А. А. МАРТИРОСЯН

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ НАДЕЖНЫХ АЛГОРИТМОВ ИНДУКТИВНОГО ВЫВОДА

Введение

Основная проблема теории индуктивного вывода состоит в отыскании и исследовании систематических методов получения информации, носящей более общий характер, чем данные, на основе которых эта информация вырабатывается.

Типичным примером ситуации, в которой индуктивные методы могут быть плодотворными, является задача расшифровки алгоритма, в общем виде формируемая следующим образом. Дано алгоритмическое устройство D, единственным источником информации о котором может служить эксперимент, состоящий в том, что на вход D подается некоторое слово x из входного языка устройства D. Устройство запускается на x и (если заканчивает работу) выдает некоторое слово y из выходного языка D. Совокупность таких пар $(x; y)$ называется лингвистическим поведением D (в математической теории индуктивного вывода под лингвистическим поведением понимается обычно график функции, реализуемой устройством D). Требуется по лингвистическому поведению D сформировать новое устройство D', лингвистическое поведение которого было бы неотличимо от данного. Таким образом, задачей является обобщение информации типа «вход — выход» для восстановления алгоритма устройства D.

Ясно, что поскольку обычно лингвистическое поведение D бесконечно, то алгоритмическое решение этой задачи невозможно. Можно надеяться, однако, что по некоторому конечному фрагменту лингвистического поведения D удастся сформулировать гипотезу об искомом объекте D', которая, непрерывно уточняясь по мере поступления новой информации, в пределе приведет нас к требуемому результату. Именно такой метод решения предлагает так называемый гипотетико-дедуктивный подход к индуктивному выводу [7], формализацией которого и является математическая теория, исследуемая в данной статье.

Эта формализация, предложенная Голдом [6], базируется на следующих двух дополнительных предположениях:

а) Выдвижение и модификация гипотез осуществляется с помощью некоторого вычислительного устройства типа машины Тьюринга, фиксацией которого и определяется каждый конкретный метод индуктивного вывода. Мы будем называть это устройство *индуктивной машиной*.

б) Вопросы сбора и накопления информации о лингвистическом поведении D считаются выходящими за рамки собственно теории индуктивного вывода. Поэтому предполагается, что все лингвистическое поведение заранее записано на некоторой бесконечной ленте и шаг за шагом подается на вход индуктивной машины, как только ее алгоритм этого потребует.

Традиционную проблематику этой теории составляют вопросы сходимости, границ применимости индуктивных методов, а также сравнение тех или иных их разновидностей. Эти же вопросы обсуждаются и в нашей статье.

В § 1 дается более строгое определение индуктивных машин, устанавливаются некоторые их свойства, связанные с обработкой бесконечных массивов данных. В § 2 обсуждается четыре возможных варианта понятия «индуктивный вывод», отличающихся друг от друга по критерию успешности вывода и по тому, как конкретизируется каждый раз термин «лингвистическое поведение». Устанавливаются их общие свойства и различия. Затем (§ 3) в применении к каждому из этих вариантов рассматривается требование надежности, заключающееся в том, что процесс индуктивного вывода должен либо не сходиться вообще, либо сходиться к правильному результату. При этом по разным причинам оказывается, что для дальнейшего интерес представляет лишь один из вариантов, и этот вариант совпадает с наиболее часто используемым в литературе определением индуктивного вывода (см., например, [5]). В § 4 устанавливается, что любую надежную индуктивную машину можно без нарушения общности считать равномерной. Это означает, что если даны два алгоритмических устройства D и D', реализующие функции φ и φ' соответственно, и если график φ' есть подмножество графика φ, то всякая надежная индуктивная машина, расшифровывающая D, расшифровывает также и D'. Рассматривается также подкласс надежных индуктивных машин, которые изменяют выданную ими гипотезу лишь в том случае, когда имеется полная уверенность в ее несоответствии вновь полученным данным. В § 5 даются две характеризации области применимости этих «упорных» машин — как в теоретико-сложностных, так и в теоретико-нумерационных терминах.

Все используемые в статье сведения по теории рекурсивных функций можно найти в книге Роджерса [3].

Прежде чем перейти к формальным определениям, сделаем одно замечание относительно используемого нами несколько неопределенного термина «счетный универсум $\mathbf{N}$'», под которым мы понимаем любое бесконечное множество, рекурсивно изоморфное множеству натуральных чисел N. Замена N на $\mathbf{N}$ в основных определениях позволяет обойти вопросы кодировки данных и избежать ненужных повторений в дальнейших определениях и формулировках. Отметим, что некоторая громоздкость получающихся при этом обозначении объясняется тем, что мы стремились для удобства сравнения дословно сохранить все заимствованные нами из литературы определения (например, введение в рассмотрение символа «отсутствия информации» $*$ объясняется только этим обстоятельством. Должно быть ясно, однако, что все эти детали носят исключительно технический характер.

§ 1. ИНДУКТИВНЫЕ МАШИНЫ И ИХ СХОДИМОСТЬ

Пусть N есть некоторый счетный универсум, $A \subseteq \mathrm{N}$, и $*$ есть некоторый выделенный символ, такой, что $* \notin \mathrm{N}$. Произвольную бесконечную последовательность, $(a(0), a(1), \ldots)$, состоящую из элементов N и символов $*$, назовем перечислением множества A, если A совпадает с множеством $\{a(i)/a(i) \in \mathrm{N}\}$. Например, единственным перечислением пустого множества будет последовательность $(*, *, *, \ldots)$. Обозначение $\vec{A}$ будет использоваться для перечислений A.

Обозначим $FIN(\mathrm{N})$ множество всех конечных последовательностей, состоящих из элементов множества $\mathrm{N} \cup \{*\}$; $FIN(\mathrm{N}) = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} (\mathrm{N} \cup \{*\})^n$. Если $\sigma, \sigma' \in FIN(\mathrm{N})$, то конкатенацию последовательностей σ и σ' будем обозначать $\sigma \cdot \sigma'$. Запись $\sigma' \subset \sigma$ будет означать, что σ' есть начальный отрезок σ, то есть, что $\sigma = \sigma' \cdot \sigma''$ для некоторого $\sigma'' \in FIN(\mathrm{N})$. Если $\sigma = (\sigma(0), \ldots, \sigma(n)) \in FIN(\mathrm{N})$, то множество $\{\sigma(i)/\sigma(i) \in \mathrm{N},\ i \leqslant n\}$ будем обозначать $\{\sigma\}$.

Нас будут интересовать отображения из множества всевозможных перечислений $\vec{\mathrm{N}} = \{\vec{A}/A \subseteq \mathrm{N}\}$ во множество натуральных чисел N. Для их определения рассмотрим сначала машину Тьюринга M, реализующую общерекурсивную функцию из $FIN(\mathrm{N})$ в N. Поскольку любая последовательность из $FIN(\mathrm{N})$ является начальным отрезком некоторого перечисления какого-либо множества, то функцию $M : FIN(\mathrm{N}) \to N$ можно доопределить на $\vec{\mathrm{N}}$, полагая для любого $\vec{A} \in \vec{\mathrm{N}}$

$$M[\vec{A}] = \lim M[\vec{A}(n)],$$

где $\vec{A}(n)$ — начальный отрезок перечисления $\vec{A}$ длины n (тот факт, что $\lim M[\vec{A}(n)]$ существует будем обозначать как $M[\vec{A}]\downarrow$). Алгоритмическое устройство, реализующее это отображение, будем называть *индуктивной машиной* и обозначать той же буквой M. Индуктивную машину можно представить себе как трехленточную машину Тьюринга, на первой, входной ленте которой записано некоторое перечисление. Считывая очередной элемент $a(n)$ перечисления, машина производит на второй, рабочей ленте вычисления, входными параметрами которых являются элемент $a(n)$ и «накопленный опыт» машины — информация, оставленная машиной на рабочей ленте после обработки предыдущих элементов $a(i)$. Затем на третьей, выходной ленте записывается некоторое натуральное число, отделенное от предыдущей записи каким-либо разделителем и программа переходит к обработке следующего элемента входного перечисления. Результатом работы индуктивной машины является последовательность чисел на выходной ленте, а значением функции, реализуемой этой машиной на входном перечислении — предел этой последовательности. Заметим, что поскольку исходная машина Тьюринга реализует общерекурсивную функцию, то каждый член выходной последовательности будет определен и, следовательно, каждый элемент входного перечисления будет когда-либо обработан*). Это не значит, конечно, что функция $M : \vec{\mathbf{N}} \to N$ также будет всюду определенной, так как последовательность $M[\vec{A}(n)]$ ($n = 0, 1, \ldots$) может и не стабилизоваться.

Можно показать, что вычислительные возможности индуктивных машин значительно превосходят вычислительные возможности обычных машин Тьюринга.

Индуктивную машину можно представить себе и как оператор перечисления [3] с той лишь разницей, что мы не требуем, чтобы машина Тьюринга перечисляла одно и то же множество чисел независимо от порядка перечисления входного множества. Однако ниже мы убедимся что индуктивные машины свойством независимости от порядка все же обладают — правда, в несколько ином смысле.

Пусть $B^*(\mathbf{N})$ — класс эффективно перечислимых подмножеств множества $\mathbf{N}$ и пусть $\mathbf{A} \subseteq B^*(\mathbf{N})$. Множество $\vec{\mathbf{N}}(\mathbf{A}) \subseteq \vec{\mathbf{N}}$ назовем *типом перечисления* $\mathbf{A}$, если для любого $A \in \mathbf{A}$ в $\vec{\mathbf{N}}(\mathbf{A})$ содержится хотя бы одно эффективное перечисление множества A. Тип перечисления $\vec{\mathbf{N}}(\mathbf{A})$ назовем ***алгоритмически замкнутым***, если для любой общерекурсивной сюръекции f и любого перечисления $\vec{A} = (a(0), a(1), \ldots a(n), \ldots)$ из $\vec{\mathbf{N}}(\mathbf{A})$ перечисление $(a(f(0)), a(f(1)), \ldots a(f(n)), \ldots)$ также принадлежит $\vec{\mathbf{N}}(\mathbf{A})$. В частности, $\vec{\mathbf{N}}$ является алгоритмически замкнутым типом перечисления множества $B^*(\mathbf{N})$. Если $\mathbf{A} \subset B^*(\mathbf{N})$ и $\mathbf{A}$ не содержит в качестве элемента пустого множества, то класс $\vec{N}(\mathbf{A}) = \{\vec{A}/A \in \mathbf{A}$ и $\vec{A}$ не содержит символа $*\}$ является алгоритмически замкнутым типом перечисления.

Если M — индуктивная машина, а $\vec{\mathbf{N}}(\mathbf{A})$ — тип перечисления, то $Arg^{\vec{\mathbf{N}}(\mathbf{A})}(M)$ будет обозначать множество

$Arg^{\vec{\mathbf{N}}(\mathbf{A})}(M) = \{A/A \in \mathbf{A}$ и $M[\vec{A}]\downarrow$ для любого перечисления $\vec{A} \in \vec{\mathbf{N}}(\mathbf{A})$ множества $A\}$.

