A и для любого $B \in A$ через A_B обозначим класс такой, что $A, B \in \mathbf{A}_B$ и $\mathbf{A}_B \neq \mathbf{A}$. Тогда $\{\mathbf{A}_B\}_{B \in A} \subseteq \pi_A$ и покрывает $\mathbf{A}$. Лемма, а вместе с ней и теорема доказана.

Из доказательства теоремы можно извлечь следующее следствие. Как было сказано, π_A — минимальное правильное базисное покрытие T_A тогда и только тогда, когда $\varphi_B(\pi_A)$ есть также минимальное правильное базисное покрытие $T_{A \oplus B}$ при любом B. В частности, в качестве B можно выбрать само A. Тогда $\varphi_A(T_A) = T_X = \mathfrak{M}$ и $\varphi_A(\pi_A)$ есть просто совокупность минимальных в $\mathfrak{M}$ фильтров. Применение теоремы 7 дает

Следствие. *Правильный базис минимален тогда и только тогда, когда совокупность максимальных в $\mathfrak{M}$ фильтров образует минимальное базисное покрытие $\mathfrak{M}$.*

Далее можно получить следствие предыдущего следствия.

Следствие. *Если $\langle X, \mathfrak{M} \rangle$ — конечное мажоритарное пространство (и, более общо, если все максимальные в $\mathfrak{M}$ фильтры — главные), то правильные классы толерантности образуют минимальный базис в $\langle B(X), \tau \rangle$.*

Доказательство. Поскольку все максимальные в $\mathfrak{M}$ фильтры — главные, каждый из них порождается некоторым $A \subseteq X$, и A_0 не лежит ни в каком другом фильтре.

Заключая этот пункт, приведем пример пространства, в котором правильные классы толерантности не образуют минимального базиса.

Пусть X—бесконечное множество, а Φ—семейство всех дополнений до конечных подмножеств из X. Известно, что Φ — фильтр. Построим систему фильтров, покрывающих Φ. Для этого возьмем $X' \subseteq X$ такое, что X' и $\overline{X'}$ — бесконечны. По X' построим семейство всех подмножеств X'' из X, удовлетворяющих условию $|X' \setminus X''| = |X'' \setminus X'| < \infty$. Легко видеть, что все элементы этого семейства несравнимы по включению. Возьмем главные фильтры, порожденные элементами этого семейства. Они и Φ составят нашу мажоритарную систему $\mathfrak{M}$. Очевидно, что все выделенные фильтры максимальны в $\mathfrak{M}$; фильтр Φ покрывается остальными, но ни один из них не содержит Φ целиком. Согласно следствию к теореме 7, в таком пространстве правильные классы не образуют минимального базиса.

5. **Связность. Расстояния.** Пространство толерантности $\langle B(X), \tau \rangle$ назовем *связным*, если граф отношения τ связен. Очевидно, что

$\langle B(X), \tau \rangle$ связно тогда и только тогда, когда $\hat{\tau}$ — полное отношение, где $\hat{\tau}$ — транзитивное замыкание отношения τ.

Дополнения к большинствам называются *меньшинствами* [2]. Через $\rho(A, B)$ обозначим теоретико-графовое расстояние между A и B.

Лемма 3. *$\rho(A, B) = n$ тогда и только тогда, когда n — минимальное число, такое, что существует разбиение множества $A \nabla B = \overline{A \oplus B}$ на n меньшинств.*

Доказательство. Пусть $\rho(A, B) = n$. Тогда существуют $A_0, \ldots, A_n$, такие, что $A = A_0$, $B = A_n$ и $A_i \tau A_{i+1}$ при $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Это значит, что $A_i \oplus A_{i+1}$ — большинство или что $A_i \nabla A_{i+1}$ — меньшинство. Для любого $x \in A \setminus B$ существует наименьшее k такое, что $x \notin A_k$; ясно, что $x \in A_{k-1} \setminus A_k$. Положим $\mu(x) = k$. Для любого $x \in B \setminus A$ существует наименьшее k такое, что $x \in A_k$; при этом $x \in A_k \setminus A_{k-1}$. Вновь положим $\mu(x) = k$. Пусть теперь $C_k = \{x / \mu(x) = k\}$; очевидно, что $C_k \subseteq A_k \nabla A_{k+1}$, а потому C_k — меньшинство. По построению, $\{C_k\}_{0 < k < n-1}$ образует разбиение $A \nabla B$. Итак, мы можем утверждать, что если $\rho(A, B) = n$, то существует разбиение $A \nabla B$, состоящее из более чем n меньшинств.

