Б. Е. ТОРОСЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ГРАФОВ ОТНОСИТЕЛЬНО СВОЙСТВ

Для любого графа $G-X(G)$ и $U(G)$ будут обозначать множества вершин и ребер (дуг) соответственно.

Пусть P некоторое свойство, которым данный граф может обладать или не обладать.

Определение. Скажем, что граф G *устойчив относительно свойства* P, если для любых его порожденных подграфов $G_1 \subseteq G_2 \subseteq G$ из факта „G_1 обладает свойством P" следует, что подграф G_2 также обладает этим свойством.

Понятие устойчивости графа относительно свойства в некотором смысле „обратно" понятию наследственности свойства графа [1] и определенным образом дополняет его. К нему привели исследования свойств специальных классов монотонных функций алгебры логики.

Для каждого свойства P и для любого целого n, если пронумеровать вершины n-вершинных графов, устойчивых относительно P, в виде $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то каждому такому графу G обыкновенным образом можно сопоставить монотонную булевую функцию. Поэтому с каждым свойством P связано некоторое множество монотонных булевых функций, особенности которого непосредственно связаны с P.

Здесь мы будем рассматривать описание классов графов, устойчивых относительно следующих свойств:

1. Граф гамильтонов.
2. Граф связный.
3. Граф имеет гамильтонову цепь.

Будут рассматриваться как обыкновенные, так и ориентированные графы. Все неопределяемые понятия работы можно найти в [1].

Теорема 1. *Обыкновенный граф G устойчив относительно гамильтоновости тогда и только тогда, когда*

1. *Граф G—ациклический.*
2. *Граф G — простой цикл.*
3. $\delta(G) \geqslant p-2$, *где p число вершин графа G, а $\delta(G)$—минимальная степень.*

Доказательство.

Достаточность. Для случаев 1 и 2 она очевидна. Пусть для обыкновенного графа G, $\delta(G) \geqslant p-2$ и пусть порожденный подграф $H \subseteq G$ гамильтонов, т. е. в нем существует гамильтонов цикл $x_0, x_1, \ldots, x_q, x_0$. Пусть также $x \in X(G) \setminus X(H)$. Так как $\delta(G) \geqslant p-2$, то вершина x может быть не смежной только лишь с одной вершиной из H, откуда следует существование смежных с x соседних вершин x_i и x_{i+1} $(q+1:=0)$. Следовательно, последовательность вершин $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_q, x_0$ в подграфе $H \cup \{x\}$ образует гамильтонов цикл.

Необходимость. Пусть граф G устойчив относительно гамильтоновости и G—не ациклический и не простой цикл.

Покажем, что в графе G существует треугольник. Действительно, пусть C—кратчайший цикл графа.

Тогда ясно, что C не имеет диагоналей и не содержит все вершины графа G (в противном случае граф G был бы простым циклом). Поэтому существует вершина $x \notin C$ и подграф $C \cup \{x\}$ гамильтонов. Вершина x, очевидно, смежна с двумя соседними вершинами C и с ними образует треугольник. Из доказательства следует также, что цикл C является треугольником и через каждую вершину графа G проходит хотя бы один треугольник.

Пусть теперь в графе G существует вершина x_0, для которой $d(x_0) < p-2$, где $d(x)$—степень вершины x. Тогда будут существовать вершины y и z, не смежные с x_0. Если y, z, v, y—треугольник графа G, то подграф $\{x_0, y, z, v\}$ не гамильтонов. Если же такого треугольника в графе G не существтет, то вершины y и z не смежны. Рассмотрим некоторый треугольник y, u, s, y графа, проходящий через вершину y. Тогда легко заметить, что подграф $\{x_0, y, z, u, s\}$ не гамильтонов.

Таким образом, такой вершины x_0 в графе G не существует и теорема доказана.

Теорема 2. *Обыкновенный граф G устойчив относительно свойства „иметь гамильтонову цепь" тогда и только тогда, когда*

1. *G—вполне несвязный граф.*
2. $\delta(G) \geq p-2$.

Доказательство. Достаточность. В случае 1 она очевидна. Пусть для графа G, $|X(G)| = p \geq 3$ и $\delta(G) \geq p-2$. Пусть также l-произвольная простая цепь графа G и вершина $x \in X(G)$ не принадлежит l. Так как $d(x) \geq p-2$, то вершина x может быть не смежной самое большее с одной вершиной l, и, следовательно, она смежна по крайней мере с одной концевой вершиной цепи l. Отсюда следует, что подграф $l \cup \{x\}$ имеет гамильтонову цепь,

Необходимость. Пусть граф G устойчив относительно свойства „гамильтонова цепь" и G—не вполне несвязный. Рассмотрим произвольную вершину x графа G. Если вершина $y \in X(G)$ не смежна с x, то всякая смежная с x вершина смежна также с y и наоборот. Из отмеченного следует, что граф G не имеет изолированных вершин. Из этого же следует, что кроме y других вершин в графе G, не смежных с x, существовать не может. Действительно, если кроме вершины y вершина x не смежна также с вершиной $z \in X(G)$, то для произвольной вершины $v \in X(G)$, смежной с x, получим, что подграф $\{x, y, z, v\}$ не содержит гамильтонову цепь. Следовательно, $\delta(G) \geq p-2$ и теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Обыкновенный граф G устойчив относительно* *связности тогда и только тогда когда G полный m-дольный граф.*

Доказательство. Достаточность. Пусть G—полный m-долный граф. Если $m=1$, то G вполне не связный и утверждение очевидно. Пусть поэтому $m>1$. Рассмотрим произвольный связный подграф $G_1 \subseteq G$.