---

*) Ограничение общерекурсивными функциями $M : FIN(\mathbf{N}) \to N$ на самом деле не существенно для почти всех вопросов, обсуждающихся в данной статье. Мы не будем касаться этого, отсылая читателя к статье [8].

Теперь мы можем сформулировать утверждение, лежащее, на наш взгляд, в основе многих результатов в теории индуктивного вывода и, в частности, результатов данной статьи*).

Лемма 1 (о сходимости). *Пусть* $\vec{\mathrm{N}}(\mathrm{A})$ — *алгоритмически замкнутый тип перечисления и* M — *произвольная индуктивная машина. Тогда для любого множества* $A \in Arg^{\vec{\mathrm{N}}(\mathrm{A})}(M)$ *найдется такая конечная последовательность* $\sigma \in FIN(\mathrm{N})$, *что* $\{\sigma\} \subseteq A$ *и* $M[\sigma] = M[\sigma \cdot \sigma']$ *для любой последовательности* $\sigma' \in FIN(\mathrm{N})$, $\{\sigma'\} \subseteq A$.

Доказательство. Предположим противное, то есть, что существует множество $A \in Arg^{\vec{\mathrm{N}}(\mathrm{A})}(M)$ такое, что для любого σ, $\{\sigma\} \subseteq A$ найдется такое σ', $\{\sigma'\} \subseteq A$, что $M[\sigma] \neq M[\sigma \cdot \sigma']$. Пусть $(a(0), a(1), \ldots)$ есть произвольное эффективное перечисление A, содержащееся в $\vec{\mathrm{N}}(\mathrm{A})$. Мы хотим построить перечисление $\vec{A}$ множества A, такое, что $\vec{A} \in \vec{\mathrm{N}}(\mathrm{A})$, но $M[\vec{A}]\uparrow$ и таким образом получить противоречие с $A \in Arg(M)$.

Положим $\sigma = (a(0))$. По нашему предположению, перебирая по очереди все элементы $a(0), a(1), a(2), \ldots$ мы можем составить из них такую конечную последовательность σ', что $M[\sigma] \neq M[\sigma \cdot \sigma']$. Положим $\sigma_0 = \sigma \cdot \sigma'$. Возьмем теперь в качестве σ последовательность $\sigma_0 \cdot (a(1))$. Для подходящего σ' опять будем иметь $M[\sigma] \neq M[\sigma \cdot \sigma']$. Положим $\sigma_1 = \sigma \cdot \sigma'$. Применяя эту процедуру мы будем получать все новые последовательности σ_i, причем ясно, что $\sigma_{i-1} \subset \sigma_i$, так что бесконечная последовательность $\vec{A} = \cup \sigma_i$ существует. По построению σ_i каждое $a(i)$ будет по крайней мере один раз встречаться среди элементов $\vec{A}$, так что $\vec{A}$ на самом деле будет перечислением множества A. Поскольку процедура получения $\vec{A}$ по перечислению $(a(0), a(1), \ldots)$ эффективна, то по алгоритмической замкнутости $\vec{\mathrm{N}}(\mathrm{A})$ получим, что $\vec{A} \in \vec{\mathrm{N}}(\mathrm{A})$. Наконец, $M[\vec{A}]\uparrow$, так как по построению σ_i функция $M[\sigma]$ на каждом интервале $\sigma_{i-1} \subseteq \sigma \subseteq \sigma_i$ хотя бы один раз изменяет свое значение. Лемма доказана.

Определение. Индуктивная машина M называется независимой от порядка, если для любого множества $A \subseteq N$ либо $M[\vec{A}]\uparrow$ для всех перечислений множества A, либо же существует такое число a, что $M[\vec{A}]\downarrow$ и $M[\vec{A}] = a$ для всех перечислений $\vec{A}$.

---

*) Результаты данного параграфа повторяют результаты, полученные Л. и М. Блюмами в [5].

Таким образом, для независимых от порядка машин запись $M[\vec{A}]$ всегда можно заменить записью $M[A]$. Далее, легко убедиться, что для любого типа перечисления $\vec{\mathrm{N}}(\mathrm{A})$ и любой независимой от порядка машины M выполнено $Arg^{\vec{\mathrm{N}}(\mathrm{A})}(M) = Arg^{\vec{\mathrm{N}}_0(\mathrm{A})}(M)$, где $\vec{\mathrm{N}}_0(\mathrm{A})$ — тип перечисления, содержащий все возможные перечисления множеств из A. В соответствии с этим запись $Arg^{\vec{\mathrm{N}}(\mathrm{A})}(M)$ для независимых от порядка машин мы будем заменять записью $Arg^{\mathrm{A}}(M)$.

Из леммы о сходимости вытекает, что при рассмотрении вопросов сходимости индуктивных машин можно ограничиться только независимыми от порядка машинами:

Следствие 1. *Пусть $\vec{\mathrm{N}}(\mathrm{A})$ алгоритмически замкнуто. Тогда по любой индуктивной машине M можно построить независимую от порядка машину M' такую, что $Arg^{\vec{\mathrm{N}}(\mathrm{A})}(M) \subseteq Arg^{\mathrm{A}}(M')$ и для любого множества $A \in Arg^{\vec{\mathrm{N}}(\mathrm{A})}(M)$ найдется такое его перечисление* $\vec{A} \in \vec{\mathrm{N}}(\mathrm{A})$, что $M[A] = M'[\vec{A}]$.

Доказательство. Пусть $\sigma \in FIN(N)$ и n есть количество элементов в σ, то есть $\mathrm{length}(\sigma) = n$. Значение $M'[\sigma]$ будем вычислять согласно следующему алгоритму.

Пусть $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_i, \ldots$ — список всех последовательностей из $FIN(\mathrm{N})$ и пусть $i(\sigma)$ есть то минимальное $i \leqslant n$ (если такое i существует), что (1) $\{\sigma_i\} \subseteq \{\sigma\}$ и (2) для любой последовательности σ', для которой $\{\sigma'\} \subseteq \{\sigma\}$ и $\mathrm{length}(\sigma') \leqslant n$ выполнено $M[\sigma_i] = M[\sigma_i \cdot \sigma']$. Если такое i существует, то полагаем $M'[\sigma] = M[\sigma_i]$, в противном случае, $M'[\sigma] = n$.

Пусть $A \subseteq \mathrm{N}$. Если существует такое σ, $\{\sigma\} \subseteq A$, что для всех σ', $\{\sigma'\} \subseteq A$, выполнено $M[\sigma] = M[\sigma \cdot \sigma']$, то ясно, что $M'[\vec{A}]$ для любого $\vec{A}$ сходится к первому из таких $M[\sigma]$. Если же σ не существует, то $M'[\vec{A}]$ расходится. Таким образом, M' независима от порядка.

Кроме того, если $A \in Arg^{\vec{\mathrm{N}}(\mathrm{A})}(M)$, то по лемме о сходимости требуемое σ (обозначим его $\sigma(A)$) существует и потому $A \in Arg^{\vec{\mathrm{N}}(\mathrm{A})}(M)$ и, следовательно, $Arg^{\vec{\mathrm{N}}(\mathrm{A})}(M) \subseteq Arg^{\vec{\mathrm{N}}(\mathrm{A})}(M')$. По построению M' ясно, что для любого перечисления $\vec{A}$ в этом случае будет выполнено $M'[\vec{A}] = M[\sigma(A)] = M[\sigma(A) \cdot \vec{A}]$. А так как $\sigma(A) \cdot \vec{A}$ есть также перечисление A, получающееся из $\vec{A}$ применением некоторой рекурсивной сюръекции, то по алгоритмической замкнутости $\vec{\mathrm{N}}(\mathrm{A})$ получим, что $\sigma(A)\cdot\vec{A}\in\vec{\mathrm{N}}(\mathrm{A})$ как только $\vec{A}\in\vec{\mathrm{N}}(\mathrm{A})$. Следствие доказано.

Перейдем теперь к основному в теории индуктивного вывода понятию идентификации.

§ 2. ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТЬ ЧАСТИЧНО-РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть φ — частичная функция из N в N. Определенность значения функций φ в точке x мы будем обозначать как $\varphi(x)\downarrow$, а неопределенность — как $\varphi(x)\uparrow$. Множество $\{\varphi\}=\{(x,\ \varphi(x))/\varphi(x)\downarrow\}$ назовем графиком φ. В соответствии с основным определением функции как отношения мы часто будем отождествлять функцию с ее графиком. Например, запись $\varphi\subseteq\varphi'$ будет служить сокращением для $\{\varphi\}\subseteq\{\varphi'\}$, всякое перечисление множества $\{\varphi\}$ будем называть перечислением φ, а символ P будет служить как для обозначения множества всех частично-рекурсивных функций, так и множества всех их графиков.

Возьмем в качестве N множество $N\times N$ и обозначим через $\vec{\mathrm{N}}(P)$ класс всех перечислений всех функций из P (ввиду нашего замечания о графиках, $\varphi\subseteq\mathrm{N}$ для любой функции $\varphi\in P$). В предположении, что фиксирована некоторая геделева нумерация $\{\Phi_i\}^{i=0,\infty}$ всех частично-рекурсивных функций, введем следующее

Определение. Индуктивная машина M *идентифицирует* функцию $\varphi\in P$, если $\varphi\in Arg^{\vec{\mathrm{N}}(P)}(M)$ и для любого перечисления $\vec{\varphi}$ функции φ имеет место $\Phi_{M[\vec{\varphi}]}\supseteq\varphi$, то есть $M[\vec{\varphi}]$ есть геделев номер некоторого расширения функции φ. Если же $M[\vec{\varphi}]$ при каждом перечислении $\vec{\varphi}$ выдает геделев номер самой функции φ, то мы будем говорить, что M *строго идентифицирует* φ.

Множество функций, идентифицируемых (строго идентифицируемых) машиной M обозначим $W(M)$ (соответственно, $S(M)$). Множество функций $U\subseteq P$ называется идентифицируемым (строго идентифицируемым), если $U\subseteq W(M)$ (соответственно, $U\subseteq S(M)$) для некоторой индуктивной машины M. Класс всех идентифицируемых (строго идентифицируемых) множеств обозначается через W (соответственно S).

Такая концепция идентифицируемости рассматривается, например, в работах Голда [6], Блюма [5].

Альтернативой ему может служить подход, предлагаемый Кюгелем [7].

В качестве N возьмем множество $N\times(N\cup\{\#\})$, где $\#$ — некоторый выделенный символ. Если $\varphi\in P$, то оракулом функции φ назовем множество $O^{\varphi}=\{\varphi\}\cup\{(x,\ \#)/\varphi(x)\uparrow\}$ (то есть оракул функции φ

есть ее график, дополненный информацией о точках неопределенности φ). Таким образом, $O^{\varphi} \subseteq \mathbf{N}$ для любого $\varphi \in P$. Обозначим O^P множество $\{O^{\varphi}/\varphi \in P\}$ и в качестве $\vec{\mathbf{N}}(O^P)$ возьмем множество всевозможных перечислений $\vec{O}^{\varphi}(\varphi \in P)$, не содержащих символа $*$.