Пусть теперь существует разбиение $\{C_k\}_{1 < k < n}$ множества $A \nabla B$ на меньшинства. Положим $A_0 = A$ и $A_{i+1} = A_i \nabla C_{i+1}$ тогда $A_i \nabla A_{i+1} = C_{i+1}$ и поскольку C_{i+1} меньшинство, то $A_i \tau A_{i+1}$. Далее, поскольку $C_i \cap C_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то $C_1 \nabla \cdots \nabla C_n = \bigcup_{i=1}^{n} C_i = A \nabla B$. Имеем $A_n = A_{n-1} \nabla C_n = \cdots = A_0 \nabla C_1 \nabla \cdots \nabla C_n$, т. е. $A_n = A \nabla A \nabla B = B$. Мы построим конкретный путь длины n из A в B и потому $\rho(A, B) \leqslant n$ всякий раз, когда есть разбиение $A \nabla B$ на n меньшинств.

Если n — наименьшее число меньшинств, на которое разбивается $A \nabla B$, то $\rho(A, B) = n$; иначе, по первой части доказательства мы нашли бы разбиение $A \nabla B$, содержащее меньшее число меньшинств. Обратно, если $\rho(A, B) = n$, то не существует разбиения $A \nabla B$, содержащего менее чем n меньшинств; иначе, по второй части доказательства получим $\rho(A, B) < n$. Все сказанное доказывает лемму.

Лемма 4. *$\rho(A, B) = n$ тогда и только тогда, когда n—наименьшее число такое, что существуют n большинств, общее пересечение которых равно $A \oplus B$.*

Доказательство. Достаточно сказать, что упомянутые n большинств существуют тогда и только тогда, когда существует разбиение $A \nabla B$ на n меньшинств.

Пусть $\{D_i\}_{1 < i < n}$ — требуемое разбиение. Тогда $\overline{D_i}$ — большинства и из $\bigcup_{i=1}^{n} D_i = A \nabla B$ следует $\bigcap_{i=1}^{n} \overline{D_i} = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} D_i} = \overline{A \nabla B} = A \oplus B$.

Пусть $\{C_i\}_{1 < i < n}$ — требуемые большинства. Из $\bigcap_{i=1}^{n} C_i = A \oplus B$ следует $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{C_i} = A \nabla B$. Положим $D_i = \overline{C_i} \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} \overline{C_k}$. Тогда $D_i \cap D_j = \varnothing$ при

$i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{n} D_i = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{C}_i = A \nabla B$ и D_i — меньшинства, поскольку $D_i \subseteq \overline{C}_i$.

Следствие из этих лемм можно выделить в теорему.

Теорема 8. *Пространство $\langle B(X), \tau \rangle$ связно тогда и только тогда, когда $\langle X, \mathfrak{M} \rangle$ — мажоритарное пространство конечного ранга.*

Доказательство. Прежде всего покажем, что $\langle B(X), \tau \rangle$ связно тогда и только тогда, когда $\varnothing$ связно с X. В одну сторону это тривиально. Обратно, пусть $\varnothing$ связно с X. Тогда $\rho(\varnothing, X) = n$ для некоторого n. По лемме 3 существует разбиение $X = X \nabla \varnothing$ на n меньшинств. Тогда любое подмножество X разбивается на конечное число меньшинств; в частности, это можно утверждать относительно $A \nabla B$ для любых $A, B \subseteq X$. Вновь по лемме 3 выводим, что для любых $A, B \subseteq X$ имеет место $\rho(A, B) < \infty$; это и означает, что пространство $\langle B(X), \tau \rangle$ связно. Остается добавить, что, по лемме 4, $\rho(\varnothing, X) < \infty$ тогда и только тогда, когда существует конечное число большинств, общее пересечение которых равно $\varnothing \oplus X = \varnothing$. Последнее условие есть определение мажоритарных пространств конечного ранга (см. пункт 1).

Из доказательства теоремы видно, что если пространство $\langle B(X), \tau \rangle$ связно, то $\hat{\tau} = \tau^n$ при некотором n (именно, при $n = \rho(\varnothing, X)$), где $\hat{\tau}$ — транзитивное замыкание τ. Из леммы можно вывести, что в мажоритарных пространствах ранга n каждое большинство содержит не менее $n-1$ элемент. Это оценка достижима.

