А. А. МАРТИРОСЯН

СОГЛАСОВАНИЕ ГИПОТЕЗ С ИСХОДНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ И СЛОЖНОСТЬ ИНДУКТИВНОГО ВЫВОДА

1. Рассматриваются два класса алгоритмов индуктивного вывода понятий: а именно, алгоритмы, согласующие формируемые ими гипотезы с той исходной информацией, на основе которой эта гипотеза построена и алгоритмы, не обладающие этим свойством [3]. Получены сравнительные сложностные характеристики указанных классов, являющиеся обобщением имеющихся ранее результатов [2] на случай более общего определения «сходства понятий». Понятие сходства формализуется с помощью мажоритарных пространств, введенных в [1]. Краткое изложение результатов данной статьи содержится в [4].

2. Пусть M — конечное множество и $k = |M|$. Парой множеств (ПМ) будем называть произвольную упорядоченную пару непересекающихся подмножеств M. Если x — ПМ, то через $\nu_1(x)$ будем обозначать левую, а через $\nu_0(x)$ — правую компоненту x. Таким образом, $x = (\nu_1(x), \nu_0(x))$. Под $|x|$ будем понимать мощность множества $\nu(x) \equiv \nu_1(x) \cup \nu_0(x)$. Множество всевозможных ПМ будем обозначать T. Положим

$$D^l = \{x \mid x \in T \,\&\, |x| = l\}.$$

Таким образом,

$$T = \bigcup_{l=0}^{\infty} D^l.$$

Если $*$ — какая-либо теоретико-множественная операция и $x, y \in T$, то полагаем по определению $x * y = (\nu_1(x) * \nu_1(y), \ \nu_0(x) * \nu_0(y))$. Отметим, что не обязательно, чтобы $x * y \in T$. Например, $(M, \varnothing) \cup \cup (\varnothing, M) = (M, M) \overline{\in} T$. Если $x, y \in T$, то скажем, что x *включена* в y и будем писать $x \subseteq y$, если $\nu_1(x) \subseteq \nu_1(y)$ и $\nu_0(x) \subseteq \nu_0(y)$.

Индуктором будем называть произвольное отображение f из T в T такое, что для любого $x \in T$

$$1) \ |f(x)| \geqslant |x|,$$

$$2) \ |f(x)| = |x| \rightarrow f(x) = x.$$

Множество всех индукторов обозначим через F. Отображение $f: T \rightarrow T$ называется *согласующим*, если

$$3) \ x \subseteq f(x) \text{ для любого } x \in T.$$

Ясно, что из 3) следуют 1) и 2), т. е. согласующие отображения есть подкласс F. Обозначим этот подкласс F_c. Индукторы, принадлежащие подклассу $F_{нс} = F \setminus F_c$, назовем *несогласующими.*

2. Пусть A — некоторое множество. *Мажоритарным пространством* $\mathfrak{M}(A)$ над A [1] назовем произвольную систему подмножеств A, удовлетворяющую следующим условиям:

$$1)\ \mathfrak{M}(A) \neq \varnothing,$$

$$2)\ A_1 \in \mathfrak{M}(A) \,\&\, A_1 \subseteq A_2 \subseteq A \to A_2 \in \mathfrak{M}(A),$$

$$3)\ A_1 \in \mathfrak{M}(A) \to A \setminus A_1 \overline{\in} \mathfrak{M}(A).$$

Подмножества, принадлежащие $\mathfrak{M}(A)$, называются *большинствами* в A. Подмножество B называется *меньшинством* в A, если $A \setminus B \in \mathfrak{M}(A)$. Очевидно, что если $B \subseteq A$, то B не может быть меньшинством и большинством одновременно. Однако может оказаться, что оно является ни тем и не другим. Такие подмножества называются *блокирующими*. Множество меньшинств в A обозначается $L(A)$, множество блокирующих подмножеств A — $B(A)$.

Понятие большинства призвано эксплицировать такие термины, как «почти все», «похожий на», «мало отличающийся» и т. д. Если на исходном пространстве A задана некоторая мера μ такая, что $\mu(A) = 1$, то понятия «множества меры больше 1/2», «множество полной меры» удовлетворяют, в частности, аксиоматике большинства. Однако даже на конечных множествах систему большинств не всегда можно представить введением соответствующей меры [1].

Мы будем использовать понятие большинства для определения некоторого отношения сходства между элементами T. Альтернативой такому подходу было бы введение меры на множестве M или T (как это было сделано в [2]), однако отсутствие достаточно обоснованных критериев выбора меры и бóльшая общность аксиоматического подхода привели нас к выбору именно последнего.

3. Пусть с каждым подмножеством A множества M ассоциировано мажоритарное пространство $\mathfrak{M}(A)$, удовлетворяющее условиям:

$$(M1)\quad A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \quad (\subseteq M) \text{ и } A_1 \in L(A_2) \text{ влечет } A_1 \in L(A_3);$$

$$(M2)\quad A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \quad (\subseteq M) \text{ и } A_1 \in \mathfrak{M}(A_3) \text{ влечет } A_1 \in \mathfrak{M}(A_2).$$

Легко убедиться, что $(M1)$ и $(M2)$ эквивалентны соответственно

$$(M1')\quad A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \quad (\subseteq M) \text{ и } A_1 \in \mathfrak{M}(A_2)$$
$$\text{влечет } A_1 \cup (A_3 \setminus A_2) \in \mathfrak{M}(A_3);$$

$$(M2')\quad A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3) \quad (\subseteq M) \text{ и } A_2 \in L(A_3)$$
$$\text{влечет } A_2 \setminus A_1 \in L(A_3 \setminus A_1).$$

По определению будем полагать $\mathfrak{M}(\varnothing) = \{\varnothing\}$.

Пусть $x, y \in T$. Под выражением $x \Delta y$ будем понимать множество $(\nu_1(x) \nabla \nu_1(y)) \cup (\nu_0(x) \nabla \nu_0(y))$, где ∇ — знак симметрической разности.

