И. А. КАРАПЕТЯН

ХОРДОВЫЕ ГРАФЫ

Граф пересечения семейства хорд окружности называется *хордовым.* Хордовые графы впервые были рассмотрены в [1]. Там же, в частности, доказано, что минимальное число параллельных стеков, реализующих данную подстановку, равно хроматическому числу $\gamma(G)$ соответствующего хордового графа. В работе [2] доказано, что задача минимальной раскраски хордовых графов NP-полна. Алгоритмы полиномиальной сложности нахождения наибольшей клики и наибольшего внутренне устойчивого множества хордовых графов приведены в [3]. В настоящей работе приводятся оценки хроматического числа и числа покрытия хордовых графов при некоторых ограничениях на семейства хорд.

Пусть $F=\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$—некоторое семейство хорд окружности. Раскроем окружность с точки, не являющейся концевой точкой ни одной из хорд. Тогда хорды сводятся к интервалам на прямой линии. Легко заметить, что две хорды пересекаются тогда и только тогда, когда соответствующие интервалы пересекаются и ни один из них не содержится в другом. Итак, хордовый граф можно представить следующим образом: задано семейство интервалов на прямой линии и в качестве вершин хордового графа берем множество интервалов, причем две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие интервалы пересекаются и ни один из них не содержится в другом. Далее, будем считать, что два интервала пересекаются, если их пересечение не пусто и ни один из них не содержится в другом.

Теорема 1. *Если G—хордовый граф без треугольников, то* $\gamma(G)\leqslant 8$.

Доказательство. Пусть G—хордовый граф без треугольников и $F=\{[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n]\}$—реализующее его семейство интервалов. Не нарушая общности, можно считать, что все точки a_i и b_j различны $1\leqslant i, j\leqslant n$. Для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что можно окрасить интервалы семейства F с помощью не более 8 цветов так, чтобы пересекающиеся интервалы были окрашены в различные цвета.

Рассмотрим следующее разбиение семейства F. Пусть $F_0=\varnothing$. Если множества $F_0, F_1, \ldots, F_{k-1}$ уже выбраны и $F\setminus(\bigcup_{i=0}^{k-1}F_i)\neq\varnothing$, то F_k выбирается следующим образом: F_k есть наибольшее множество семейства $F \setminus (\bigcup_{i=0}^{k-1} F_i)$, удовлетворяющее условию, что ни один из его интервалов не содержится в пересечении его же двух пересекающихся интервалов. Этот процесс продолжается до тех пор, пока $F \setminus (\bigcup_{i=0} F_i) = \varnothing$. Допустим, что в конце процесса были выбраны множества $F_0, F_1, \ldots, F_m$. Очевидно, что $F_1, F_2, \ldots, F_m$ есть разбиение семейства F.

Докажем, что если $j > i+1$, то ни один из интервалов множества F_i не пересекается ни с одним из интервалов множества F_j. Предположим обратное и пусть интервал $[a', b'] \in F_i$ пересекается с интервалом $[a'', b''] \in F_j$. Так как интервал $[a'', b'']$ не принадлежит множеству F_{j-1}, то из способа выбора F_{j-1} следует существование двух пересекающихся интервалов $[a_1', b_1']$, $[a_2', b_2']$ из F_{j-1}, пересечение которых содержит интервал $[a'', b'']$. С другой стороны, граф G не содержит треугольников, значит один из этих интервалов содержит интервал $[a', b']$. Предположим, что интервал $[a_1', b_1']$ содержит $[a', b']$. Поскольку интервал $[a_1', b_1']$ не принадлежит множеству F_i, то существуют два пересекающихся интервала из F_i, пересечение которых содержит интервал $[a_1', b_1']$. Учитывая то, что $[a', b']$ содержится в $[a_1', b_1']$, ясно, что пересечение этих двух интервалов содержит и интервал $[a', b']$, что противоречит выбору множества F_i. Следовательно, при раскраске интервалов множеств $F_1, F_3, F_5, \ldots$ можно использовать одни и те же цвета. То же самое имеет место для множеств $F_2, F_4, F_6, \ldots$

Значит для завершения доказательства теоремы 1 достаточно показать, что $\gamma(F_i) \leqslant 4$, т. е. можно окрасить интервалы множеств F_i в 4 цвета при $i=1, 2, \ldots, m$. Поскольку все множества $F_1, F_2, \ldots, F_m$ выбраны по одному и тому же принципу, то достаточно доказать этот факт для одного из них, скажем для F_1.