6. **Толерантности, согласованные с операциями $\oplus$ и $\cup$.** Пусть τ — произвольная толерантность на $B(X)$. Будем говорить, что τ *согласована* с операциями $\oplus$ и $\cup$, если выполняются соотношения:

1) $A \tau A' \Rightarrow A \oplus B \tau A' \oplus B$ для любого $B \subseteq X$,

2) $A \tau A' \Rightarrow A \cup B \tau A' \cup B$ для любого $B \subseteq X$.

Ввиду коммутативности операций $\oplus$ и $\cup$ имеют место соотношения:

1') $A \tau A' \Rightarrow B \oplus A \tau B \oplus A'$;

2') $A \tau A' \Rightarrow B \cup A \tau B \cup A'$.

Кроме того из 1) выводится соотношение

3) $A \tau A' \Longleftrightarrow A \oplus B \tau A' \oplus B$.

В самом деле $A \oplus B \tau A' \oplus B \Rightarrow A \oplus B \oplus B \tau A' \oplus B \oplus B \Rightarrow A \tau A'$.

Теорема 9. *Всякая толерантность на $B(X)$, порожденная некоторой монотонной системой, согласована с операциями $\oplus$ и $\cup$. Всякая толерантность, согласованная с операциями $\oplus$ и $\cup$, порождается некоторой монотонной системой.*

Доказательство. Пусть τ порождено некоторой монотонной системой $\mathfrak{M}$. Мы помним, что для любого $B \subseteq X$, φ_B есть автоморфизм пространства $\langle B(X), \tau \rangle$, потому

$$A \tau A' \Rightarrow \varphi_B(A) \tau \varphi_B(A') \Longleftrightarrow A \oplus B \tau A' \oplus B.$$

Далее, пусть $A\tau A'$, тогда $A\oplus A'\in\mathfrak{M}$. Так как $A\oplus A'\subseteq B\cup(A\oplus A)=$ $=(B\cup A)\oplus(B\cup A')$, то $(B\cup A)\oplus(B\cup A')\in\mathfrak{M}$, т. е. $B\cup A\tau B\cup A'$. Итак τ согласовано с $\oplus$ и $\cup$.

Пусть, напротив, τ согласовано с $\oplus$ и $\cup$. Положим $\mathfrak{M}=\{A \mid A\tau X\}$. Понятно, что $X\in\mathfrak{M}$. Пусть $A\in\mathfrak{M}$ и $A\subseteq B$. Тогда $A\cup B=B$, а из $A\tau X$ следует $B=A\cup B\tau X\cup B=X$, т. е. $B\in\mathfrak{M}$. Таким образом, $\mathfrak{M}$ — монотонная система. Далее $A\tau A'\Longleftrightarrow A\oplus A\tau A\oplus A'$, но $A\oplus A=X$ и потому получаем $A\tau A'\Longleftrightarrow A\oplus A'\in\mathfrak{M}$. Итак τ порождено $\mathfrak{M}$ и теорема доказана.

Заметим, что в данной теореме слова «монотонная система» нельзя заменить на «мажоритарная система». Мажоритарными системами порождаются толерантности, обладающие дополнительным свойством:

4) $A\tau B\Rightarrow \overline{A}\tau\overline{B}$.

Пространство $B(X)$ является булевым кольцом относительно операций $\oplus$ и $\cup$. Пусть f — n-местная операция, представимая в виде полинома от $\oplus$ и $\cup$ с коэффициентами из $B(X)$. Пусть A_1, $A_1'\in B(X)$ и $A_1\tau A_1'$. Тогда $f(A_1, A_2, \ldots, A_n)\tau f(A_1', A_2, \ldots, A_n)$. В самом деле, $f(A_1, \ldots, A_n)$ можно записать в виде $(A_1\cup f_1(A_2, \ldots, A_n))\oplus f_2(A_2, \ldots, A_n)$ (представив f в виде полинома и вынося A_1 за скобки). Теперь применяя 2) и 1), последовательно получаем

$$A_1\tau A_1'\Rightarrow A_1\cup f_1(A_2, \ldots, A_n)\tau A_1'\cup f_1(A_2, \ldots, A_n)\Rightarrow(A_1\cup f_1(A_2, \ldots, A_n))\oplus$$
$$\oplus f_2(A_2, \ldots, A_n)\tau(A_1'\cup f_1(A_2, \ldots, A_n))\oplus f_2(A_2, \ldots, A_n)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(A_1, A_2, \ldots, A_n)\tau f(A_1', A_2, \ldots, A_n).$$