Система мажоритарных пространств $\{\mathfrak{M}(A)/A \subseteq M\}$ порождает на T отношение толерантности τ, определяемое следующим образом:

$$(M3) \quad x \tau y \Longleftrightarrow x \Delta y \in L(\nu(x) \cup \nu(y)),$$

или, что эквивалентно,

$$(M3') \quad x \tau y \Longleftrightarrow \nu(x \cdot y) \in \mathfrak{M}(\nu(x) \cup \nu(y)),$$

где $x \cdot y$ обозначает ПМ $(\nu_1(x) \cap \nu_1(y),\ \nu_0(x) \cap \nu_0(y))$.

Если $x \in T$, то через T_x будем обозначать класс смежности элемента x по τ, т. е. $T_x = \{y/y \tau x\}$. Если $U \subseteq T$, то T_u будет обозначать множество $\bigcup\limits_{x \in U} T_x$.

Мажоритарное пространство $\mathfrak{M}(A)$ назовем вырожденным, если $\mathfrak{M}(A) = \{A\}$. Легко видеть, что если все $\mathfrak{M}(A)$ $(A \subseteq M)$ вырождены, то τ — диагональ.

Будем говорить, что индуктор $f\ (\in F)$ *расшифровывает* множество $U\ (\subseteq T)$, если для каждого $u \in U$ найдется $x \in T$ такое, что $u \tau f(x)$, т. е. $U \subseteq T_{f(T)}$.

Пусть $U \subseteq T$ и $G \subseteq F$. Если в G содержится индуктор, расшифровывающий U, то *объемной сложностью* множества U относительно G назовем число $S(U, G)$:

$$S(U, G) = \min_{f \in G} \{\max_{u \in U} \{\min_{f(x) \tau u} |\nu(x)|\}\}.$$

Если же такого индуктора нет, то полагаем $S(U, G) = k + 1$. Связанную с $S(U, G)$ величину $S_{ср}(U, G)$,

$$S_{ср}(U, G) = \min_{f \in G} \left\{\frac{1}{|U|} \cdot \sum_{u \in U} S(u, \{f\})\right\}$$

назовем *средней объемной сложностью*. Индуктор f *оптимален* для $U \subseteq T$ в $G \subseteq F$ по сложности S (или $S_{ср}$), если $f \in G$ и $S(U, G) = S(U, \{f\})$ (соответственно, $S_{ср}(U, G) = S_{ср}(U, \{f\})$). Условимся писать: $S(U, f)$ вместо $S(U, \{f\})$; $S_{ср}(U, f)$ вместо $S_{ср}(U, \{f\})$; а также $f(U)$ вместо $\bigcup\limits_{x \in U} f(x)$.

Теорема 1. *Если пространство $\mathfrak{M}(M)$ не вырождено, то для любого $U \subseteq T$ выполнены неравенства $S(U, F_{нс}) \leqslant S(U, F_с)$ и $S_{ср}(U, F_{нс}) \leqslant S_{ср}(U, F_с)$.*

Доказательство. Теорема будет доказана, если для произвольного согласующего индуктора $f_с$, мы сумеем построить такой индуктор $f_{нс} \in F_{нс}$, что $S(u, f_с) \geqslant S(u, f_{нс})$ для любого $u \in U$. В самом деле, отсюда мы получили бы, с одной стороны, что $S(U, f_с) \geqslant S(U, f_{нс})$, а с другой, что $\sum\limits_{u \in U} S(u, f_с) \geqslant S(U, f_{нс})$, и, значит, $S_{ср}(U, f_с) \geqslant S_{ср}(U, f_{нс})$. В частности, если $f_с$ оптимален в $F_с$ по S, то

$$S(U, F_с) = S(U, f_с) \geqslant S(U, f_{нс}) \geqslant S(U, F_{нс}).$$

Если же $f_с$ оптимален в $F_с$ по $S_{ср}$, то

$$S_{ср}(U, F_с) = S_{ср}(U, f_с) \geqslant S_{ср}(U, f_{нс}) \geqslant S_{ср}(U, F_{нс}),$$

что и требовалось доказать.

Итак, пусть $U \subseteq T$ и $f_с \in F_с$ — расшифровывающий U согласующий индуктор. Поскольку $\mathfrak{M}(M)$ невырождено, то найдется такое $a_0 \in M$, что $\{a_0\} \in L(M)$.

Обозначим через x_0 и x_0^{-1} ПМ $x_0 = (M \setminus \{a_0\}, \varnothing)$ и $x_0^{-1} = (\varnothing, M \setminus \{a_0\})$. Индуктор $f_{нс}$ определим так:

$$f_{нс}(x) = \begin{cases} f_с(x), & \text{если } x \overline{\in} D^{k-1} \\ x, & \text{если } x \in D^{k-1} \text{ и } x \neq x_0, x_0^{-1} \\ (\varnothing, M), & \text{если } x = x_0 \\ (M, \varnothing), & \text{если } x = x_0^{-1}. \end{cases}$$

Индуктор $f_{нс}$ рассогласован в точках x_0 и x_0^{-1}.

Покажем предварительно, что $T_{D^k} \subseteq T_{D^{k-1}} \subseteq T_{f_{нс}(D^{k-1})}$.

Для доказательства первого включения нужно показать, что для любых $t \in T$ и $x \in D^k$ таких, что $t \tau x$, найдется $y \in D^{k-1}$ такое, что $t \tau y$. Пусть $t \overline{\in} D^k$. Тогда $\nu(x) \setminus \nu(t)$ непусто. Положим $y = \nu_1(x) \setminus \{a\}$, $\nu_0(x) \setminus \{a\})$, где a — произвольный элемент $\nu(x) \setminus \nu(t)$. Обозначим $A_1 = \nu(t \cdot x)$, $A_2 = \nu(t) \cup \nu(y)$, $A_3 = \nu(t) \cup \nu(x)$. Имеем: $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$ по построению y, а также $A_1 \in \mathfrak{M}(A_3)$ по условию $t \tau x$ (см. (M3)). Отсюда по (M2) $\nu(t \cdot x) \in \mathfrak{M}(\nu(t) \cup \nu(y))$. Учитывая, что $t \cdot x = t \cdot y$ получаем $\nu(t \cdot x) \in \mathfrak{M}(\nu(t) \cup \nu(y))$. По (M3′) $t \tau y$.