Предположим, что множество F_1 порождает связный подграф G'. Пусть $[a_l, b_l]$ — интервал, левый конец которого является самым левым среди всех интервалов множества F_1. Окрасим его в цвет 1. Обозначим множество всех неокрашенных интервалов, содержащих точку b_l, через $F_1(b_l)$. Поскольку G' — связный подграф, то согласно выбору $[a_l, b_l]$ имеем $F_1(b_l) \neq \varnothing$. Так как граф G не содержит треугольников, то легко видеть, что интервалы множества $F_1(b_l)$ можно пронумеровать в виде $[a_1^l, b_1^l]$, $[a_2^l, b_2^l], \ldots, [a_k^l, b_k^l]$ так, чтобы $[a_1^l, b_1^l] \supset [a_2^l, b_2^l] \supset \ldots \supset [a_k^l, b_k^l]$. Далее всегда будем предпологать, что когда берется множество неокрашенных интервалов, содержащих какую-нибудь точку, то интервалы этого множества пронумерованы в вышесказанном смысле. Поскольку все интервалы множества $F_1(b_l)$ попарно не пересекаются, то их можно окрасить в один цвет, скажем в цвет 2. Все неокрашенные интервалы множества F_1 полностью находятся слева или справа от точки b_l. Покажем, что можно продолжить раскраску на остальные интервалы множества F_1. Докажем это для тех интервалов, которые находятся слева от точки b_l. Доказательство проведем методом математической индукции по числу неокрашенных интервалов. Предположим, что если число неокрашенных интервалов, лежащих слева от точки b_l, меньше или равно m, то мы можем продолжить раскраску. Пусть имеются $m+1$ неокрашенных интервалов, лежащих слева от точки b_l.

Рассмотрим множество $F_1(a_1^l)$. $F_1(a_1^l) \neq \varnothing$, иначе из связности G' и способа выбора множества F_1 следует, что множество интервалов, находящихся слева от точки b_l пусто, что невозможно. Пусть $F_1(a_1^l) = \{[a_1^1, b_1^1], [a_2^1, b_2^1], \ldots, [a_{k_1}^1, b_{k_1}^1]\}$. Окрасим интервалы множества $F_1(a_1^l)$ в цвет 1. Так как по выбору множества F_1 не существуют интервалы, находящиеся в пересечении интервалов $[a_l, b_l]$ и $[a_1^l, b_1^l]$, то все неокрашенные интервалы из F_1, лежащие слева от b_l, находятся слева от точки a_1^l. Если для всех a_j^1, $F_1(a_j^1) = \varnothing$, где $j=1,2,\ldots,k_1$, то, из связности G' непосредственно следует, что множество всех неокрашенных интервалов, находящихся слева от a_1^l, пустое и тем самым доказана продолжимость раскраски на интервалы, лежащие слева от точки b_l. Предположим, что для некоторых a_j^1 имеем $F_1(a_j^1) \neq \varnothing$ и пусть $a_{j_1}^1$ — самая левая точка среди левых концов интервалов множества $F_1(a_1^l)$ т. е. среди точек a_1^1, a_2^1, ..., $a_{k_1}^1$, для которой $F_1(a_{j_1}^1) \neq \varnothing$. Пусть $F_1(a_{j_1}^1) = \{[a_1^{j_1}, b_1^{j_1}], [a_2^{j_1}, b_2^{j_1}], \ldots, [a_{k_2}^{j_1}, b_{k_2}^{j_1}]\}$. Окрасим интервалы множества $F_1(a_{j_1}^1)$ в цвет 2. Ясно, что все неокрашенные интервалы, лежащие слева от точки a_1^l, находятся в одном из участков $\{a_0^1, a_1^{j_1}\}$, $\{a_{j_1}^1, a_1^l\}$, где $a_0^1 = a_l$, если $j_1 = 1$, и $a_0^1 = a_{j_1-1}^1$, если $j_1 > 1$.