Аналогичные утверждения справедливы при любом $i=2, \ldots, n$. Введем следующее

Определение. *Пусть f — произвольная n-местная операция на $B(X)$ и τ — толерантность на $B(X)$. Говорим, что τ согласовано с f, если для любого $i=1, \ldots, n$ имеет место*

$$A_i\tau A_i'\Rightarrow f(A_1, \ldots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \ldots, A_n)\times$$
$$\times\tau f(A_1, \ldots, A_{i-1}, A_i', A_{i+1}, \ldots, A_n).$$

В терминах этого определения факт, доказанный выше, можно сформулировать следующим образом: всякая толерантность, согласованная с операциями $\oplus$ и $\cup$, согласована с любой операцией, полученной из $\oplus$ и $\cup$ с помощью суперпозиции. Несмотря на простое доказательство, сам по себе факт вовсе не тривиален. Например, из операций $\cap$, $\cup$ и $^-$ с помощью суперпозиции можно получить тот же класс операций, однако, не всякая толерантность, согласованная с $\cup$, $\cap$ и $^-$, согласована со всеми операциями из этого класса (хотя и они определенным образом описываются с помощью монотонных систем).

Все сказанное позволяет считать толерантности, согласованные с операциями $\oplus$ и $\cup$, аналогами конгруэнций на булевом кольце $B(X)$. Здесь следует сделать замечание. Кажется, что более естественными (по крайней мере, с формальной точки зрения) аналогами конгруэнций будут толерантности, удовлетворяющие условиям:

$$A\tau A' \,\&\, B\tau B' \Rightarrow A \oplus B\tau A' \oplus B',$$
$$A\tau A' \,\&\, B\tau B' \Rightarrow A \cup B\tau A' \cup B'.$$

Однако пусть при этих условиях $A\tau B$ и $B\tau C$. Тогда $A \oplus B\tau B \oplus C$ и далее $A = A \oplus B \oplus B\tau B \oplus B \oplus C = C$, откуда следует транзитивность τ. Это означает, что τ есть конгруэнция и потому „более естественное" понятие на самом деле обладает тривиальным содержанием.

Теперь очевидно, что при $A_1 \tau A', \dots, A_n \tau A_n'$ имеет место $\rho(f(A_1, \dots, A_n, \ f(A_1', \dots, A_n')) \leqslant n$, для всякого f, представимого в виде полинома от $\oplus$ и $\cup$. Это утверждение можно усилить в частном случае, когда f представимо в виде *булева полинома*, т. е. полинома, коэффициентами которого являются X или $\varnothing$.

Через $D_\tau(X)$ обозначим диаметр (в теоретико-графовом смысле) какой-либо компоненты пространства $\langle B(X), \tau \rangle$. По теореме 2 это определение не зависит от выбора компоненты.

Теорема 10. *Пусть операция f представима в виде булева полинома и существенно зависит от n переменных. Тогда существуют $A_1, \dots, A_n, A_1', \dots, A_n'$ такие, что $A_i \tau A_i'$ при всех $i=1, \dots, n$ и*

$$\rho(f(A_1, \dots, A_n), \ f(A_1', \dots, A_n')) = \min(n, \ D_\tau(X)\}. \tag{6}$$

Доказательство. Нам удобнее будет вести доказательство в двойственных терминах. В связи с этим заметим, что f представима в виде полинома от $\oplus$ и $\cup$ тогда и только тогда, когда $\bar{f}$ представима в виде полинома от $\cap$ и ∇. Легко вычислить, что $A\tau A' \Longleftrightarrow \bar{A}\tau\bar{A}'$, а потому $\rho(A, A') = \rho(\bar{A}, \bar{A}')$. Кроме того, так как $\varphi_{\bar{A}}$ — автоморфизм пространства $\langle B(X), \tau \rangle$, то $\rho(A, B) = \rho(\varphi_{\bar{A}}(A), \varphi_{\bar{A}}(B)) = \rho(\varnothing, B \oplus \bar{A}) = \rho(\varnothing, A \nabla B)$. Поэтому соотношение (6) можно заменить на

$$\rho(\varnothing, f(A_1, \dots, A_n) \nabla f(A_1', \dots, A_n')) = \min\{n, \ D_\tau(X)\}. \tag{7}$$