Перейдем ко второму включению. Пусть $t \in T$, $x \in D^{k-1}$ и $t \tau x$. Надо найти такое $y \in D^{k-1}$, что $f_{нс}(y) \tau t$. При $x \neq x_0, x_0^{-1}$ полагаем $y = x$ и тогда $f_{нс}(y) = x$ по построению $f_{нс}$. Пусть $x = x_0$. Если $t \in D^k$, то $y = x_0^{-1}$ при $t = (M, \varnothing)$, $y = x_0$ при $t = (\varnothing, M)$ и $y = (\nu_1(t) \setminus \{a_0\}, \nu_0(t) \setminus \{a_0\})$ в остальных случаях. Если же $t \overline{\in} D^k$, то либо t равно одному из x_0 или x_0^{-1} и тогда $y = x_0^{-1}$ и $y = x_0$ соответственно, либо найдется такое $a \in \nu(x_0)$, что $a \overline{\in} \nu(t \cdot x_0)$. Перебросим элемент a из той компоненты x_0, где он присутствует, в противоположную. Полученную таким образом ПМ обозначим через y. Имеем $\nu(t \cdot x_0) \subseteq \nu(t) \cup \nu(y) \subseteq \nu(t) \cup \nu(x_0)$, а также $\nu(t \cdot x_0) \in \mathfrak{M}(\nu(t) \cup \nu(x_0))$ по условию $t \tau x_0$. По (M2) $\nu(t, x_0) \in \mathfrak{M}(\nu(t) \cup \nu(y))$, а так как $\nu(t \cdot x_0) \subseteq \nu(t \cdot y) \subseteq \nu(t) \cup \nu(y)$, то $\nu(t \cdot y) \in \mathfrak{M}(\nu(t) \cup \nu(y))$ по определению мажоритарного пространства. Таким образом, $t \tau y$ по (M3′). А так как $y \neq x_0, x_0^{-1}$, то $f_{нс}(y) \tau t$ по построению $f_{нс}$. Случай, когда $x = x_0^{-1}$ полностью аналогичен случаю $x = x_0$.

По определению индуктора $f(x)\in D^{k-1}\cup D^{k}$ для любого $x\in D^{k-1}\cup D^{k}$. Отсюда и из доказанных включений получаем

$$T_{f(D^{k-1}\cup D^{k})}\subseteq T_{D^{k-1}\cup D^{k}}=T_{D^{k-1}}\cup T_{D^{k}}=T_{D^{k-1}}\subseteq T_{f_{\text{нс}}(D^{k-1})}.$$

Таким образом, если $S(u, f_{\text{с}})\geqslant k-1$ для некоторого $u\in U$, то по только что доказанному найдется такое $y\in D^{k-1}$, что $f_{\text{нс}}(y)\tau u$, что означает, что $S(u, f_{\text{с}})\geqslant k-1\geqslant S(u, f_{\text{нс}})$. Если же $S(u, f)<k-1$, то тогда $S(u, f_{\text{с}})=S(u, f_{\text{нс}})$ по построению $f_{\text{нс}}$. Теорема доказана.

4. Сейчас нас будет интересовать вопрос существования таких $U\subseteq T$, что выполняется строгое неравенство $S(U, F_{\text{нс}})<S(U, F_{\text{с}})$. Очевидным необходимым условием для этого является существование такого $A\subseteq M$, что из $a\in A$ следует $\{a\}\notin\mathfrak{M}(A)$. В самом деле, если предположить обратное, то для всякой ПМ $x\in T$ найдется такая ПМ $y\in D^{1}$, что $x\tau y$. А это означает, что сложность расшифровки произвольного $U\subseteq T$ как согласующими, так и несогласующими индукторами равна 1, если это U содержит не менее двух элементов, и равна 0, если U одноэлементно (так как $|\nu(\varnothing, \varnothing)|=0$).

Достаточные условия выполнения строгого неравенства $S(U, F_{\text{нс}})<S(U, F_{\text{с}})$ будут даны в теореме 2, доказательство которой будет использовать следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. $A_1\subseteq A_2\subseteq A_3\ (\subseteq M)$ и $A_1\notin L(A_2)$ *влечет* $A_1\cup(A_3\setminus A_2)\notin L(A_3)$.

Доказательство. В самом деле, если бы было $A_1\cup(A_3\setminus A_2)\in L(A_3)$, то $A_3\setminus(A_1\cup(A_3\setminus A_2))=A_2\setminus A_1\in\mathfrak{M}(A_3)$. Так как $A_2\setminus A_1\subseteq A_2\subseteq A_3$, то по (M2) получим $A_2\setminus A_1\in\mathfrak{M}(A_2)$, то есть $A_1\in L(A_2)$, что противоречит условию.

Лемма 2. $x, y\in D^{1}$, $x\neq y$ *и* $x_1\in T_x$ *влечет* $T_{x_1}\cap T_y=\varnothing$.

Доказательство. Допустим, что существует $y_1\in T_{x_1}\cap T_y$. Это значит, что $\nu(y)\in\mathfrak{M}(\nu(y_1))$ (поскольку $y\in D^{1}$) и $\nu(x_1)\cap\nu(y_1)\in\mathfrak{M}(\nu(x_1)\cup\nu(y_1))$; следовательно, так как $\nu(x_1)\cap\nu(y_1)\subseteq\nu(y_1)\subseteq\nu(x_1)\cup\nu(y_1)$, то $\nu(x_1)\cap\nu(y_1)\in\mathfrak{M}(\nu(y_1))$ по M2. Точно так же $\nu(x_1)\cap\nu(y_1)\in\mathfrak{M}(\nu(x_1))$. Поскольку $\nu(y)\in\mathfrak{M}(\nu(y_1))$ и поскольку пересечение двух большинств не пусто, то $\nu(y)\cap(\nu(x_1)\cap\nu(y_1))\neq\varnothing$, а так как $|\nu(y)|=1$, то $\nu(y)\subseteq\nu(x_1)\cap\nu(y_1)\subseteq\nu(x_1)$. По (M2) $\nu(y)\in\mathfrak{M}(\nu(x_1)\cap\nu(y_1))$. Аналогично, $\nu(x_1)\in\mathfrak{M}(\nu(x_1)\cap\nu(y_1))$. Следовательно, $\nu(x)\cap\nu(y)\neq\varnothing$, а так как $|\nu(x)|=|\nu(y)|=1$, то $\nu(x)=\nu(y)$. Пусть для определенности x есть ПМ $(\{a\}, \varnothing)$ (случай $x=(\varnothing, \{a\})$ аналогичен). Так как $x\neq y$, то y есть ПМ $(\varnothing, \{a\})$. Поскольку $x\tau x_1$ и $y\tau y_1$, то $a\in\nu_1(x_1)$ и $a\in\nu_0(y_1)$. Так как $y_1\in T_{x_1}$, то $\nu(x_1\cdot y_1)\in\mathfrak{M}(\nu(x_1)\cup\nu(y_1))$. Отсюда и из (M2) следует, что $\nu(x_1\cdot y_1)\in\mathfrak{M}(\nu(y_1))$, чего не может быть, поскольку $\{a\}\in\mathfrak{M}(\nu(y_1))$ и $a\notin\nu(x_1\cdot y_1)$, то есть большинства не пересекаются.