Определение. Функция $\varphi \in P$ *оракульно идентифицируется* индуктивной машиной M, если $O^{\varphi} \in Arg^{\vec{\mathbf{N}}(O^P)}(M)$ и для любого перечисления $\vec{O}^{\varphi} \in \vec{\mathbf{N}}(O^P)$ оракула O^{φ} выполнено $\Phi_{M[\vec{O}^{\varphi}]} \supseteq \varphi$. Если вместо последнего включения для всех $\vec{O}^{\varphi}$ выполнено равенство $\Phi_{M[\vec{O}^{\varphi}]} = \varphi$, то будем говорить, что M *строго оракульно идентифицирует* φ. Для множества функций, оракульно (строго оракульно) идентифицируемых машиной M введем обозначение $OW(M)$ (соответственно $OS(M)$). Множество $U \subseteq P$ оракульно (строго оракульно) идентифицируется машиной M, если $U \subseteq OW(M)$ (соответственно $U \subseteq OS(M)$). Для классов $\{U \in P / \exists M (U \subseteq O(M)\}$ и $\{U \in P / \exists M (U \subseteq OS(M)\}$ введем обозначения OW и OS соответственно.

Задачей данного параграфа будет сравнение понятий W-, S-, OW- и OS-идентификации. Отметим в первую очередь их общие свойства. Поскольку классы $\vec{\mathbf{N}}(P)$ и $\vec{\mathbf{N}}(O^P)$ являются алгебраически замкнутыми и поскольку для любой индуктивной машины M выполнено $W(M) \subseteq Arg^{\vec{\mathbf{N}}(P)}(M)$ и $OW(M) \subseteq Arg^{\vec{\mathbf{N}}(O^P)}(M)$, то из леммы о сходимости непосредственно вытекает

Следствие 2. *Если $\varphi \in W(M)$ ($\varphi \in OW(M)$), то найдется такая конечная последовательность σ, что $\{\sigma\} \subseteq \varphi$ (соответственно $\{\sigma\} \subseteq O^{\varphi}$) и $M[\sigma] = M[\sigma \cdot \sigma']$ для любой последовательности σ', для которой $\{\sigma'\} \subseteq \varphi$ (соответственно $\{\sigma'\} \subseteq O^{\varphi}$).*

Поскольку S- (OS-) идентификация является частным случаем W- (OW-) идентификации, то это утверждение остается справедливым и для любой функции $\varphi \in S(M)$ (соответственно $\varphi \in OS(M)$).

Кроме того, по следствию 1 к лемме о сходимости получаем:

Следствие 3. *Если множество U идентифицируется' (S-, OW-, OS-идентифицируется), некоторой индуктивной машиной, то U идентифицируется также и некоторой независимой от порядка машиной.*

Следствие 3 означает, фактически, что при рассмотрении многих вопросов, связанных с понятием идентификации (S-, OW-, OS-идентификации) ограничение независимыми от порядка машинами не нарушает общности. Это замечание справедливо, в частности для вопросов надежности, обсуждаемых в следующих параграфах. Поскольку имеют место очевидные включения $S \subseteq OS$, $W \subseteq OW$, $S \subseteq W$ и $OS \subseteq OW$, то совпадение основных свойств этих четырех концепций идентификации, отраженное в следствиях 2 и 3, дает надежду на то, что хотя бы одно из указанных включений может превратиться в равенство. Однако имеет место

Теорема 1. *Имеют место соотношения*

$$\begin{array}{ccccc} W & \subset & OW & \subset & B(P) \\ \cup & & \cup & & \\ S & \subset & OS, & & \end{array}$$

где $B(P)$ означает класс всех подмножеств P. Кроме того, классы W и OS не сравнимы по $\subseteq$.

Доказательство. Барздинь [1] показал, что существует множество общерекурсивных функций U, также, что $U \not\in W$. Поскольку для общерекурсивных функций понятия графика и оракула совпадают, то произвольное множество общерекурсивных функций идентифицируемо тогда и только тогда, когда оно оракульно идентифицируемо. Следовательно, $U \not\in OW$ и $OW \subset B(P)$. Мы не будем повторять доказательство Барздиня, но проиллюстрируем примененную им конструкцию на примере соотношения $W \setminus OS \neq \varnothing$.

Пусть φ_0 есть тождественно равная нулю функция и пусть $U_0 = \{\varphi / \varphi \in P \,\&\, \varphi \subseteq \varphi_0\}$. Очевидно, что $U_0 \in W$ (U_0 идентифицируется машиной, выдающей все время какой-либо геделев номер φ_0). Покажем, что $U_0 \not\in OS$. Пусть наоборот, $U_0 \subseteq OS(M)$ для некоторой машины M. Рассмотрим функцию φ, такую, что $\varphi(0) = 0$, и значения $\varphi(x)$ для $x > 0$ определяются согласно следующему алгоритму. Пусть n есть максимальное число, для которого значение $\varphi(n)$ уже определено и пусть σ есть последовательность $[(0, \widehat{\varphi}(0)), (1, \widehat{\varphi}(1)), (2, \widehat{\varphi}(2)), \ldots, (n, \widehat{\varphi}(n))]$, где $\widehat{\varphi}(i)$ есть знак $\#$, если значение $\varphi(i)$ еще не определено, либо же совпадает с $\varphi(i)$, если $\varphi(i)$ уже определено.

Рассмотрим две последовательности чисел:

(1) $a_i = M[\sigma \cdot ((n+1, 0), (n+2, 0), \ldots (n+i, 0))]$, $(i = 0, \infty)$

и

(2) $a_i^{\#} = M[\sigma \cdot ((n+1, \#), (n+2, 0), \ldots (n+i, 0))]$, $(i = 0, \infty)$.

Поскольку $U_0 \subseteq OS(M)$, то либо в первой, либо во второй последовательности найдется число, отличное от $M[\sigma]$. Если это число есть a_i, то есть находится в первой последовательности, то полагаем $\varphi(n+1) = \varphi(n+2) = \ldots = \varphi(n+i) = 0$. Если же это число есть $a_i^{\#}$, то полагаем $\varphi(n+2) = \varphi(n+3) = \ldots = \varphi(n+i) = 0$, оставляя значение $\varphi(n+1)$ неопределенным.

Ясно, что определенная таким образом функция φ частично-рекурсивна и $\varphi \subseteq \varphi_0$. С другой стороны, по построению φ имеем, что $M[\vec{O}^{\varphi}]\uparrow$, где $\vec{O}^{\varphi}$ — перечисление оракула O^{φ} в естественном порядке. Поэтому $\varphi \not\in Arg(M)$ и $\varphi \not\in OS(M)$, что и требовалось доказать.

Покажем теперь, что $OS \setminus W \neq \varnothing$. Рассмотрим множества

$$U_1 = \{\varphi/\varphi \text{ общерекурсивна и } \Phi_{\varphi(0)} = \varphi\},$$

$$U_2 = \{\varphi \mid \exists x (\varphi(x)\uparrow) \text{ и } \exists n \forall x_{>n} (\varphi(x) = 0)\}$$

и

$$U = U_1 \cup U_2.$$

(U_1 есть множество так называемых «самоописывающих» функций, а U_2 — почти всюду нулевых необщерекурсивных функций).

Покажем, что $U \in OS$. В самом деле, пусть M — индуктивная машина, определенная следующим образом. Если σ есть конечная последовательность $(\sigma(0), \ldots \sigma(n))$, не содержащая члена вида пары $(x; \#)$, то полагаем

$$M[\sigma] = \begin{cases} \varphi(0), & \text{если пара } (0; \varphi(0)) \text{ принадлежит } \sigma, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если же в σ входит пара вида $(x; \#)$, то пусть x_σ обозначает наименьшее число, такое, что в σ нет пары вида $(x; \#)$, для $x \geqslant x_\sigma$. Положим $M[\sigma]$ равным геделеву номеру функции

$$\varphi^\sigma(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \geqslant x_\sigma, \\ \varphi(x), & \text{если } x < x_\sigma \text{ и } (x, \varphi(x)) \in \sigma, \\ \uparrow & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ясно, что для любой общерекурсивной функции φ будет $M[\vec{O}^\varphi] = \varphi(0)$, поскольку перечисления O^φ не содержат пары вида $(x; \#)$. Поэтому $U_1 \subseteq OS(M)$. Если же $\varphi \in U_2$, то легко видеть, что для любого оракула $\vec{O}^\varphi$ найдется такой его начальный отрезок σ, что $\varphi^\sigma = \varphi^{\sigma'} = \varphi$ для любой последовательности σ', $\sigma \subset \sigma' \subset \vec{O}^\varphi$. Следовательно, $\Phi_{M[\vec{O}^\varphi]} = \varphi$ и $U_2 \subseteq OS(M)$.

Теперь покажем, что $U \notin W$. Предположим, что $U_2 \subseteq W(M)$ для некоторого M. Определим функцию $F(x, y)$ посредством следующего алгоритма.

Положим $F(0, y) := y$ для любого $y \in N$.

Пусть $x_0, \ldots x_n$ — все значения переменной x, в которых последовательно определялись значения функции $F(x, y)$ (в частности, всегда $x_0 = 0$. Как будет видно из дальнейшего, $x_0, x_1, \ldots x_n$ для каждого n будет перестановкой чисел $0, 1, \ldots, n$). Подадим на вход M последовательность

$$A(k) = [(x_0, F(x_0, y)), (x_1, F(x_1, y)), \ldots (x_n, F(x_n, y)), (n+2, 0), (n+3, 0), \ldots (n+k, 0)].$$

Пусть

$$m(k) = \min\{m_{<k} / M[A(m)] = M[A(k)]\}.$$

Для каждого $k = 2, 3, \ldots$ будем вычислять $M[A(k)]$ и параллельно в течение k шагов будем вычислять $\Phi_{M[A(k)]}(m(k)+1)$. Если для некоторого k $\Phi_{M[A(k)]}(m(k)+1)$ будет вычислено и окажется, что $\Phi_{M[A(k)]}(m(k)+1) = 0$, то полагаем

$$F(n+2,\ y) = 0,\ F(n+3,\ y) = 0, \ldots F(n+k,\ y) = 0,$$
$$F(n+k+1,\ y) = 1,\ F(n+1,\ y) = 0.$$

(Значения F считаются вычисленными именно в этом порядке, т. е. при вычислении следующих значений F следует полагать

$$x_{n+1} = n+2, \ldots x_{n+k-1} = n+k,\ x_{n+k} = n+k+1,\ x_{n+k+1} = n+1.$$

Таким образом, значения F оказываются вычисленными на всем отрезке $[0,\ n+k+1]$). Отметим, что существование такого числа k следует из того, что $A(k)$ при $k \to \infty$ есть перечисление некоторой функции из U_2 и $U_2 \subseteq W(M)$ по исходному предположению. Таким образом, функция $F(x,\ y)$ определена для всех $x,\ y \in N$. Из построения следует, что для любого $y_0 \in N$ машина M на некотором перечислении функции $F(x,\ y_0)$ будет бесконечное число раз изменять свою гипотезу о $F(x,\ y_0)$. Следовательно, $F(x,\ y_0) \overline{\in} W(M)$ для всех y_0. По теореме о рекурсии найдется число y^* такое, что $\Phi_{y^*} = F(x,\ y^*)$. Поскольку $\Phi_{y^*}(0) = F(0,\ y^*) = y^*$, то $\Phi_{y^*} \in U_1$ и, следовательно, U_1 не является подмножеством $W(M)$.