Сначала предположим, что $n \leqslant D_\tau(X)$. Формулу (7) мы вновь преобразуем, пользуясь следующими соображениями: если $A\tau A'$, то $B = A \nabla A'$ — меньшинство и A' можно представить в виде $A \nabla B$. Обратно, всякое множество вида $A \nabla B$, где B — меньшинство, толерантно к A. Потому наша задача сводится к следующему: найти такие $A_1, \dots, A_n$ и меньшинства $B_1, \dots, B_n$, что

$$\rho(\varnothing, f(A_1, \dots, A_n) \nabla f(A_1 \nabla B_1, \dots, A_n \nabla B_n)) = n.$$

Мы сначала выберем $B_1, \dots, B_n$, а по ним построим $A_1, \dots, A_n$.

Если $D_?(X)\geqslant n$, что существуют C и D такие, что $\rho(C, D)=n$. Выше уже отмечалось, что в этом случае $\rho(\varnothing, C\nabla D)=n$. По лемме 3 это может быть лишь в том случае, когда существует разбиение $\{B_1, \dots, B_n\}$ множества $\varnothing\nabla C\nabla B=C\nabla D$ на меньшинства. Тем самым $B_1, \dots, B_n$ уже выбраны. Поскольку $B_i\cap B_j=\varnothing$ при $i\neq j$, то $B_1\nabla\cdots\nabla B_n=B_1\cup\cdots\cup B_n=C\nabla D$. Если суметь подобрать $A_1, \dots, A_n$ таким образом, чтобы выполнялось

$$f(A_1, \dots, A_n)\nabla f(A_1\nabla B_1, \dots, A_n\nabla B_n)=B_1\nabla\cdots\nabla B_n,$$

то доказательство первого случая будет завершено, ибо

$$\rho(\varnothing, f(A_1, \dots, A_n)\nabla f(A_1\nabla B_1, \dots, A_n\nabla B_n))=$$
$$=\rho(\varnothing, A_1\nabla\cdots\nabla B_n)=\rho(\varnothing, C\nabla D)=n,$$

что и требуется.

Заметим, что $f(A_1, \dots, A_n)$ можно представить в виде

$$(A_1\cap f_1^1(A_2, \dots, A_n))\nabla f_2^1(A_2, \dots, A_n),$$

где f_1^1 и f_2^1, в свою очередь, представимы в виде полиномов от ∇ и $\cap$. Для нас, кроме того, существенно, что $f_1\not\equiv 0$, иначе f зависело бы от меньшего, чем n, числа переменных. То же можно сказать о разложениях $f(A_1, \dots, A_n)$ вида

$$(A_i\cap f_1^i(A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n))\nabla f_2^i(A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n).$$

Заметим, что

$$f(A_1\nabla B_1, A_2, \dots, A_n)=((A_1\nabla B_1)\cap f_1^1(A_2, \dots, A_n))\nabla f_2^1(A_2, \dots, A_n)=$$
$$=(A_1\cap f_1^1(A_2, \dots, A_n))\nabla(B_1\cap f_1^1(A_2, \dots, A_n))\nabla f_2^1(A_2, \dots, A_n)=$$
$$=f(A_1, A_2, \dots, A_n)\nabla(B_1\cap f_1^1(A_2, \dots, A_n)).$$

Поэтому

$$f(A_1\nabla B_1, \dots, A_n\nabla B_n)=f(A_1, \dots, A_n)\nabla(B_1\cap f_1^n(A_1, A_2\nabla B_2, \dots, A_n\nabla B_n))\nabla$$
$$\nabla(B_2\cap f_1^1(A_1, A_2, A_3\nabla B_3, \dots, A_n\nabla B_n))\nabla\cdots\nabla(B_n\cap f_1^n(A_2, \dots, A_n)). \quad (8)$$

Вычислим $B_i\cap f_1^i(A_1, \dots, A_{j-1}, A_j\nabla B_j, \dots, A_n\nabla B_n)$ при $j>i$.