Докажем, что в участке $\{a_{j_1}^1, a_1^l\}$ можно продолжить раскраску. Этот факт докажем методом математической индукции по числу неокрашенных интервалов в рассматриваемом участке. Предположим, что если число неокрашенных интервалов в участке $\{a_{j_1}^1, a_1^l\}$ меньше или равно ν, то мы можем продолжить раскраску. Пусть в участке $\{a_{j_1}^1, a_1^l\}$ имеем $\nu+1$ неокрашенных интервалов. Рассмотрим множество $F_1(b_1^{j_1})$. Если $F_1(b_1^{j_1}) \neq \varnothing$, то окрасим интервалы множества $F_1(b_1^{j_1})$ в цвет 3. Вновь, по выбору F_1, не существуют интервалы, содержащиеся в пересечении интервалов $[a_{j_1}^1, b_{j_1}^1]$ и $[a_1^{j_1}, b_1^{j_1}]$. Следовательно, все неокрашенные интервалы, лежащие в участке $\{a_{j_1}^1, a_1^l\}$, находятся уже в участке $\{b_1^{j_1}, a_1^l\}$. Поскольку, число неокрашенных интервалов в $\{b_1^{j_1}, a_1^l\}$ меньше $\nu+1$, то по предположению индукции можно продолжить раскраску на них. Если $F_1(b_1^{j_1}) = \varnothing$, то из связности G' следует существование точки a_e^1, где $e > j_1$, для которой $F_1(a_e^1) \neq \varnothing$. Пусть $a_{j_2}^1$ — самая левая среди таких точек. Ясно, что точка $a_{j_2}^1$ находится правее точки $b_1^{j_1}$. Окрасим интервалы множества $F_1(a_{j_2}^1)$ в цвет 2. Теперь все неокрашенные интервалы, лежащие в участке $\{a_{j_1}^1, a_1^l\}$, находятся в одном из участков $\{a_{j_2-1}^1, a_{j_2}^1\}$, $\{a_{j_2}^1, a_1^l\}$.

Продолжимость раскраски на интервалах, лежащих в участке $\{a_{j_2}^l, a_j^l\}$, следует из предположения индукции, поскольку число неокращенных интервалов меньше $\nu+1$. А продолжимость раскраски в участках $\{a^1_{j_0}, a^1_{j_1}\}$ и $\{a^1_{j_2-1}, a^1_{j_2}\}$ следует из нашего первоначального предположения индукции, так как в каждой из них число непересекающихся интервалов меньше $m+1$.

Аналогичными рассуждениями доказывается продолжимость раскраски и для интервалов, находящихся справа от точки b_l. Если G' — несвязный, то таким же способом доказывается 4-раскрашиваемость каждой компоненты связности G'. Теорема 1 доказана.

Пусть $\alpha(G)$ число независимости и $\sigma(G)$ число покрытия полными подграфами графа G.

Теорема 2. *Если G — хордовый граф, то* $\sigma(G) \leqslant \frac{\alpha(G)(\alpha(G)+1)}{2}$.