Сопоставляя полученные результаты с очевидными включениями $S \subseteq W \subseteq OW$ и $S \subseteq OS \subseteq OW$ получим, что теорема доказана.

Заметим, что по лемме о сходимости, результаты данного параграфа не зависят от конкретного выбора типов перечислений $\vec{N}(P)$ и $\vec{N}(O^P)$ — лишь бы была обеспечена их алгоритмическая замкнутость. Более того, поскольку по следствию 3 мы можем ограничиться независимыми от порядка машинами и поскольку в этом случае множество $Arg^{\vec{N}(A)}(M)$ не зависит от выбора $\vec{N}(A)$, то и множества W, S, OW и OS не зависят от этого выбора.

Итак, рассмотренные нами типы идентификации представляют собой сходные, но все же различные концепции идентифицируемости, причем их различия проявляются только при идентификации *собственно частичных* функций.

В следующем параграфе будут получены результаты, позволяющие говорить о сходстве этих концепций и в другом, более глубоком, смысле. Предварительно сделаем несколько замечаний, упрощающих дальнейшее изложение.

До сих пор мы рассматривали, фактически, два вида индуктивных машин: при $\mathrm{N} = N \times N$ и $\vec{\mathrm{N}}(P) = \{\vec{\varphi} / \varphi \in P\}$ это были машины, осуществляющие W- и S-идентификацию, а при $\mathrm{N} = N \times (N \cup \{\#\})$ и

$\vec{N}(O^P) = \{\vec{O}^\varphi/\varphi \in P\}$ — машины, осуществляющие OW- и OS-идентификацию. Но поскольку $N \times N \subset N \times (N \cup \{\#\})$, то машины второго вида являются также машинами первого вида. Таким образом, достаточно фиксировать $\mathrm{N} = N \times (N \cup \{\#\})$ и тогда получается, что все четыре множества, $W(M)$, $S(M)$, $OW(M)$ и $OS(M)$, определены одновременно для одной и той же машины M, причем эти обозначения осмыслены для каждой машины и представляют просто разные способы оценки ее „индуктивных способностей".

Некоторое неудобство, появляющееся при таком подходе, связано с тем, что при описании какой-либо индуктивной машины M мы должны определить ее значения на всем множестве $FIN = FIN(\mathrm{N}) = \{(\sigma(0), \ldots \sigma(n)) \mid \sigma(i)$ есть либо $*$, либо пара вида $(x; y)$ или $(x; \#)$, где $x, y \in N$ и $i \leqslant n\}$, даже если мы интересуемся, например, только W-идентификацией и значения M на последовательностях, содержащих пары вида $(x; \#)$ не играют при этом никакой роли. Однако это неудобство легко обойти. Последовательность $\sigma \in FIN$ называется совместной, если ни для одного $x \in N$ она не содержит одновременно пар $(x; y)$ и $(x; y')$ таких, что $y \neq y'$ $(y \in N \cup \{\#\})$. Рассмотрим множества

$$FIN' = \{\sigma/\sigma \text{ совместна и не содержит членов вида } (x; \#)\},$$

$$FIN'' = \{\sigma/\sigma \text{ совместна и не содержит членов вида } *\}.$$

Для любого $\sigma \in FIN'$ найдется функция $\varphi \in P$, такая, что $\{\sigma\} \subseteq \varphi$. Для $\sigma \in FIN''$ аналогично получаем $\{\sigma\} \subseteq O^\varphi$. Отсюда следует, что если нас интересует, скажем, только W- или S-идентификация, то мы можем определять значения $M[\sigma]$ только для $\sigma \in FIN'$ (или только $\sigma \in FIN''$ для OW- или OS-идентификации). (Если же нас интересуют разные варианты идентификации, то можно ограничиться множеством $FIN' \cup FIN''$). В любом случае для ненужных нам σ мы можем всегда полагать, например, $M[\sigma] = 0$ — такая возможность имеется, поскольку оба множества FIN' и FIN'' рекурсивны.

§ 3. НАДЕЖНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ

Недостатки любой модели индуктивного вывода, основанной на идее цикличности гипотетико-дедуктивного подхода, в том числе и рассмотренных выше четырех моделей, вытекают, в основном, из следующих двух неопределенностей. Во-первых, мы не можем априори знать, сойдется ли процесс вывода (индуктивная машина) даже на данном перечислении лингвистической информации (графика или оракула некоторой функции). Во-вторых, даже если этот процесс сходится, нельзя определить, приводит ли он к требуемому результату (идентифицируется ли функция в том или ином смысле?).

Первую неопределенность можно считать существующей «по определению» и неустранимой*). Л. Блюм и М. Блюм [5] предприняли исследование индуктивных машин, для которых вторая из этих неопределенностей просто не возникает.

Определение. Индуктивная машина M называется *W-надежной*, если для любой функции $\varphi \in P$ и любого ее перечисления $\vec{\varphi}$ либо $M[\vec{\varphi}]\uparrow$, либо $\Phi_{\underline{M[\vec{\varphi}]}} \supseteq \varphi$. Класс множеств $\{U \subseteq P / U \subseteq W(M)$ для некоторой W-надежной машины $M\}$ будем обозначать W_{REL}.

В [5] получена характеризация класса W_{REL}, показывающая, в частности, что очевидное включение $W_{REL} \subseteq W$ — строгое**). Это означает, что ограничившись надежными машинами, мы не устраняем вторую неопределенность (о чем говорит уже включение $W_{REL} \subseteq W$), а только придаем ей новую формулировку. Дело в том, что трудноосуществимо уже само наше стремление к ограничению, поскольку можно доказать, что класс надежных индуктивных машин не имеет эффективного пересчета. Тем не менее, надежные машины оказались очень интересным объектом исследования (см., например, [8]).

По аналогии с W-надежностью можно определить также S-, OW- и OS-надежные машины. Соответствующие классы множеств будем обозначать S_{REL}, OW_{REL} и OS_{REL}.

В качестве примера рассмотрим машину M_0 такую, что значение $M_0[\sigma]$ для всех $\sigma \in FIN' \cup FIN''$ определяется как некоторый стандартный геделев номер функции

$$\varphi_\sigma(x) = \begin{cases} y & \text{если пара } (x;\, y) \text{ содержится в } \sigma, \\ \uparrow & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть P_{FIN} — множество всех функций с конечной областью определенности. Если $\varphi \in P_{FIN}$, то ясно, что в любом перечислении графика или оракула функции φ можно выделить такой начальный отрезок σ, что $\varphi = \varphi_\sigma$, то есть $\Phi_{M[\sigma]} = \varphi$. По выбору σ и определению M_0, все дальнейшие гипотезы машины также будут равны $M_0[\sigma]$. Следовательно, $\varphi \in S(M_0)$ и $\varphi \in OS(M_0)$. Кроме того, M изменяет свою гипотезу каждый раз, как только на вход поступает пара $(x;\, y)$, не встречавшаяся ранее. Поэтому M_0 будет расходиться на любом перечислении (графика или оракула) какой-либо функции с бесконеч-

---

*) Вихаген [9] рассматривает среди прочих индуктивные выводы, для которых момент сходимости эффективно определим. «Индуктивные способности» таких выводов оказываются очень ограниченными. Кроме того, легко показать, что для таких выводов неустранимой оказывается теперь уже вторая неопределенность (см., например, [7]).

**) При определении надежности в [5] требуется дополнительно, чтобы индуктивная машина была независимой от порядка. Несущественность этого условия будет следовать из доказываемой в § 4 теоремы 4.

ной областью определенности. Таким образом, M_0 является как S- и W-надежной, так и OS- и OW-надежной, причем

$$S(M_0) = OS(M_0) = W(M_0) = OW(M_0) = P_{FIN}.$$

Определение. Индуктивную машину M назовем согласующей, если $\{\sigma\} \subseteq \Phi_{M[\sigma]}$ для всех $\sigma \in FIN'$ и $\{\sigma\} \subseteq O^{\Phi_{M[\sigma]}}$ для всех $\sigma \in FIN''$. Если $L(M)$ есть одно из множеств $W(M)$, $S(M)$, $OW(M)$ или $OS(M)$, то обозначение L_{CONS} будет использоваться для класса $\{U \subseteq P | U \subseteq L(M)$, где M — согласующая машина$\}$.

Примером согласующей машины является M_0. Ясно, что каждая согласующая машина надежна, то есть $L_{CONS} \subseteq L_{REL}$. В [5] показано даже, что для W_{CONS} это включение превращается в равенство. Мы докажем, что то же справедливо и в остальных случаях. В частности мы получим, что M_0 — самая „мощная" S- и OS-надежная машина.

Лемма 1. $U \in S_{REL} \Longleftrightarrow U \subseteq P_{FIN}$.

Доказательство. Достаточность очевидна, так как

$$P_{FIN} = S(M_0) \in S_{REL}.$$

Следовательно, нам осталось показать, что если U содержит хотя бы одну функцию φ_0 с бесконечной областью определенности, то $U \notin S_{REL}$. Пусть, наоборот, $U \subseteq S(M)$ для некоторой S-надежной машины M. Поскольку $\varphi_0 \in S(M)$, то по лемме о сходимости будет существовать такое $\sigma \in FIN'$, что $\{\sigma\} \subseteq \varphi_0$, $\Phi_{M[\sigma]} = \varphi_0$ и $M[\sigma] = M[\sigma \cdot \sigma']$ для всех $\sigma' \in FIN'$, $\{\sigma'\} \subseteq \varphi_0$. Поскольку последовательность σ конечна, то найдется такое число x_0, что $\varphi(x_0)\downarrow$, но пара $(x_0; \varphi(x_0))$ не содержится в σ. Удалим x_0 из области определенности φ_0 и полученную таким образом новую функцию обозначим φ_1. Поскольку $\varphi_1 \subset \varphi_0$, то по выбору σ имеем $M[\sigma] = M[\sigma \cdot \vec{\varphi}_1]$ для любого перечисления $\vec{\varphi}_1$ функции φ_1. Но $\Phi_{M[\sigma]} = \varphi_0$ и $\varphi_0 \neq \varphi_1$, откуда $\Phi_{M[\sigma \cdot \vec{\varphi}_1]} \neq \varphi_1$, что противоречит S-надежности M, поскольку $\sigma \cdot \vec{\varphi}_1$ есть перечисление φ_1.