$$B_i\cap f_1^i(A_1, \dots, A_{j-1}, A_j\nabla B_j, \dots, A_n\nabla B_n)=$$
$$=(B_i\cap f_1^i(A_1, \dots, A_{j-1}, A_j, A_{j+1}\nabla B_{j+1}, \dots, A_n\nabla B_n)\nabla$$
$$\nabla(B_i\cap B_j\cap(f_1^i)_2^j(A_1, \dots, A_{j-1}, A_{j+1}\nabla B_{j+1}, \dots, A_n\nabla B_n)).$$

Так как $B_i\cap B_j=\varnothing$, то

$$B_i\cap f_1^i(A_1, \dots, A_{j-1}, A_j\nabla B_j, \dots, A_n\nabla B_n)=$$
$$=B_i\cap f_1^i(A_1, \dots, A_j, A_{j+1}\nabla B_{j+1}, \dots, A_n\nabla B_n). \quad (9)$$

Формула (9) приводит к соотношению

$$B_i \cap f_1^i(A_1, \ldots, A_{j-1}, A_j \triangledown B_j, \ldots, A_n \triangledown B_n) = B_i \cap f_1^i(A_1, \ldots, A_n). \quad (10)$$

Подставив (10) в (8) получим

$$f(A_1 \triangledown B_1, \ldots, A_n \triangledown B_n) = f(A_1, \ldots, A_n) \triangledown (B_1 \cap f_1^1(A_2, \ldots, A_n) \triangledown \cdots \triangledown$$

$$\triangledown (B_n \cap f_1^n(A_2, \ldots, A_{n-1})).$$

Поэтому

$$f(A_1, \ldots, A_n) \triangledown f(A_1 \triangledown B_1, \ldots, A_n \triangledown B_n) =$$

$$= \mathop{\triangledown}_{i=1}^{n} (B_i \cap f_1^i(A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, A_n)).$$

Нам осталось так подобрать $A_1, \ldots, A_n$, чтобы

$$B_i \cap f_1^i(A_1, \ldots, A_n) = B_i;$$

тогда доказательство первого случая будет завершено.

Уже отмечалось, что $f_1^i \not\equiv \varnothing$ и потому в полиноме, представляющем f_1^i найдется слагаемое с минимальным (не равным нулю) числом сомножителей. Обозначим его $\mathbf{A}_i$. Теперь, если переменная X_i не входит ни в одно $\mathbf{A}_j$, то полагаем, $A_i = \varnothing$. Если переменная X_i в точности входит в слагаемые $\mathbf{A}_{j_1}, \ldots, \mathbf{A}_{j_k}$, то полагаем $A_i = B_{j_1} \triangledown \cdots \triangledown B_{j_k}$. Так выбираются $A_1, \ldots, A_n$.

Заметим, что $B_i \cap (B_{j_1} \triangledown \ldots \triangledown B_{j_k})$ равно B_i, если $i \in \{j_1, \ldots, j_k\}$, и равно $\varnothing$ в противном случае. Тогда для всякого $j = 1, \ldots, n$, если X_j входит сомножителем в слагаемое $\mathbf{A}_i$, то $B_i \cap A_j = B_i$, в противном случае $B_i \cap A_i = \varnothing$. Пусть $\mathbf{A}_i\,[A_1, \ldots, A_n]$ обозначает результат подстановки $A_1, \ldots, A_n$ вместо переменных $x_1, \ldots, x_n$ соответственно в слагаемое $\mathbf{A}_i$. Из сказанного следует, что $B_i \cap \mathbf{A}_i[A_1, \ldots, A_n] = B_i$, и если $\mathbf{A}_i$ — какое-либо другое слагаемое, входящее в представление f_1^i в виде полинома, то $\mathbf{A}'$ содержит переменную x_j, не входящую в $\mathbf{A}_i$. Тогда $B_i \cap A_j = \varnothing$ и, значит, $B_i \cap \mathbf{A}'[A_1, \ldots, A_n] = \varnothing$. Этим доказано, что $B_i \cap f_1^i(A_1, \ldots, A_n) = B_i$ и первый случай полностью рассмотрен.