Доказательство. Пусть G — хордовый граф и $F=\{[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n]\}$ — реализующее его семейство интервалов. Доказательство проведем методом математической индукции по числу $\alpha(G)$. Если $\alpha(G)=1$, то утверждение очевидно. Предположим, что при $\alpha(G)<k$ теорема верна и докажем ее справедливость для $\alpha(G)=k$. Из семейства F выбираем множества $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ следующим образом. Если $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{i-1}$, где $i-1<k$, уже выбраны, то Q_i будем выбирать так. Пусть f_i^1 — интервал семейства $F \setminus (\bigcup_{m=1}^{i-1} Q_m)$, левый конец которого является самым левым. Если интервалы $f_i^1, f_i^2, \ldots, f_i^j$ уже выбраны, то в качестве f_i^{j+1} будет выбран тот интервал, который пересекается со всеми интервалами $f_i^1, f_i^2, \ldots, f_i^j$ и левый конец которого является самым левым. Этот процесс продолжается до тех пор, пока это возможно. Предположим, что в конце процесса были выбраны интервалы $f_i^1, f_i^2, \ldots, f_i^{\nu}$. Множества $\{f_i^1, f_i^2, \ldots, f_i^{\nu}\}$ обозначим через Q_i. Очевидно, что для любого i, где $1 \leqslant i \leqslant k$, интервалы множества Q_i попарно пересекаются, т. е. порождают полный подграф в графе G. Рассмотрим семейство $F' = F \setminus (\bigcup_{i=1}^{k} Q_i)$. Возможны два случая:

$$\text{а) } \alpha(G[F'])<k, \quad \text{б) } \alpha(G[F'])=k.$$

Если имеет место случай а), то по предположению индукции $\sigma(G[F'])<\frac{k(k-1)}{2}$. Поскольку множества $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ порождают полные подграфы в графе G, то $\sigma(G) \leqslant \sigma(G[F'])+k \leqslant \frac{k(k+1)}{2}$.

Случай б). Пусть f' — интервал семейства F', левый конец которого является самым левым. Покажем, что интервал f' имеет общую часть с каждым интервалом f_j^1, где $1 \leqslant j \leqslant k$. Предположим обратное, и пусть $f_{j_0}^1 \cap f' = \varnothing$, где $1 \leqslant j_0 \leqslant k$. Так как $\alpha(G[F'])=k$ и $f_{j_0}^1 \cap f' \neq \varnothing$, то $\alpha(G[F' \cup f_{j_0}^1]) = k+1$, что противоречит определению $\alpha(G)$. Поскольку $f_k^1 \cap f' \neq \varnothing$, то из способа выбора множества Q_k следует существование интервала $f_k^{i_k} \in Q_k$, содержащего интервал f'. Нетрудно убедиться, что $f_k^{i_k} \cap f_j \neq \varnothing$, где $1 \leqslant j \leqslant k-1$. Аналогичными рассуждениями можно доказать существование интервала $f_{k-1}^{i_{k-1}}$ из Q_{k-1}, содержащего $f_k^{i_k}$. Продолжая этот процесс получим, что существуют $k+1$ интервалов, которые попарно не пересекаются, что невозможно в силу определения $\alpha(G)$. Теорема 2 доказана.

Автор благодарен А. В. Косточке за полезные советы при выполнении работы.

Ի. Ա. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

ԼԱՐԵՐԻ ԳՐԱՖՆԵՐ

G գրաֆը կոչվում է լարերի գրաֆ, եթե գոյություն ունի շրջանագծի լարերի ընտանիք, որի հատումների գրաֆը հանդիսանում է G-ն:

Աշխատանքում ապացուցված է:

Թեորեմ 1. Եռանկյուն չպարունակող լարերի գրաֆի ներկման թիվը մեծ չէ ութից:

Թեորեմ 2. Եթե G լարերի գրաֆ է ապա $\sigma(G) \leqslant \frac{\alpha(G)\,(\alpha(G)+1)}{2}$:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Even S. Itai A.* „Queus, Stacks and Graphs" Theory of machines and computations, Z. Kohavi and A. Paz, ed. Academic Press, N. Y., 1971, 71—86.
2. *Garey M. R., Johnson D. S., Miller G. L., Papadimitriou C. H.* The complexity of coloring circular arcs and chords, SIAM J. ALG. DISC. METH., vol. 1, № 2, June 1980, 216—227.
3. *Gavril F.* Algorithms for a maximum clique and a maximum independent set of a circle graph, Networks, 3, 1973, 261—273.