Так как подграф G_1 связный, то его вершины не могут одновременно быть из одной доли, откуда следует, что произвольная вершина графа G, $x \in X(G_1)$ смежна хотя бы с одной вершиной из G_1, т. е., что подграф $G_1 \cup \{x\}$ связный.

Необходимость. Пусть граф G устойчив относительно связности. Рассмотрим в этом графе произвольную вершину x и пусть $O(x)$— множество не смежных с ней вершин. Если вершина x смежна с вершиной y, то, из условия устойчивости, с y будут смежны также и все вершины из $O(x)$. Верно и обратное. Из сказанного следует, что вершины из $O(x)$ попарно не смежны и каждая из них смежна с произвольной вершиной из $X(G) \setminus O(x)$.

Следовательно, G—полный m-дольный граф и теорема доказана.

Пусть G произвольный ориентированный граф. Для произвольной вершины $x \in X(G)$ обозначим $A(x)=\{y/\overrightarrow{(x, y)} \in U(G)\}$ и $B(x)=$ $=\{y/\overrightarrow{(y, x)} \in U(G)\}$.

Теорема 4. *Направленный граф G устойчив относительно свойства „иметь ориентированную гамильтоному цепь" тогда и только тогда, когда*

1. *G—вполне не связный граф.*
2. *Для произвольной вершины $x \in X(G)$*

$$|A(x)|+|B(x)| \geqslant p-2,$$

и если для некоторой вершины x имеем $|A(x)|+|B(x)|=p-2$, то для не смежной с ней вершины y, $A(x)=B(y)$ и $B(x)=A(y)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть направленный граф G устойчив относительно указанного свойства. Если в таком графе существует вершина x не смежная одновременно с вершинами y и z, то вершины y и z также не смежны. Покажем, что в таком случае граф не может иметь ни одной дуги. Действительно, если в графе G, $\overrightarrow{(u, v)} \in U(G)$, то нетрудно видеть, что подграф $\{x, y, z, u, v\}$ не имеет гамильтоному цепь, что противоречит условию устойчивости.

Таким образом, если G не вполне несвязный, то для любой вершины $x \in X(G)$, $|A(x)|+|B(x)| \geqslant p-2$. Пусть теперь в графе G вершины x и y не смежны. Из устойчивости графа G следует, что если $z \in A(x)$, то $z \in B(y)$ и, если $u \in B(x)$, то $u \in A(y)$, откуда следуют равенства $A(x)=B(y)$ и $B(x)=A(y)$.

Достаточность. Если G вполне несвязный, то утверждение очевидно. Пусть поэтому G не вполне несвязный и для всех его вершин выполнено условие 2 теоремы 4. Пусть также $l=x_1, x_2, \ldots, x_k$ произвольная ориентироваоная цепь и вершина $x \notin l$ произволъна. Рассмотрим два случая.

1. Не существует вершина $x_l \in l$ такая, что $x_l \in A(x)$.
2. Существует вершина $x_l \in l$ такая, что $x_l \in A(x)$.

В первом случае, если $x_k \in B(x)$, то ориентированная цепь x_1, $x_2, \ldots, x_k, x$ будет гамильтоновой цепью в подграфе $l \cup \{x\}$. Если же $x_k \notin B(x)$, то вершины x и x_k не смежны и $x_1, \ldots, x_{k-1} \in B(x_k)$ Из равенства $B(x) = A(x_k)$ следует, что $x_1, \ldots, x_{k-1} \in A(x_k)$ и, следовательно, ориентированная цепь $x_k, x_1, \ldots, x_{k-1}, x$ будет гамильтоновой цепью в подграфе $l \cup \{x\}$.

Во втором случае пусть по цепи l вершина x_l является первой вершиной такой, что $x_l \in A(x)$. Если $x_l = x_1$, то ориентированная цепь $x, x_1, \ldots, x_k$ будет гамильтоновой в подграфе $l \cup \{x\}$. Если же $x_l \neq x_1$ и $x_{l-1} \in B(x)$, то ориентированная цепь $x_1, \ldots, x_{l-1}, x, x_l, \ldots, x_k$ будет гамильтоновой в подграфе $l \cup \{x\}$. Далее, если $x_l \neq x_1$ и $x_{l-1} \notin B(x)$, то вершины x и x_{l-1} не смежны. В последнем случае, если $x_k \in B(x)$, то ориентированная цепь $x_1, \ldots, x_k, x$ будет гамильтоновой в подграфе $l \cup \{x\}$. Если же $x_k \in A(x)$, то $x_k \in B(x_{l-1})$ и ориентированная цепь $x_1, \ldots, x_{l-2}, x, x_l, \ldots, x_k, x_{l-1}$ гамильтонова в подграфе $l \cup \{x\}$. Теорема доказана.

Следствие. *Произвольный турнир устойчив относительно свойства „иметь ориентированную гамильтонову цепь" и, следовательно, содержит ориентированную гамильтонову цепь.*

Բ. Ե. ԹՈՐՈՍՅԱՆ

ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՆԿԱՏՄԱՄԲ ԿԱՅՈՒՆ ԳՐԱՖՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Աշխատանքում առաջին անգամ մտցվում է տված հատկության նկատմամբ կայուն գրաֆի գաղափարը, որը սերտորեն կապված է որոշակի տիպի մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաների հետազոտման հետ։ Հաստատվում են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որպեսզի տված սովորական գրաֆը լինի կայուն համիլտոնյանության, համիլտոնյան շղթա պարունակելու և կապակցվածության հատկությունների նկատմամբ։ Նման պայման է հաստատված նաև համիլտոնյան շղթա պարունակելու հատկության նկատմամբ կայուն կողմնորոշված գրաֆների մասին։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Харари Ф.* Теория графов. М., Мир, 1973.