Из этой леммы при $x=x_1$ вытекает

Следствие. *Если* $x, y\in D^{1}$ *и* $x\neq y$, *то* $T_x\cap T_y=\varnothing$

Лемма 3. *Пусть выполнено условие*

$(^*)\forall a, b_{\in M}\exists c_{\in M}[\{a\}\in\mathfrak{M}(\{a, b\})\to(\{a\}\in\mathfrak{M}(\{a, c\})\&\{a\}\notin\mathfrak{M}(\{a, b, c\})))]$

Тогда из $x\in D^1$, $T_x\subseteq T_y\cup T_z$ *и* $x\neq y, z$ *следует* $y, z\in T_x$ *и* $\nu(y)\cap\nu(z)=\nu(x)$

Доказательство. Поскольку $x\in T_x$, то $x\in T_y\cup T_z$, то есть либо $x\tau y$, либо $x\tau z$. Из симметричности τ либо $y\in T_x$, либо $z\in T_x$. Докажем, что из $y\in T_x$ следует $z\in T_x$. Тем самым, ввиду симметричности y и z, первое утверждение леммы будет доказано. Пусть $\nu(x)$ есть $\{a\}$, где $a\in M$. Так как $x\tau y$, то $\{a\}\in\mathfrak{M}(\nu(y))$. Возьмем некоторый элемент $b\,(\neq a)$ из $\nu(y)$. Ясно, что $b\in L(\nu(y))$. Добавим элемент b в ту компоненту x, в которой b присутствует в y. Полученную ПМ обозначим y_1. Таким образом, $\nu(y_1)=\{a, b\}$ и $x\subseteq y_1\subseteq y$. Тогда $x\tau y_1$ по (М2) и $y_1\tau y$ по определению мажоритарного пространства. Выберем элемент $c\,(\in M)$ согласно условию (*). Получим, что ПМ $z_1=(\nu_1(x)\cup\{c\}, \nu_0(x))$ и $z_2=(\nu_1(x), \nu_0(x)\cup\{c\})$ обе будут толерантны x, но не толерантны x_1. Ясно, что $c\notin\nu(y)$ — иначе было бы $\{a\}\in\mathfrak{M}(\{a, b, c\})$ по (М2), что противоречит (*). Ясно также, что z_1, z_2 не толерантны y — иначе мы получили бы то же противоречие. Поскольку $z_1, z_2\in T_x$ и $z_1, z_2\notin T_y$, то $z_1, z_2\in T_z$. Но одно из $\nu(z\cdot z_1)$ и $\nu(z\cdot z_2)$ есть самое большее $\{a\}$. Поэтому $\{a\}\in\mathfrak{M}(\nu(z))$, а отсюда $x\tau z$. Таким образом, первая часть леммы доказана.

Пусть теперь существует такое $b\in\nu(y)\cap\nu(z)$, что $b\neq a$. Выберем элемент c согласно (*). С применением (М2) легко убедиться, что ПМ $x'=(\nu_1(x), \nu_0(x)\cup\{c\})$ не толерантна ни y, ни z. Но $x'\tau x$ и, следовательно, $T_x\setminus(T_y\cup T_z)\neq\varnothing$. Это противоречие доказывает лемму.

Следствие. *Если* $x\in D^1$ *и* $T_x\subseteq T_y$, *то* $x=y$.

В самом деле, если $x\neq y$, то для ПМ z_1 из доказательства леммы 2 выполнено $z_1\in T_x$ и $z_1\notin T_y$, т. е. $T_x\not\subseteq T_y$.

Перейдем к теореме.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (*) *леммы 3. Тогда для некоторого* $U_0\subseteq T$ *выполнено*

$$S(U_0, F_{\text{пс}})<S(U_0, F_{\text{с}}).$$

Доказательство. Из (*) следует, что существует такое $A\,(\subseteq M)$, что $\mathfrak{M}(A)$ не содержит одноэлементных множеств, то есть $a\in A$ влечет $\{a\}\notin\mathfrak{M}(A)$. Действительно, пусть a таково, что $\{a\}\in\mathfrak{M}(\{a, b\})$ для некоторого b (согласно (М2) это есть наихудший случай). Элемент $c\,(\in M)$ выберем согласно (*) и положим $A=\{a, b, c\}$. Тогда $\{a\}\notin\mathfrak{M}(A)$ по (*). Кроме того, $\{b\}\notin\mathfrak{M}(A)$ и $\{c\}\notin\mathfrak{M}(A)$ — иначе по (М2) мы получили бы, что $\{b\}\in\mathfrak{M}(\{a, c\})$ и $c\in\mathfrak{M}(\{a, b\})$ соответственно, что противоречит определению мажоритарных пространств.