Лемма 2 (Л. и М. Блюм [5], Миникоцци [8]). *Пусть L есть один из классов W, S, OW, OS. Тогда по произвольной L-надежной машине M можно построить L-надежную машину M_{FIN}, такую, что $L(M) \cup P_{FIN} \subseteq L(M_{FIN})$.*

Доказательство. Пусть f — общерекурсивная функция, такая, что $f(x, y) > x$ и $\Phi_{f(x, y)} = \Phi_y$ для всех $x, y \in N$. По данной машине M и функции f построим машину M^f, полагая для любого $\sigma \in FIN$, $\sigma = (\sigma(0), \dots, \sigma(n))$

$$M^f[\sigma] = \begin{cases} M[(\sigma(0), \dots \sigma(n))], & \text{если } M[(\sigma(0), \dots \sigma(n-1))] = M[\sigma], \\ f(M^f[\sigma(0), \dots \sigma(n-1)], M[\sigma]) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

(Для полной определенности при $n=0$ можно полагать $M^f[\sigma] = 0$).

Легко убедиться, что $L(M) \subseteq L(M^f)$ для любой машины M (если M надежна, то имеет место даже $L(M) = L(M^f)$). Отметим, что значения, выдаваемые машиной M^f при работе с каким-либо перечислением, образуют монотонно неубывающую последовательность. Машину M_{FIN} определим, полагая для любого $\sigma \in FIN$ $M_{FIN}[\sigma] = \min\{M^f[\sigma],\ M_0^f[\sigma]\}$, где M_0 — уже рассматривавшаяся ранее машина, идентифицирующая P_{FIN}. Из определения M^f и M_{FIN} нетрудно получить, что для любого перечисления $\vec{A}$ $M_{FIN}[\vec{A}]\downarrow$ тогда и только тогда, когда либо $M[\vec{A}]\downarrow$, либо $M_0[\vec{A}]\downarrow$. Отсюда следует, что если M_0 и M L-надежны, то M_{FIN} также L-надежна и $L(M) \cup \cup L(M_0) \subseteq L(M_{FIN})$. Учитывая, что M_0 L-надежна для любого $L \in \{W, S, OW, OS\}$ и $L(M_0) = P_{FIN}$, получим, что лемма доказана.

Теорема 2. $OS_{CONS} = OS_{REL} = S_{CONS} = S_{REL} \subset W_{CONS} = W_{REL} = OW_{CONS} = OW_{REL}$.

Доказательство. По лемме 2 будем без нарушения общности полагать, что $P_{FIN} \subseteq L(M)$ для любой L-надежной машины M ($L \in \{W, S, OW, OS\}$). Построим согласующую машину M_{CONS}, равномощную M.

Пусть $\sigma \in FIN' \cup FIN''$. Положим $M_{CONS}[\sigma] = M[\sigma']$, где σ' ($\sigma' \in FIN \cap FIN'$) определяется по следующим индуктивным правилам. Если σ пуста, то σ' также пуста. Если же σ имеет вид $\sigma = (\sigma(0), \dots \sigma(n)) = \sigma_1 \cdot \sigma(n)$, где $\sigma_1 = (\sigma(0), \dots \sigma(n-1))$, то рассмотрим числа $i_0 = M[\sigma_1']$, $i_1 = M[\sigma_1' \cdot \sigma(n)], \dots, i_m = M[\sigma_1'(\underbrace{\sigma(n), \dots \sigma(n)}_{m})]$. Поскольку $P_{FIN} \subseteq W(M)$, то найдется такое m, что для любой пары $(x;\ y) \in \sigma_1' \cdot (\sigma(n))$ значение функции Φ_{i_m} в точке x вычисляется за не более чем $m+n$ шагов, причем имеет место равенство $\Phi_{i_m}(x) = y$. Положим $\sigma' = \sigma_1' \cdot (\underbrace{\sigma(n), \dots \sigma(n)}_{m(\sigma)})$, где $m(\sigma)$ — минимальное из таких m. Легко убедиться при этом, что если $\sigma(n) = *$ или $\sigma(n) = (x;\ \sharp)$, то $m(\sigma) = 0$, то есть $\sigma' = \sigma_1'$.

Очевидно, что M_{CONS} — согласующая машина. Рассмотрим работу M_{CONS} на некотором заданном перечислении $\vec{\sigma} = (\sigma(0), \dots, \sigma(n), \dots)$ графика функции φ или ее оракула. Последовательность чисел, выдаваемых M_{CONS} будет подпоследовательностью чисел, выдаваемых машиной M на перечислении

$$\vec{\sigma}' = (\underbrace{\sigma'(0), \sigma'(0), \dots \sigma'(0)}_{m_0}, \underbrace{\sigma'(1), \sigma'(1), \dots \sigma'(1)}_{m_1}, \underbrace{\sigma'(2), \dots \sigma'(2)}_{m_2}, \dots),$$

где $(\sigma'(0), \sigma'(1), \sigma'(2), \ldots)$ получается из $\vec{\sigma}$ вычеркиванием членов вида $(x, \#)$ или $*$. По надежности M отсюда получаем, что $L(M) \subseteq L(M_{CONS})$. Таким образом, $L_{REL} \subseteq L_{CONS}$. Поскольку обратное включение очевидно, то $L_{REL} = L_{CONS}$.

Кроме того, поскольку по построению M_{CONS} значение $M_{CONS}[\vec{\sigma}]$ зависит только от элементов σ вида $(x; y)$ и не зависит от элементов $*$ или $(x, \#)$, то для любой функции φ и любого ее перечисления $\vec{\varphi}$ выполнено $M_{CONS}[\vec{\varphi}] = M_{CONS}[\vec{\varphi}^{\varphi}]$, где перечисление $\vec{O}^{\varphi}$ оракула функции φ получается из $\vec{\varphi}$ вычеркиванием всех элементов $*$ и введением в произвольные места элементов $(x; \#)$ для всех $x \overline{\in} \mathrm{dom}(\varphi)$. Таким образом, из $\varphi \in OW(M_{CONS})$ следует, что $OW(M_{CONS}) \subseteq \subseteq W(M_{CONS})$. Соответственно, из $\varphi \in OS(M_{CONS})$ следует $\varphi \in S(M_{CONS})$, так что $OW(M_{CONS}) \subseteq W(M_{CONS})$ и $OS(M_{CONS}) \subseteq S(M_{CONS})$. Обратно, для всякого перечисления $\vec{O}^{\varphi}$ оракула O^{φ} имеем $M_{CONS}[\vec{O}^{\varphi}] = M_{CONS}[\vec{\varphi}]$, где $\vec{\varphi}$ получается из $\vec{O}^{\varphi}$ заменой всех элементов $(x; \#)$ на $*$. Отсюда следует, что $W(M_{CONS}) \subseteq OW(M_{CONS})$ и $S(M_{CONS}) \subseteq \subseteq OS(M_{CONS})$. Таким образом, $W(M_{CONS}) = OW(M_{CONS})$ и $S(M_{CONS}) = OS(M_{CONS})$. Вспомнив, что преобразование $(M \to M_{CONS})$ применимо без нарушения общности к любой надежной (т. е. W-, S-, OW- или OS-надежной) машине M получаем, что $W_{REL} = OW_{REL}$ и $S_{REL} = OS_{REL}$.

Для доказательства теоремы нам осталось лишь показать, что $W_{REL} \supset S_{REL}$. Последнее следует из леммы 1 с учетом того очевидного факта, что всякое множество функций, состоящее из единственной общерекурсивной функции, идентифицируется некоторой W-надежной машиной. Теорема доказана.

Следствие. *По любой надежной машине M можно построить согласующую машину M_{CONS} такую, что $L(M) \subseteq L(M_{CONS})$, где $L \in \{W, OW, S, OS\}$.*

Таким образом, теорема 2 утверждает, что использование дополнительной информации о точках неопределенности подлежащей идентификации функции не увеличивает индуктивных способностей надежных машин. В то же время требование точной расшифровки функции (то есть S- и OS-идентификация) существенно сужает область применимости надежных индуктивных машин. Приведенную в лемме 1 характеризацию этой области можно считать вполне достаточной для того, чтобы к вопросу об S- и OS-надежности уже не возвращаться. Поэтому в дальнейшем наше обсуждение будет ограничено только W-надежной (или, что то же самое, OW-надежной) идентификацией.

Теорема 2 дает нам возможность при обсуждении надежности пользоваться только терминологией W-идентификации. Поэтому можно сократить громоздкие обозначения и писать, например, $Arg(M)$ вместо $Arg^{\overrightarrow{N(P)}}(M)$. Вместо W-идентификации и W-надежности можно говорить просто об идентификации и надежности.

Из определения надежности следует, что для всякой надежной машины M имеет место $W(M) = Arg(M)$. Машины, для которых выполнено это соотношение, назовем *α-надежными*. Исчерпывается ли класс α-надежных машин надежными? Другими словами, выполняется ли равенство $W_{REL} = W_{\alpha\text{-}REL}$? Отрицательный ответ на этот вопрос дает

Теорема 3. *По произвольной машине M можно построить α-надежную машину M' такую, что $W(M) \subseteq W(M')$.*

Доказательство. По следствию 3 и лемме о сходимости будем предполагать, что M независима от порядка.

Пусть $\vec{\varphi}$ — перечисление некоторой функции и $\vec{\varphi}(n)$ — начальный отрезок $\vec{\varphi}$ длины n. Работа M' на $\vec{\varphi}$ описывается следующим образом.

Обозначим через n наибольшее число, такое, что значение $M'[\vec{\varphi}(n)]$ уже вычислено (по определению полагаем $M'[\vec{\varphi}(0)] = 0$). Если $M[\vec{\varphi}(n) \neq M[\vec{\varphi}(n+1)]$, то положим $M'[\vec{\varphi}(n+1)] := M'[\vec{\varphi}(n)] + 1$. В противном случае пусть n_0 есть наименьшее число, такое, что $n_0 \leqslant n+1$ и $M[\vec{\varphi}(n_0)] = M[\vec{\varphi}(n_0+1)] = \ldots = M'[\vec{\varphi}(n+1)]$. Если для всех пар $(x; y) \in \{\vec{\varphi}(n_0)\}$ вычисление значения функции $\Phi_{M[\vec{\varphi}(n_0)]}$ в точке x производится за не более чем $n+1$ шагов и если при этом $\Phi_{M[\vec{\varphi}(n_0)]}(x) = y$, то полагаем $M'[\vec{\varphi}(n+1)] = M[\vec{\varphi}(n_0)] = M[\vec{\varphi}(n+1)]$. В противном случае $M'[\vec{\varphi}(n+1)] = n+1$.

Из построения видно, что если M на каком-либо перечислении $\vec{\varphi}$ расходится, то и M' расходится на $\vec{\varphi}$. Отсюда следует, что если $\varphi \overline{\in} Arg(M)$, то $\varphi \overline{\in} Arg(M')$, то есть $Arg(M') \subseteq Arg(M)$.