Рассмотрим теперь случай $D_\tau(X) < n$. Рассмотрим разложение f в виде $(x_1 \cap f_1^1) \triangledown f_2^1$. Подставив вместе x_1 сперва $\varnothing$, потом X, получим соотношения

$$f_2^1(x_2, \ldots, x_n) = f(\varnothing, x_2, \ldots, x_n),$$

$$f_1^1(x_2, \ldots, x_n) = f(X, x_2, \ldots, x_n) \triangledown f(\varnothing, x_2, \ldots, x_n).$$

Эти соотношения показывают, что $f(X, x_2, \ldots, x_n)$ и $f(\varnothing, x_2, \ldots, x_n)$ не могут одновременно не зависеть от x_j при $j = 2, \ldots, n$. То же можно сказать о любом разложении f в виде $(x_i \cap f_1^i) \triangledown f_2^i$.

Будем писать $i \leqslant j$, если либо $f(x_1, \ldots, x_{j-1}, X, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, либо $f(x_1, \ldots, x_{j-1}, \varnothing, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ не зависят от x_i. Это отношение рефлексивно. Имеет место соотношение:

$$f(x_1, \ldots, x_{j-1}, \alpha, x_{j+1}, \ldots, x_n) \tag{11}$$

не зависит от x_i и $k \leqslant i \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_{j-1}, \alpha, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ не зависит от x_k $\alpha = \varnothing$ или X. Доказательство (11) очевидно. В частности, соотношение (11) дает транзитивность отношения $\leqslant$, и потому мы можем выбрать минимальный по $\leqslant$ индекс i_1. Пусть $i_2, \ldots, i_2$ — все индексы такие, что $i_j \leqslant i_1$, $j = 2, \ldots, l$. Ввиду максимальности i_1, все индексы $i_1, \ldots, i_e$ эквивалентны, а потому, по (11), если $f(x_1, \ldots, x_{i_1-1}, \alpha, x_{i_1+1}, \ldots, x_n)$ не зависит от x_{i_j}, то эта операция не зависит от всех $x_{i_1}, \ldots, x_{i_2}$; в таком случае, $f(x_1, \ldots, x_{i_1-1}, \bar{\alpha}, x_{i_1+1}, \ldots, x_n)$ зависит от $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ ($\alpha = \varnothing$ или X). Кроме того, $f(x_1, \ldots, x_{i_1-1}, \bar{\alpha}, x_{i_1+1}, \ldots, x_n)$ зависит и от всех x_j, где $j \neq i_1, \ldots, i_2$, поскольку $j \subseteq i_1$. Итак $f(x_1, \ldots, x_{i_1-1}, \bar{\alpha}, x_{i_1+1}, \ldots, x_n)$ зависит от $n-1$ переменной и, ввиду $\bar{\alpha} = \varnothing$ или X, представимо в виде булева полинома.

Применив описанную конструкцию достаточное число раз, мы придем к операции $f(x_1, \ldots, x_{i_1-1}, \alpha_1, x_{l+1}, \ldots, x_{i_{n-D_\tau(X)-1}}, \alpha_{n-D_\tau(x)}, x_{i_{n-D_\tau(X)+1}}, \ldots, x_n)$, представимой в виде булева полинома и зависящей в точности от $D_\tau(X)$ переменных. Для нее имеет силу случай первый. Положив $A_{ij} = \alpha_j$; при $j = 1, \ldots, n - D_\tau(X)$, и найдя остальные A_l и B_l как в первой части доказательства, убеждаемся в справедливости теоремы.

Ռ. Գ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

ՄԱԺՈՐԻՏԱՐ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՎ ԾՆՎԱԾ ՏՈԼԵՐԱՆՏՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Տոլերանտության հարաբերությունը ոչ լրիվ նմանության գաղափարի ֆորմալ համարժեքն է։ Դիտարկվող «X-ը հայտանիշների մեծամասնությամբ նման է Y-ին» տիպի հարաբերությունները տոլերանտությունների մասնակի դասն են կազմում։ Նկարագրվում է այդպիսի հարաբերությունների կառուցվածքը (ապացուցվում է որոշակի տեսքի բազիսի գոյությունը, ձևակերպվում են այդ բազիսի մինիմալության, ինչպես նաև ստացվող տոլերանտության տարածության կապակցվածության պայմանները և այլն)։ Ապացուցվում է, որ դիտարկվող հարաբերությունները բուլյան օղակների վրա որոշված կոնգրուենցիաների անալոգն են։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шрейдер Ю. А.* Равенство, сходство, порядок., М., 1971.
2. *Виленкин Н. Я., Шрейдер Ю. А.* Мажоритарные пространства и квантор большинства. «Семиотика и информатика», вып. 8, М., 1977.