Итак, пусть A_0 — некоторое множество указанного типа и A^* — какое-либо наименьшее подмножество A_0, не являющееся для него меньшинством. Пусть также $a_0\in A^*$. В качестве U_0 возьмем множество

$$U_0=\bigcup_x T_x,\quad \text{где } x\in(D'\setminus\{(\varnothing, \{a_0\})\})\cup\{(A_0, \varnothing), (\varnothing, \varnothing)\}.$$

Отметим, что ПМ $(\varnothing, \varnothing)$ толерантна только самой себе, поэтому для всякого индуктора f, расшифровывающего U_0 мы можем предполагать, что $f((\varnothing, \varnothing)) = (\varnothing; \varnothing)$, а из самого U_0ПМ $(\varnothing, \varnothing)$ считать исключенной.

Докажем, что $S(U_0, F_{\text{нс}}) \leqslant 1$, а $S(U_0, F_c) > 1$. (На самом деле, конечно, $S(U_0, F_{\text{нс}}) = 1$). Первое неравенство очевидно, так как для несогласующего индуктора

$$f_{\text{нс}}(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \neq (\varnothing, \{a_0\}) \\ (A_0, \varnothing), & \text{если } x = (\varnothing, \{a_0\}) \end{cases}$$

выполнено $S(U_0, F_{\text{нс}}) = 1$.

Для доказательства второго неравенства предположим обратное, то есть, что существует согласующий индуктор f, расшифровывающий U_0 со сложностью 1. С учетом замечания о ПМ $(\varnothing, \varnothing)$ это значит, что $U_0 \subseteq T_{f(D^1)}$. Обозначим $V = \{y/y \in D^1$ и $f(y) \neq y\}$ и $W = V \setminus \{(\varnothing, \{a_0\})\}$, причем будем считать, что $(\varnothing, \{a_0\}) \in V$, так как $T_{(\varnothing, \{a_0\})} \cap U_0 = \varnothing$ и нет смысла полагать $f(\varnothing, \{a_0\}) = (\varnothing, \{a_0\})$. Таким образом, $|V| = |W| + 1$. По следствию к лемме 2, если $x \in W$ и $y \in D^1 \setminus V$, то $T_x \cap T_{f(y)} = \varnothing$ так что $T_W \subseteq T_{f(V)}$. По каждому $x \in W$ зафиксируем некоторое $y_x \in V$ такое, что $f(y_x) = x$. Пусть x и x' — произвольные элементы W. По лемме 2 имеем $T_{f(y_x)} \cap T_{x'} = \varnothing$. Ввиду произвольности выбора x' получим $T_{f(y_x)} \cap (\bigcup\limits_{\substack{x' \in W \\ x' \neq x}} T_{x'})$. Вспомнив, что x также выбрано произвольно, получим, что для каждого $x \in W$ ПМ $f(y_x)$ участвует в расшифровке одного только T_x, причем поскольку $x \neq f(y_x)$ (так как $x \in D^1$, а $y_x \in V$), то по следствию леммы 3 будет $T_x \setminus T_{f(y_x)} \neq \varnothing$. Следовательно, для расшифровки всего T_x нужно использовать и другие элементы V. Мы уже доказывали, что $T_{f(y_{x'})} \cap T_x = \varnothing$, поэтому ни одно из $y_{x'}$ для этих целей не годится, так что приходится использовать элементы из множества $V \setminus \{y_{x'}/x' \in W\}$, а поскольку $|V| = |W| + 1$, то указанное множество состоит из одного элемента. Обозначим его через y. Таким образом, мы получили, что для любого $x \in W$ выполнено $T_x \subseteq T_{f(y_x)} \cup T_{f(y)}$. По лемме 3 $f(y) \in T_x$. Значит, если в W есть хотя бы два различных элемента x_1 и x_2, то $f(y) \in T_{x_1} \cap T_{x_2}$, что противоречит следствию леммы 2. Таким образом, W либо пусто, либо состоит из одного элемента x_0. Так как мы условились включить $(\varnothing, \{a_0\})$ в V, то мы получим соответственно, что либо $V = \{(\varnothing, \{a_0\})\}$, либо $V = \{x_0, (\varnothing, \{a_0\})\}$. Рассмотрим первый случай. Поскольку $T_{(A_0, \varnothing)} \subseteq U_0$ и $T_{(A_0, \varnothing)} \cap D^1 = \varnothing$ (по выбору A_0), то $T_{(A_0, \varnothing)} \subseteq T_{f((\varnothing, \{a_0\}))}$. Пусть $f((\varnothing, \{a_0\}))$ есть ПМ (A, B). Положим $y_0 = (A_0 \setminus (A^* \cap A), A^* \cap A)$. Так как $f \in F_c$, то $a_0 \in B$ и $a_0 \overline{\in} A$. Отсюда $y_0 \triangle (A_0, \varnothing) = A^* \cap A \subseteq A^* \setminus \{a_0\}$. Ввиду минимальности A^* получим $A^*\setminus\{a_0\}\in L(A_0)$ и, значит, $y_0\triangle(A_0, \varnothing)\in L(A_0)$, а это означает, что $y\tau(A_0, \varnothing)$. Следовательно, $y_0\in U_0$. С другой стороны имеем: $A^*\subseteq A_0\subseteq A_0\cup A\cup B$, а также $A^*\bar\in L(A_0)$. По лемме 1 $A^*\cup((A\cup B)\setminus A_0)\bar\in L(A_0\cup A\cup B)$. Легко проверить, что $A^*\cup((A\cup B)\setminus A_0)\subseteq y_0\triangle(A, B)$. Поэтому, тем более $y_0\triangle(A, B)\bar\in L(A_0\cup A\cup B)$, что противоречит тому, что $U_0\subseteq T_{(A, B)}$.