Если же $\varphi \in Arg(M)$, то либо $\varphi \in W(M)$, либо $\varphi \overline{\in} W(M)$. Докажем, что в первом случае будет $\varphi \in W(M')$, а во втором — $\varphi \overline{\in} Arg(M')$. В самом деле, при $\varphi \in W(M)$ по независимости от порядка M найдется число a такое, что $M[\vec{\varphi}] = a$ и $\Phi_a \supseteq \varphi$ для любого перечисления $\vec{\varphi}$ функции φ. Пусть $\vec{\varphi}$ — одно из этих перечислений и пусть n_0 таково, что $M[\vec{\varphi}(n)] = a$ для всех $n \geqslant n_0$. Поскольку $\Phi_a \supseteq \varphi$, то найдется такое число m_0, что для всех пар $(x; y) \in [\vec{\varphi}(n_0)]$ значение $\Phi_a(x)$ вычисляется менее чем за m_0 шагов и $\Phi_a(x) = y$. Отсюда следует, что для всех $n \geqslant \max\{n_0, m_0\}$ будет $M'[\vec{\varphi}(n)] = M[\vec{\varphi}(n)] = a$. Таким образом, $\varphi \in W(M')$.

Если же $\varphi \in \mathrm{Arg}(M) \setminus W(M)$, то опять для некоторого a и любого $\vec{\varphi}$ будет $M[\vec{\varphi}] = a$, но найдется такое число x_0, что $\varphi(x_0)\downarrow$, но $\Phi_a(x_0) \neq \varphi(x_0)$. Пусть теперь $\vec{\varphi}$ — произвольное перечисление φ, первым элементом которого является пара $(x_0; \varphi(x_0))$. Тогда начиная с некоторого n по независимости от порядка M будет $M[\vec{\varphi}(n)] = a$. Но по выбору числа x_0 либо $\Phi_a(x_0)\uparrow$, либо $\Phi_a(x_0)\downarrow$, но $\Phi_a(x_0) \neq \varphi(x_0)$. Поэтому для любого n либо вычисление $\Phi_a(x_0)$ не заканчивается за n шагов, либо заканчивается, но $\Phi_a(x_0) \neq \varphi(x_0)$. В любом случае по определению M' имеем $M'[\vec{\varphi}(n)] = n$, откуда $M'[\vec{\varphi}]\uparrow$ и $\varphi \bar{\in} \mathrm{Arg}(M')$. Таким образом, $\mathrm{Arg}(M') = W(M') = W(M)$. (Отметим, что на самом деле вместо равенства $W(M') = W(M)$ должно быть включение $W(M') \supseteq W(M)$, поскольку предположение о независимости от порядка M справедливо только с точностью до $\supseteq$). Теорема доказана.

Замечание. Определение α-надежности можно рассматривать как еще одну попытку экспликации интуитивного представления о надежности индуктивного вывода, сводящее это представление к проблеме сходимости ($\varphi \in W(M) \Longleftrightarrow \varphi \in \mathrm{Arg}(M)$ для α-надежных машин). В этом плане теорема 3 дает, казалось бы, позитивную оценку такому подходу. Но воспользоваться понятием α-надежности практически нельзя: для того чтобы проверить, к правильному ли результату сошлась машина на данном перечислении, следует убедиться, что она сходится и на всех остальных перечислениях! Другими словами, проблема сходимости более сложна, чем сводимая к ней проблема надежности (о чем говорит уже сама возможность такого сведения). Кроме того, из той же теоремы 3 следует, что многие естественные для надежного вывода свойства (см., например, теорему аддитивности и теорему о вариантах [8]) при α-надежности не сохраняются.

Перейдем теперь к рассмотрению свойств, наличие которых было бы желательным для надежных индуктивных машин.

Определение. Индуктивная машина M называется упорной, если для любой последовательности $\sigma \in FIN'$ и любой пары чисел $(x; y)$ такой, что $(\sigma \cdot (x; y))$ совместна, из $M[\sigma \cdot (x; y)] \neq M[\sigma]$ следует $(x; y) \bar{\in} \Phi_{M[\sigma]}$ (то есть либо $\Phi_{M[\sigma]}(x)\uparrow$, либо $\Phi_{M[\sigma]}(x)\downarrow$ и $\Phi_{M[\sigma]}(x) \neq y$).

Другими словами, упорные машины характеризуются тем, что отказываются от принятой гипотезы лишь в том случае, когда точно известно, что она противоречит полученным данным [7]. Класс $\{U \subseteq P / U \subseteq W(M)$, где M — упорная индуктивная машина$\}$ будем обозначать W_{TEN}.

Надежные машины не обязательно упорны и наоборот. Примером множества из $W_{TEN} \setminus W_{REL}$ может служить множество самоописывающих функций $\{\varphi \in P / \Phi_{\varphi(0)} = \varphi\}$. Класс множеств, идентифицируемых машинами, которые являются одновременно надежными и упорными, будем обозначать $W_{REL/TEN}$ (например, машина M_0 из § 3 надежна и упорна одновременно). Заметим, что априори неизвестно, будет ли $W_{REL/TEN} = W_{REL} \cap W_{TEN}$. Далее, в теореме 2 мы показали, что без нарушения общности вместо надежных машин можно рассматривать согласующие и применили для этого преобразование, ставящее в соответствие произвольной надежной машине некоторую согласующую машину (см. следствие к теореме 2). Будет ли это преобразование сохранять свойство упорности? Другими словами, имеет ли место $W_{REL/TEN} = W_{CONS/TEN}$?

Лемма 1. *Преобразования* $(M \to M^f)$, $(M \to M_{FIN})$ и $(M \to M_{CONS})$ *сохраняют свойство упорности.*

Доказательство. Пусть M упорна. По определению M^f имеем, что $M^f[\sigma] \neq M^f[\sigma \cdot (x;\ y)] \Longleftrightarrow M[\sigma] \neq M[\sigma \cdot (x;\ y)]$. Следовательно, M^f также упорна. Рассмотрим теперь машину M_{FIN}. Пусть для некоторого $\sigma \in FIN'$ $M_{FIN}[\sigma] = \min\{M^f[\sigma], M_0^f[\sigma]\} = M^f[\sigma]$ (случай $M_{FIN}[\sigma] = M_0^f[\sigma]$ аналогичен, поскольку M_0 также упорна). Тогда по монотонности M_0^f получим, что $M^f[\sigma] \leqslant M_0^f[\sigma] \leqslant M_0^f[\sigma \cdot (x;\ y)]$ для любых $x, y \in N$. Отсюда по определению M_{FIN} следует, что если $M_{FIN}[\sigma] \neq M_{FIN}[\sigma\,(x;\ y)]$, то и $M^f[\sigma] \neq M^f[\sigma \cdot (x;\ y)]$. А так как M^f сохраняет упорность, то $(x;\ y) \overline{\in} \Phi_{M^f[\sigma]} = \Phi_{M_{FIN}[\sigma]}$ и, таким образом, M_{FIN} также упорна. Далее, по определению M_{CONS} для любого $\sigma \in FIN'$ существует такое σ', что $M_{CONS}[\sigma] = M[\sigma']$ и $M_{CONS}[\sigma \cdot (x;\ y)] = M[\sigma' \cdot (\underbrace{(x;\ y), (x;\ y), \ldots, (x;\ y)}_{m})]$ для некоторого m. Но по упорности M имеем $M(\sigma' \cdot ((x; y), (x; y), \ldots, (x; y))] = M[\sigma' \cdot (x; y)]$, следовательно, $M_{CONS}[\sigma] = M_{CONS}[\sigma \cdot (x;\ y)] \Longleftrightarrow M[\sigma'] = M[\sigma' \cdot (x;\ y)]$ и M_{CONS} упорна. Лемма доказана.

Из леммы непосредственно следует, что $W_{REL/TEN} = W_{CONS/TEN}$.

Рассмотрим еще одно преобразование, применимое к произвольной согласующей машине M, такой что $P_{FIN} \subseteq W(M)$ (в частности, такова, без нарушения общности, любая надежная машина).

Пусть $\sigma \in FIN'$ и пусть $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$ — некоторый фиксированный пересчет FIN'. Обозначим σ^* первую же в пересчете FIN' последовательность, удовлетворяющую условиям:

а) последовательность $\sigma^* \cdot \sigma$ совместна,

б) $M[\sigma'] = M[\sigma^*]$ для любого $\sigma' \in FIN'$, такого, что $\{\sigma'\} \subseteq \{\sigma\}$ и число членов σ' не больше числа членов σ.

(Существование σ^* следует из $P_{FIN} \subseteq W(M)$ по лемме о сходимости).

Легко убедиться, что можно построить такую взаимооднозначную общерекурсивную функцию g, что $\Phi_{g(M[\sigma])} = \Phi_{M[\sigma]}$ для всех $\sigma \in FIN$ и, кроме того, $g(M[\sigma_k]) > g(M[\sigma_i])$ для всех $i < k$ (построение g можно осуществить, например, с помощью функций f из § 3).

Определим машину M^*, полагая $M^*[\sigma] = g(M[\sigma^*])$ для всех $\sigma \in FIN$. Поскольку M — согласующая, то ясно, что машина M^* также согласующая, так как $\{\sigma\} \subseteq \{\sigma^* \cdot \sigma\} \subseteq \Phi_{M[\sigma^* \cdot \sigma]} = \Phi_{M[\sigma^*]} = \Phi_{g(M[\sigma^*])} = \Phi_{M^*[\sigma]}$ для всех $\sigma \in FIN'$.

Лемма 2. *Если $\vec{\varphi}$ — произвольное перечисление функции $\varphi \in P$, то $M^*[\vec{\varphi}]\downarrow$ тогда и только тогда, когда существует последовательность σ такая, что для всех $\sigma' \in FIN$, $\{\sigma'\} \subseteq \varphi$ имеет место $M[\sigma] = M[\sigma \cdot \sigma']$.*

Доказательство. Пусть последовательность σ существует и пусть $(\varphi)^*$ есть первая в перечете FIN' такая последовательность. Если $\vec{\varphi}$ — произвольное перечисление и $\vec{\varphi}(n)$ — начальный отрезок $\vec{\varphi}$ длины n, то по построению M^* и выбору $(\varphi)^*$ найдется такое n_0, что $(\vec{\varphi}(n_0))^* = (\varphi)^*$ и, кроме того, $(\vec{\varphi}(n))^* = (\vec{\varphi}(n_0))^*$ для всех $n \geqslant n_0$. Отсюда $M^*[\vec{\varphi}(n)] = M^*[\vec{\varphi}(n_0)]$, то есть $M^*[\vec{\varphi}]\downarrow$, причем

$$M^*[\vec{\varphi}] = M^*[\vec{\varphi}(n_0)] = M[(\varphi)^*].$$

Обратно, легко убедиться, что если $M[\vec{\varphi}]\downarrow$ для некоторого $\vec{\varphi}$, то найдется n_0 такое, что $(\vec{\varphi}(n))^* = (\varphi(n_0))^*$ для всех $n \geqslant n_0$. Отсюда по построению M^* получаем, что $M[(\vec{\varphi}(n_0))^*] = M[(\vec{\varphi}(n_0))^* \cdot \sigma']$ для всех $\sigma' \in FIN'$, $\{\sigma'\} \subseteq \varphi$. Таким образом, лемма доказана.