Второй случай есть несколько усложненный вариант первого. Именно: $T_{x_0}\subseteq U_0\subseteq T_{f(D')}$. По следствию к лемме 2 опять находим, что $T_{x_0}\subseteq T_{f(x_0)}\cup T_{f((\varnothing, \{a_0\}))}$. Пусть $f(x_0)$ и $f((\varnothing, \{a_0\}))$ есть ПМ (A, B) и (C, D) соответственно. По лемме 3 (A, B), $(C, D)\in T_{x_0}$. Поскольку $T_{(A_0, \varnothing)}\cap T_{D'}=\varnothing$, то $T_{(A_0, \varnothing)}\subseteq T_{(A, B)}\cup T_{(C, D)}$. ПМ y_0 определим как

$$y_0=(A_0\setminus((A^*\cap A)\cup(A^*\cap C)), (A^*\cap A)\cup(A^*\cap C)).$$

Так как $f\in F_c$, то $(\varnothing, \{a_0\})\subseteq(C, D)$ и, значит, $a_0\subseteq C$. Ввиду того, что $T_{x_0}\subseteq T_{(A, B)}\cup T_{(C, D)}$, по лемме 3 получаем $(A\cup B)\cap(C\cup D)=\nu(x_0)$. Так как $x_0\neq(\varnothing, \{a_0\})$, то если $\nu(x_0)=\{a_0\}$, то $x_0=(\{a_0\}, \varnothing)$. Но тогда $(C, D)\bar\in T_{x_0}$, что противоречит доказанному. Значит $a_0\bar\in(A\cup B)\cap\cap(C\cup D)$, хотя $a_0\in D$. Значит $a_0\bar\in A\cup B$ и так как $(A^*\cap A)\cup(A^*\cap C)\subseteq\subseteq A^*\subseteq A\subseteq A\cup B$, следовательно, $y_0\triangle(A_0, \varnothing)=(A^*\cap A)\cup(A^*\cap C)\subseteq\subseteq A^*\setminus\{a_0\}\in L(A_0)$ — ввиду минимальности A^*. Этим доказано, что $y_0\tau(A_0, \varnothing)$, и, значит, $y_0\in U_0$. С другой стороны имеем: $y_0\triangle(A, B)\supseteq\supseteq A^*\cup((A\cup B)\setminus A_0)$. Как и в первом случае, применяя лемму 1, получим $A^*\cup((A\cup B)\setminus A_0)\bar\in L(A\cup B\cup A_0)$ и тем более $y_0\triangle(A, B)\bar\in\bar\in L(A\cup B\cup C\cup D\cup A_0)$. Отсюда $y_0\bar\in T_{(A, B)}$. Точно так же доказывается, что $y_0\bar\in T_{(C, D)}$, что приводит к противоречию с тем, что $T_{(A_0, \varnothing)}\subseteq T_{(A, B)}\cup T_{(C, D)}$.

Теорема доказана.

Легко убедиться, что для множества U_0, построенного в теореме, будет выполнено также $S_{ср}(U_0, F_{нс})<S_{ср}(U_0, F_c)$.

5. Наложим теперь более жесткие ограничения на те ПМ x, посредством которых некоторый индуктор расшифровывает ПМ v. Именно, в добавление к условию $f(x)\tau v$ будем требовать также согласованности x с v. Это определяет новую сложность S'

$$S'(U, G)=\min_{f\in G}\max_{v\in U}\min_{x\equiv v\,\&\,f(x)\tau v}|\nu(x)|.$$

При поиске аналогов теорем 1, 2 для сложности S' мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. 1. $S'(U, F_c)\leqslant S'(U, F_{нс})$ *для произвольного* $U\subseteq T$.

2. *Если* $a_0, b_0\in M$ *и выполнено* $\{a_0\}\in L(M\setminus\{b_0\})$, *то* $S'(U, F_c)=S'(U, F_{нс})$ *для произвольного* $V\subseteq T$.

Доказательство. Пусть f — произвольный индуктор. Чтобы доказать первое утверждение теоремы достаточно построить такой индуктор $f_c\in F_c$, что $S'(U, f)=S'(U, f_c)$ для всякого $U\subseteq T$. Положим

$$f_c(x)=(\nu_1(x)\cup(\nu_1(f(x))\setminus\nu_0(x)), \nu_0(x)\cup(\nu_0(f(x))\setminus\nu_1(x))).$$

Ясно, что если $f(x)\tau v$ и $x\subseteq v$, то $f_c(x)\,\Delta x\subseteq f(x)\,\Delta v$ и, кроме того $\nu(f_c(x))\cup\nu(v)=\nu(f(x))\cup\nu(v)$. Следовательно, $f_c(x)\tau v$ и первое утверждение доказано.

Пусть теперь $U\subseteq T$ и $f\,(\in F)$ — оптимальный для U по S' индуктор. Нам достаточно будет построить несогласующий индуктор $f_{нс}$ такой, что $S'(U, f_{нс})\leqslant S'(U, f)$ — тогда второе утверждение теоремы будет следовать из первого. В случае, если $S'(U, f)<k-1$, возможность такого построения очевидна: поскольку D^{k-1} не участвует в расшифровке, то можно полагать $f_{нс}(x)=f(x)$ при $x\notin D^{k-1}$ и $f_{нс}(x)=(\varnothing, M)$ при $x\in D^{k-1}$. Если же $S'(U, f)\geqslant k-1$, то мы утверждаем, что для индуктора

$$f_{нс}(x)=\begin{cases} x, & \text{если } x\neq(M\setminus\{b\},\ \varnothing)\\ (\varnothing,\ M), & \text{если } x=(M\setminus\{b\},\ \varnothing)\end{cases}$$

будет выполнено $S'(U, f_{нс})\leqslant k-1$, то есть для любого $u\in U$ найдется x_u такое, что $x_u\subseteq u$, $|\nu(x_u)|\leqslant k-1$ и $f_{нс}(x_u)\tau v$. Действительно, если $u\in D^k$, то в качестве x_u можно брать ПМ $(\nu_1(u)\setminus\{a_0\},\ \nu_0(u)\setminus\{a_0\})$. Если $u=(M\setminus\{b_0\},\ \varnothing)$, то $x_u=(M\setminus\{a_0,\ b_0\},\ \varnothing)$. Для остальных u можно брать $x_u=u$. Теорема доказана.

6. Отношение $\subseteq$ покомпонентного включения *ПМ* превращает T в частично упорядоченное множество, причем для произвольных двух элементов T всегда существует точная нижняя грань, тогда как точная верхняя грань может и не существовать.