Отметим, что поскольку определение последовательности $(\varphi)^*$ и, следовательно, значение $M[(\varphi)^*]$ не зависит от перечисления $\vec{\varphi}$, то мы получаем также, что

(1) M^* независима от порядка.

Кроме того, по согласованности M^* и по лемме 2 имеем $W(M^*) = \mathrm{Arg}(M^*) = \{\varphi \in P / \text{последовательность } (\varphi)^* \text{ существует}\}$. По лемме о сходимости имеет место также $W(M) \subseteq \{\varphi \in P / (\varphi)^* \text{ существует}\}$. Отсюда

(2) $W(M) \subseteq W(M^*)$.

Докажем, что

(3) Если M упорна, то и M^* упорна.

Действительно, если $M^*[\sigma \cdot (x; y)] \neq M^*[\sigma]$, то $g(M[(\sigma \cdot (x; y))^*] \neq g(M[\sigma^*])$ и, значит, $M[\sigma^*] \neq M[(\sigma \cdot (x; y))^*]$ и $\sigma^* \neq (\sigma \cdot (x; y))^*$. По б) отсюда следует, что существует такое $\sigma' = (\sigma'(0), \ldots, \sigma'(k))$, $\{\sigma'\} \subseteq \{\sigma \cdot (x; y)\}$, что

$$M[\sigma^*] = M[\sigma^* \cdot (\sigma'(0), \ldots, \sigma'(k-1))] \neq M[\sigma^* \cdot (\sigma'(0), \ldots, \sigma'(k-1))].$$

По упорности M $\sigma'(k) \overline{\in} \Phi_{M[\sigma^*]}$. Но так как M--согласующая и $M[\sigma^*] = M[\sigma^* \cdot \sigma]$, то $\{\sigma\} \subseteq \Phi_{M[\sigma^*]}$. Поэтому $\sigma'(k)$ может быть только парой $(x;\ y)$. Следовательно, $(x;\ y) \overline{\in} \Phi_{M[\sigma^*]} = \Phi_{g(M\ \sigma^*])} = \Phi_{M^*[\sigma]}$, что и требовалось доказать.

Машина M^* обладает еще одним примечательным свойством, которое мы, вслед за Р. В. Фрейвалдом [4], назовем равномерностью.

Определение. Индуктивная машина M называется *равномерной*, если для любых функций $\varphi \in W(M)$ и $\varphi' \in P$, $\varphi' \subseteq \varphi$ выполнено $\varphi' \in W(M)$.

Если для любого $U \subseteq P$ определить замыкание $[U]$ множества U, полагая $[U] = \{\varphi' \in P / \varphi' \subseteq \varphi$ для некоторого $\varphi \in U\}$, то ясно, что равномерность M будет эквивалентна требованию замкнутости $W(M)$ по [ ]. Класс множеств $\{U / U \subseteq W(M) = [W(M)]$ для некоторой машины $M\}$ обозначим W_{UN}.

Докажем, что

(4) M^* равномерна.

Пусть $\varphi \in W(M^*)$ и $\varphi' \subseteq \varphi$. По лемме 2 существует последовательность σ такая, что для всех σ', $\{\sigma'\} \subseteq \varphi$, выполнено $M[\sigma] = M[\sigma \cdot \sigma']$. Поскольку $\varphi' \subseteq \varphi$, то это равенство выполнено, в частности для всех σ', $\{\sigma'\} \subseteq \varphi'$. Применяя опять лемму 2 получим $M^*[\vec{\varphi'}]\downarrow$. По независимости от порядка и согласованности M^* $\varphi' \in W(M^*)$. (Отметим, что в этом доказательстве мы не использовали того, что φ' частично-рекурсивна. К этому обстоятельству мы вернемся в следующем параграфе).

Сформулируем основное утверждение этого параграфа.

Теорема 4. *По любой надежной машине M можно построить согласующую, равномерную и независимую от порядка машину M^*, такую, что $W(M) \subseteq W(M^*)$. Кроме того, если M упорна, то и M^* упорна.*

Доказательство непосредственно следует из (1)—(4) и леммы 1 после применения преобразования $M \to ((M_{FIN})_{CONS})^*$.

Следствие. $W_{REL/UN/TEN} = W_{CONS/UN/TEN} = W_{CONS/TEN} \subset$
$\subset W_{CONS/UN} = W_{CONS} = W_{REL} = W_{REL/UN} \subset W_{UN}$.

(*Обозначения типа $W_{REL/UN/TEN}$ понимаются аналогично $W_{REL/TEN}$*).

Единственным недоказанным утверждением следствия является строгость включения $W_{REL} \subset W_{UN}$. Пусть $c: N \times N \to N$ — какое-либо взаимооднозначное кодирование пар натуральных чисел, а c_1 и c_2 — координатные функции: $c_1(c(x,\ y)) = x$ и $c_2(c(x,\ y) = y$. Пусть также i есть индекс некоторой надежной машины M_i. Тогда можно конструктивно построить общерекурсивную функцию f_i такую, что

$c_1(f_i(x)) = i$ для всех $x \in N$ и $f_i \in W(M_i)$*). Отсюда следует, что множество $U = \{f_i / M_i$ надежна$\}$ не является надежно идентифицируемым. Легко видеть, однако, что $U \in W_{UN}$.

§ 5. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ $W_{REL \cap TEN}$

Для получения характеризации $W_{REL \cap TEN}$ мы можем по теореме 4 ограничиться рассмотрением индуктивных машин, являющихся результатом применения преобразования $M \to ((M_{FIN})_{CONS})^*$ к надежным упорным машинам M (в дальнейшем обозначение M^* будет использоваться только для обозначения машин, построенных по таким M). Рассмотрим некоторые дополнительные свойства машин M^*.

Обозначим через $P(M)$ множество $\{\Phi_{M[\sigma]} / \sigma \in FIN'\}$. Докажем, что

(1) $W(M^*) = [P(M^*)]$ (Определение замыкания [ ] см. в предыдущем параграфе).

В самом деле, $W(M^*) \subseteq [P(M^*)]$ по определению $W(M)$. Поскольку M^* — согласующая и упорная, то $\sigma \subseteq \Phi_{M^*[\sigma]}$ и $M^*[\sigma] = M^*[\sigma \cdot \vec{\Phi}_{M^*[\sigma]}]$ для любого перечисления $\vec{\Phi}_{M^*[\sigma]}$ функции $\Phi_{M^*[\sigma]}$. По независимости от порядка и упорности M^* имеем $M^*[\vec{\Phi}_{M^*[\sigma]}] = M^*[\sigma \cdot \vec{\Phi}_{M^*[\sigma]}] = M^*[\sigma]$ для любого перечисления $\vec{\Phi}_{M^*[\sigma]}$. Следовательно, $\Phi_{M^*[\sigma]} \in W(M^*)$ и потому $P(M^*) \subseteq W(M^*)$. А так как M^* равномерна, то $[P(M^*)] \subseteq [W(M^*)] = W(M^*)$.

Следуя [9] введем понятие вычислимой нумерации, понимая под ней произвольную двуместную частично-рекурсивную функцию. Если ψ — вычислимая нумерация, то через P_ψ будем обозначать множество $P_\psi = \{\psi_i / \psi_i(x) = \lambda x \psi(i, x)\}$. Скажем, что множество $U \subseteq P$ имеет вычислимую нумерацию, если $U = P_\psi$ для некоторой $\psi \in P^2$. Легко видеть, что

(2) если U имеет вычислимую нумерацию, то и $[U]$ имеет ее.

Действительно, пусть ψ есть нумерация U и пусть χ_i есть полухарактеристическая функция i-го рекурсивно-перечислимого множества W_i (то есть $\chi_i(x) = 1$, если $x \in W_i$, и $\chi_i(x)\uparrow$ в противном случае). Если c есть некоторое эффективное кодирование пар натуральных чисел, то легко построить функцию $\psi' \in P^2$ такую, что $\psi'(c(i, j), x) = \psi_i(\chi_j(x))$. Поскольку ясно, что $[U] = \{\psi_i \cdot \chi_j / i, j \in N\}$, то ψ' и будет искомой нумерацией.

---

*) В качестве f_i можно брать, например,

$$f_i(x) = \begin{cases} c(i, 0), \text{ если } x = 0 \\ c(i, \mu_y(M_i[\sigma_x] \neq M_i[\sigma_x \cdot (x; c(i, y))])) \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

где σ_x есть последовательность $((0; f; (0)), (1; f_i(1)), \ldots, (x-1; f_i(x-1)))$.

Нумерацию $\psi \in P^2$ назовем характеристической, если функция

$$\chi_\psi(i, x, y) = \begin{cases} 1, \text{ если } \psi(i, x) = y, \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$$

рекурсивна.

Таким образом, нумерация ψ — характеристическая, если график каждой функции $\psi_i = \lambda x \psi(i, x)$ рекурсивен и его характеристическая функция определяется эффективно по ψ и i.

Очевидно, что

(3) Если U_1 и U_2 имеют характеристические нумерации, то $U_1 \cup U_2$ также имеет ее.

Приведем пример характеристической нумерации.

(4) $R(M^*)$ имеет характеристическую нумерацию.

Действительно, если $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n, \ldots$ — некоторый пересчет множества FIN', то ясно, что функция $\psi(i, x) = \Phi_{M^*[\sigma_i]}(x)$ будет нумерацией $R(M)$. Поскольку M^* — согласующая и упорная, то

$$\chi_\psi(i, x, y) = 1 \Longleftrightarrow \psi(i, x) = y \Longleftrightarrow \Phi_{M^*[\sigma_i]}(x) = y \Longleftrightarrow M^*[\sigma_i] = \\ = M^*[\sigma_i \cdot (x; y)]$$

и

$$\chi_\psi(i, x, y) = 0 \Longleftrightarrow \psi(i, x) \neq y \Longleftrightarrow M^*[\sigma_i] \neq M^*[\sigma_i \cdot (x; y)].$$

Следовательно, нумерация ψ — характеристическая.

Комбинируя (1), (2) и (4) получаем, что

(5) $W(M^*)$ имеет вычислимую нумерацию.

Теперь мы можем доказать, что справедливая следующая

Теорема 5. *Пусть U есть некоторое множество функций и M — надежная и упорная машина. Тогда $U = W(M^*)$ в том и только в том случае, когда $P_{FIN} \subseteq U$ и $U = [P_\psi]$ для некоторой характеристической нумерации ψ.*

Доказательство. Необходимость. Включение $P_{FIN} \subseteq W(M)$ выполнено для всякой согласующей и упорной машины M и, в частности, для M^*. По (1) и (4) в качестве P_ψ можно брать $P(M^*)$.

Достаточность. По нумерации ψ и числу $i \in N$ определим функцию $i: FIN' \to N$, полагая $i(\sigma) = \mu_i[\sigma \subseteq \psi_i]$. Ясно, функция i общерекурсивна, поскольку общерекурсивна χ_ψ. Пусть $n(k)$ обозначает какой-либо геделев номер функции ψ_k (то есть $\Phi_{n(k)} = \psi_k = \lambda x \psi(k, x)$). Определим машину M, полагая $M[\sigma] = n(i(\sigma))$ для всех $\sigma \in FIN'$. Очевидно, что M — согласующая и, следовательно, надежная машина. Если i_0 есть $i(\sigma)$ для некоторого $\sigma \in FIN'$, то ясно, что для всех $(x; y) \in \psi_{i_0}$ будет $i(\sigma \cdot (x; y)) = i_0$. Таким образом, если $(x; y) \in \Phi_{M[\sigma]}$ то $M[\sigma \cdot (x; y)] = n(i(\sigma \cdot (x; y))) = M[\sigma]$. Следовательно, M упорна.

Покажем теперь, что для любой функции $\varphi \in [P_\psi]$ и любого ее перечисления $\vec{\varphi}$ выполнено $M[\vec{\varphi}] = n(i(\varphi))$, где $i(\varphi)$ есть минимальное i такое, что $\varphi \subseteq \psi_i$. Действительно, поскольку $i(\varphi)$ минимально, то для каждого $i < i(\varphi)$ найдется такая пара чисел $(x_i;\ y_i) \in \varphi$, что $(x_i;\ y_i) \overline{\in} \psi_i$. Следовательно, как только начальный отрезок $\vec{\varphi}(n)$ перечисления $\vec{\varphi}$ будет содержать все пары $(x_i;\ y_i)$ для $i < i(\varphi)$, значение $M[\vec{\varphi}(n)]$ будет отлично от всех $n(i)$, $i < i(\varphi)$, то есть $M[\vec{\varphi}(n)] \geqslant i(\varphi)$. Но по определению функции i имеем $i(\vec{\varphi}(n)) \leqslant i(\varphi)$, откуда $M[\vec{\varphi}(n)] = n(i(\varphi))$. По упорности M отсюда следует, что $M[\vec{\varphi}] = M[\vec{\varphi}(n)] = n(i(\varphi))$. Заметим, что попутно мы доказали и независимость от порядка M, так что по согласованности M получаем дополнительно, что $\varphi \in W(M)$.

Таким образом $[P_\psi] \subseteq W(M) \subseteq W(M^*)$, где M^* есть $((M_{FIN})_{CONS})^*$. А так как очевидно, что $P(M^*) \subseteq P(M) \subseteq P_\psi$, то и $[P(M^*)] \subseteq \subseteq [P(M)] \subseteq [P_\psi]$. По (1) отсюда имеем $W(M^*) = [P(M^*)] = [P_\psi]$. Теорема доказана.

Следствие 1. *$U \in W_{REL/TEN}$ тогда и только тогда, когда $U \subseteq [P_\psi]$, где ψ — некоторая характеристическая нумерация.*

Доказательство необходимости очевидно по теореме 5. Доказательство достаточности можно также свести к теореме, показав, что по ψ можно построить такую характеристическую нумерацию ψ', что $P_\psi \subseteq P_{\psi'}$ и $P_{FIN} \subseteq [P_{\psi'}]$ — тогда из $U \subseteq [P_\psi]$ будет следовать $U \in W_{REL/TEN}$, поскольку $U \subseteq [P_\psi] \subseteq [P_{\psi'}]$ и $[P_{\psi'}] \in W_{REL/TEN}$ по теореме 5. Существование ψ' в свою очередь сводится к тому очевидному факту, что P_{FIN} имеет характеристическую нумерацию (и потому по (3) характеристическую нумерацию будет иметь и множество $P_{FIN} \cup P_\psi$). Следствие доказано.

Следствие 1 допускает перефразировку в терминах характеристических функций.

Следствие 2. *$U \in W_{REL/TEN}$ тогда и только тогда, когда существует общерекурсивная $\{0, 1\}$-значная функция $\chi : N^3 \to N$, такая, что*

а) $\chi(i, x, y) = \chi(i, x, y') = 1$ *влечет* $y = y'$ *для всех* $i, x, y, y' \in N$

и

б) *для любой функции* $\varphi \in U$ *существует число* i *такое, что*

$$\varphi(x) \neq y \Longleftrightarrow \chi(i,\ x,\ y) = 0 \text{ для всех } x,\ y \in N.$$

Доказательство можно свести к следствию 2, полагая $\psi(i, x) = \mu_y[\chi(i,\ x,\ y) = 1]$, поскольку тогда $\chi_\psi = \chi$ и условие б) становится эквивалентным $U \subseteq [P_\varphi]$.

Обратившись к идентификации общерекурсивных функций можно получить следующее теоретико-нумеративное

Следствие 3. *Множество общерекурсивных функций U имеет вычислимую нумерацию тогда и только тогда, когда $U = R(M^*)$ для некоторой согласующей и упорной машины M.*

Доказательство получается из теоремы 5 с учетом того, что любая нумерация множества общерекурсивных функций — характеристическая.

Отметим, что следствие 3 коррелирует с одним из результатов Р. В. Фрейвалда [4].

Следуя сложившейся традиции [5, 9], приведем также и теоретико-сложностную характеризацию класса $W_{REL/TEN}$.

Напомним, что система функций $\{\Psi_i\}^{i=0,\infty}$ называется мерой сложности [2] частично-рекурсивных функций при геделевой нумерации $\{\Phi_i\}^{i=0,\infty}$, если $\mathrm{dom}(\Psi_i) = \mathrm{dom}(\Phi_i)$ для любого $i \in N$ и предикат $P(i, x, y) := „\Psi_i(x) \leqslant y“$ разрешим.

Поскольку из этого определения следует, что предикат $\chi(i, x, y) = „\Psi_i(x) = y“$ также разрешим, то

(6) любая мера сложности $\{\Psi_i\}^{i=0,\infty}$ обладает характеристической нумерацией: $\psi(i, x) = \lambda i, x\Phi_i(x)$.

Докажем, что в некотором смысле имеет место и обратное утверждение:

(7) Если ψ — характеристическая нумерация, то можно построить меру сложности $\{\Psi_i\}$ такую, что $P_\psi \subseteq \{\Psi_i|^{i=0,\infty}\}$. Действительно, легко видеть, что по ψ можно построить такую общерекурсивную функцию m, что $\psi_i = \Phi_{m(i)}$ и множество индексов $I = \{m(i)/i = 0, \infty\}$ рекурсивно. Тогда, если $\{\Psi'_i\}^{i=0,\infty}$ — произвольная мера сложности, то искомой мерой $\{\Psi_k\}^{k=0,\infty}$ будет

$$\Psi_k(x) := \begin{cases} \psi_i(x), \text{ если } k = m(i) \text{ для некоторого } i \in N, \\ \Psi'_k(x) \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Требование $\mathrm{dom}(\Psi_k) = \mathrm{dom}(\Phi_k)$ для случая $\Psi_k = \psi_i$ следует из того, что $\psi_i = \Phi_{m(i)} = \Phi_k$, то есть ψ_i является мерой сложности для самой себя. Требование разрешимости предиката P следует из разрешимости соответствующих предикатов для ψ и $\{\Psi'_i\}$ и из рекурсивности I.

Комбинируя (6) и (7) со следствием 1, получаем:

Теорема 6. *$U \in W_{REL/TEN}$ тогда и только тогда, когда $U \subseteq [\{\Psi_i/i = 0, \infty\}]$ для некоторой меры сложности $\{\Psi_i\}$.*

В заключение сделаем одно замечание. Пусть M — произвольная индуктивная машина. Хотя множество $W(M)$ состоит, по определению, только из частично-рекурсивных функций, но имеет смысл говорить и об идентификации частичных функций вообще, поскольку условие $\varphi \subseteq \Phi_{M[\varphi]}$ может выполняться и для $\varphi \overline{\in} P$. Например, при доказательстве равномерности машины M^* в § 4 мы получили, что если $\varphi \in W(M^*)$, то $M^*[\vec{\varphi}']\downarrow$ для всякой функции $\varphi' \subseteq \varphi$. По надежности M^* отсюда получаем, что $\varphi' \subseteq \Phi_{M^*[\vec{\varphi}']}$. Таким образом, если расширить определение $W(M)$, включив в него все идентифицируемые частичные функции, и если переопределить замыкание [ ], полагая $[U] = \{\varphi' / \varphi'$ — частичная функция и $\varphi' \subseteq \varphi \in U\}$, то условие равномерности машины M будет по прежнему формулироваться как $W(M) = [W(M)]$ и машина M^* опять будет этому условию удовлетворять. Отсюда легко следует, что теорема 5 со следствиями и теорема 6 останутся справедливыми и при новом определении класса $W_{RELITEN}$ и замыкания [ ].

Ա. Հ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

ԻՆԴՈՒԿՏԻՎ ԱՐՏԱԾՄԱՆ ՀՈՒՍԱԼԻ ԱԼԳՈՐԻԹՄՆԵՐԻ ՈՐՈՇ ԴԱՍԵՐ

Ինդուկտիվ արտածման մաթեմատիկական տեսության շրջանակներում դիտարկվում են մասնակի ռեկուրսիվ ֆունկցիաների սահմանային ճանաչման խնդրի չորս տարբերակ: Ապացուցվում է, որ արտածման արդյունքի տեսակետից բավական է սահմանափակվել դրանցից միայն մեկով: Ստացված է հուսալի արտածման մի քանի ընդհանուր հատկություն: Բերվում է հուսալի արտածման ալգորիթմների մի դասի կիրառելիության տիրույթի երկու համարժեք բնութագրում՝ համարակալումների տեսության և բարդությունների տեսության տերմիններում:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Барздинь Я. М.* Две теоремы о предельном синтезе.— Сб. «Теория алгоритмов и программ, 1», Уч. зап. Латв. ГУ, т. 210, 1974, с. 82—88.
2. *Блюм М.* Машинно-независимая теория сложности рекурсивных функций.— Сб. «Проблемы математической логики», М., 1970, с. 401—422.
3. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, М., 1972.
4. *Фрейвалд Р. В.* Равномерная и неравномерная прогнозируемость.— Сб. «Теория алгоритмов и программ, 1». Уч. зап. Латв. ГУ, т. 210, 1974, с. 89—100.
5. *Blum L., Blum M.* Toward a Mathematical Theory of Inductive Inference, Information and Control, 25, 1975, 125—155.
6. *Gold E. M.* Language Identification in the Limit. Information and Control, 10, 1967, 447—474.
7. *Kugel P.* Induction: Pure and Simple. Information and Control, 35, 1977, 176—336.
8. *Minicozzi E.* Some Natural Properties of Strong Identification in Inductive Inference. Theoretical Computer Science, 2, 1976, 345—360.
9. *Wiehagen R.* Characterization Problems in the Theory of Inductive Inference. Lecture Notes in Computer Science, 62, 1978, 494—508.