Если $x,\ y,\ z\in T$ и $z\subseteq x$, то будем полагать по определению:

$$x+y=(\nu_1(x)\cup\nu_1(y),\quad \nu_0(x)\cup\nu_0(y))\qquad (=\sup\{x,\ y\})$$
$$x\cdot y=(\nu_1(x)\cap\nu_1(y),\quad \nu_0(x)\cap\nu_0(y))\qquad (=\inf\{x,\ y\})$$
$$x-y=(\nu_1(x)\setminus\nu_1(y),\quad \nu_0(x)\setminus\nu_0(y))$$
$$x^{-1}=(\nu_0(x),\ \nu_1(x))$$
$$x_z=(x-z)+z^{-1}$$

Все операции, кроме $+$ являются всюду определенными.

Под *сегментом* $[x,\ y]$, где $x,\ y\in T$, будем понимать множество $[x,\ y]=\{t_{\in T}/t\supseteq x\cdot y$ и $\nu(t)\subseteq\nu(x)\cup\nu(y)\}$. Оказывается, что справедлива следующая

Теорема 4. *Толерантность τ на T удовлетворяет условиям* (M1)—(M3) *тогда и только тогда, когда*:

(Т1) *для любого $z\in T$ такого, что $x+z$ и $y+z$ определены $x\tau y$ влечет $x+z\ \tau y+z$;*

(Т2) *$x\tau y$ и $z_1,\ z_2\in[x,\ y]$ влечет $z_1\tau z_2$;*

(Т3) *$x\tau y$ и $z\subseteq x\cdot y$ влечет $x_z\tau y_z$;*

(Т4) *$x\tau y$ и $x\tau y^{-1}$ влечет $x=(\varnothing,\ \varnothing)$.*

Доказательство. Напомним, что аксиомы $(M\,1)$ — $(M\,3)$ были попарно равносильны $(M\,1')$ — $(M\,3')$ поэтому в доказательстве мы можем независимо пользоваться как теми, так и другими.

Пусть τ удовлетворяет (M1)—(M3) и $x\tau y$ для некоторых $x, y \in T$. Если $x+z$ и $y+z$ определены, то $\nu((x+z)\cdot(y+z)) = \nu(x\cdot y) \cup \nu(z)$, так что (T1) будет следовать из (M1′) и (M3′). Пусть теперь $z_1, z_2 \in [x, y]$. Поскольку $\nu(x\cdot y) \in \mathfrak{M}(\nu(x) \cup \nu(y))$ и $\nu(x\cdot y) \subseteq \nu(z_1\cdot z_2)$, то $\nu(z_1\cdot z_2) \in \mathfrak{M}(\nu(x) \cup \nu(y))$ по определению мажоритарного пространства. Так как $\nu(z_1\cdot z_2) \subseteq \nu(z_1) \cup \nu(z_2) \subseteq \nu(x) \cup \nu(y)$, то $\nu(z_1\cdot z_2) \in \mathfrak{M}(\nu(z_1) \cup \nu(z_2))$ по (M2). Таким образом, $z_1\tau z_2$ и (T2) также выполнено. Если $z \subseteq x\cdot y$, то $\nu(x\cdot y) = \nu(x_z\cdot y_z)$ и, значит, (T3) будет вытекать из (M3). Пусть теперь вместе с $x\tau y$ выполнено также $x\tau y^{-1}$. Это значит, что и $\nu(x\cdot y)$, и $\nu(x\cdot y^{-1})$ принадлежат $\mathfrak{M}(\nu(x) \cup \nu(y))$ (так как $\nu(y) = \nu(y^{-1})$). Но $\nu(x\cdot y) \cap \nu(x\cdot y^{-1}) = \varnothing$. Отсюда по определению мажоритарного пространства и нашему соглашению о $\mathfrak{M}(\varnothing)$ получаем $\nu(x) = \nu(y) = \varnothing$, то есть $x = (\varnothing, \varnothing)$.

Допустим теперь, что τ удовлетворяет (T1)—(T4). Поскольку всегда $x\tau x$ то по (T4), если $x\tau x^{-1}$, то $x = (\varnothing, \varnothing)$. Если $x\tau y$ и $y\cdot x = (\varnothing, \varnothing)$, то $x^{-1} \in [x, y]$; следовательно, по (T2) $x\tau x^{-1}$ и, значит, $x = (\varnothing, \varnothing)$. В частности, при $y = (\varnothing, \varnothing)$ получаем, что ПМ $(\varnothing, \varnothing)$ толерантна только самой себе. Докажем, что (T5) $x\tau y$, $x\tau z$ и $z\cdot y = (\varnothing, \varnothing)$ влечет $x = (\varnothing, \varnothing)$. Обозначим $y_1 = x\cdot y$ и $z_1 = x\cdot z$. Так как $y_1 \in [x, y]$ и $z_1 \in [x, z]$, то по (T2) $x\tau y_1$ и $x\tau z_1$. Из $y\cdot z = (\varnothing, \varnothing)$ вытекает $\nu_i(y_1) \cap \nu_i(z_1) = \varnothing$ $(i = 0, 1)$. Если $a \in \nu_1(y_1) \cap \nu_0(z)$, то $a \in \nu_1(x)$ и $a \in \nu_0(x)$, чего не может быть следовательно, $\nu_1(y_1) \cap \cap \nu_0(z_1) = \varnothing$. Точно так же $\nu_0(y_1) \cap \nu_1(z_1) = \varnothing$. Отсюда $\nu(y_1) \cap \nu(z_1) = \varnothing$, а это означает, что ПМ $y_2 = y_1 + z_1^{-1}$ и $z_2 = z_1 + y_1^{-1}$ определены. Имеем: $y_2 \in [x, y_1]$ и $z_2 \in [x, z_1]$, следовательно $x\tau y_2$ и $x\tau z_2$. С другой стороны, $z_1 + y_1^{-1} = (y_1 + z_1^{-1})^{-1}$, то есть $z_2 = y_2^{-1}$. Отсюда по (T4) получаем $x = (\varnothing, \varnothing)$.

Построим теперь систему мажоритарных пространств $\{\mathfrak{M}(A)/A \subseteq \subseteq M\}$ такую, что выполнены условия (M1)—(M3). Для каждого $A \subseteq M$ и $B \subseteq A$ положим $B \in \mathfrak{M}(A)$ тогда и только тогда, когда существуют $x, y \in T$, такие, что $\nu(x\cdot y) = B$, $\nu(x) \cup \nu(y) = A$ и $x\tau y$. В частности, всегда $A \in \mathfrak{M}(A)$, поскольку $(A, \varnothing)\tau(A, \varnothing)$. Пусть c таково, что $B \subseteq C \subseteq A$. Ясно, что ПМ $x_1 = (\nu_1(x\cdot y) \cup (A \setminus B), \nu_0(x\cdot y))$ и $y_1 = (\nu_1(x\cdot y) \cup (C \setminus B), \nu_0(x\cdot y))$ принадлежат $[x, y]$. Кроме того, $\nu(x_1) \cup \nu(y_1) = A$ и $\nu(x_1\cdot y_1) = C$. По (T2) $x_1\tau y_1$ и, значит, $C \in \mathfrak{M}(A)$. Пусть теперь $B' \in \mathfrak{M}(A)$. Тогда для некоторых $x', y' \in T$ будет $\nu(x'\cdot y') = B'$, $\nu(x') \cup \nu(y') = A$ и $x'\tau y'$. Если $B \cap B' = \varnothing$, то ПМ $z = (x\cdot y) + (x'\cdot y')$ определена. Ясно, что $z \in [x, y]$ и $z \in [x', y']$. Тогда по (T2) $z\tau(x\cdot y)$ и $z\tau(x'\cdot y')$. По (T5) отсюда следует, что $z = (\varnothing, \varnothing)$, а так $x\tau z$ и $y\tau z$ (также по (T2)), то $x = y = (\varnothing, \varnothing)$, т. е. $A = \varnothing$. Таким образом, если $A \neq \varnothing$, то $B \cap B' \neq \varnothing$. Мы доказали, что $\mathfrak{M}$(A) в самом деле представляет собой мажоритарное пространство.

Докажем (M1′). Пусть $A_1 \in \mathfrak{M}(A_2)$ и $A_2 \subseteq A_3$. Тогда для некоторых $x, y \in T$ будет $\nu(x\cdot y) = A_1$, $\nu(x) \cup \nu(y) = A_2$ и $x\tau y$. Рассмотрим ПМ $z = (A_3 \setminus A_2, \varnothing)$. По (T1) $(x+z)\tau(y+z)$. Следовательно,

$\nu((x+z)\cdot(y+z))\in\mathfrak{M}(\nu(x+z)\cup\nu(y+z))$, то есть $A_1\cup(A_3\setminus A_2)\in$ $\in\mathfrak{M}(A_3)$.

Докажем (M2). Пусть $A_1\subseteq A_2\subseteq A_3$, $A_1\in\mathfrak{M}(A_3)$ и пусть также $x\eqsim y$, $\nu(x\cdot y)=A_2$, $\nu(x)\cup\nu(y)=A_3$. Тогда ПМ $z=(\nu_1(x\cdot y)\cup(A_2\setminus A_1),$ $\nu_0(x\cdot y))$ принадлежит $[x, y]$. Отсюда $z\eqsim(x\cdot y)$ и, значит, $\nu(z\cdot(x\cdot y))\in$ $\in\mathfrak{M}(\nu(z)\cup\nu(x\cdot y))$, то есть $A_1\in\mathfrak{M}(A_2)$.

Докажем (M3′). Если $x\eqsim y$, то (M3′) выполнено по построению $\mathfrak{M}$. Если же $\nu(x\cdot y)\in\mathfrak{M}(\nu(x)\cup\nu(y))$, то существуют такие $x', y'\in T$, что $\nu(x'\cdot y')=\nu(x\cdot y)$, $\nu(x')\cup\nu(y')=\nu(x)\cup\nu(y)$ и $x'\eqsim y'$. Обозначим $z=(x'\cdot y')\cdot(x\cdot y)^{-1}$. Имеем: $z\subseteq x'\cdot y'$, так что $x'_z\eqsim y'_z$. Но $x, y\in$ $\in[x'_z, y'_z]$. Отсюда по (T2) $x\eqsim y$. Теорема доказана.

В заключение автор выражает благодарность Э. М. Погосяну за постановку задачи и полезные обсуждения.

Ա. Հ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

ՀԻՊՈԹԵԶՆԵՐԻ ՀԱՄԱՁԱՅՆԵՑՎԱԾՈՒԹՅՈՒՆԸ ՍԿԶԲՆԱԿԱՆ ԻՆՖՈՐՄԱՑԻԱՅԻ ՀԵՏ ԵՎ ԻՆԴՈՒԿՏԻՎ ԱՐՏԱԾՄԱՆ ԲԱՐԴՈՒԹՅՈՒՆԸ

Դիտարկվում է հասկացությունների ինդուկտիվ արտածման ալգորիթմների երկու դաս. 1) ալգորիթմներ, որոնք համաձայնեցնում են իրենց կողմից արտածվող հիպոթեզները այն նախնական ինֆորմացիայի հետ, որից ելնելով այդ հիպոթեզները կառուցվում են, և 2) ալգորիթմներ, որոնք այդ հատկությամբ չեն օժտված։ Ստացված են նշված դասերի բարդության համեմատական բնութագրերը, որոնք հանդիսանում են նախկինում ստացված արդյունքների ընդհանրացում հասկացությունների «նմանության» ավելի ընդհանուր սահմանման դեպքի համար։ Նմանության առաջարկված ֆորմալացումը հիմնված է մաժորիտար տարածության գաղափարի վրա։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Виленкин Н. Я., Шрейдер Ю. А.* Мажоритарные пространства и квантор «большинства».— Сб. «Семиотика и информатика», вып. 8, 1977.
2. *Мартиросян А. А., Погосян Э. М.* Об устойчивости сравнительных характеристик согласующих индукторов.— Сб. «Семиотика и информатика», вып. 14, 1980.
3. *Погосян Э. М.* К теории автоматического синтеза понятий.— Сб. «Семиотика и информатика», вып. 8, 1977.
4. *Мартиросян А. А.* О влиянии согласованности гипотез с исходной информацией на сложность индуктивного вывода. ДАН АрмССР, т. LXXVII, № 4, 1983.