С. Х. ДАРБИНЯН

О ПАНЦИКЛИЧНОСТИ НАПРАВЛЕННЫХ ГРАФОВ С БОЛЬШИМИ ПОЛУСТЕПЕНЯМИ

В настоящей работе рассматриваются конечные орграфы без петель и кратных дуг. Все понятия и обозначения, не определяемые здесь, можно найти в [1]. Орграф с p вершинами называется панциклическим, если он содержит контур любой длины k $(3 \leqslant k \leqslant p)$. Орграф называется m-бирегулярным, если для любой его вершины x имеет место $\mathrm{od}(x)=\mathrm{id}(x)=m$. Джексон [3] доказал, что любой направленный граф с минимальными полустепенями не меньшими k $(k \geqslant 2)$ и не более $2k+2$ вершинами является гамильтоновым. В [2] доказано, что каждый $(2n+1)$-вершинный $(n-1)$-бирегулярный направленный граф G, при $n \geqslant 8$, является панциклическим, а при $n \geqslant 5$ содержит контур любой длины r $(3 \leqslant r \leqslant 2n)$. В настоящей работе доказывается, что каждый p-вершинный $(p \geqslant 10)$ направленный граф с минимальными полустепенями не меньшими $[p/2]-1$ является панциклическим.

Через $V(G)$ обозначим множество вершин орграфа G, а через $E(G)$—множество его дуг (часто вместо $V(G)$ и $E(G)$ будем писать G). Пусть G—орграф, $A, B \subseteq V(G)$, $x \in V(G)$. Введем обозначения:

$$E(A \to B)=\{xy \in E(G)/x \in A,\ y \in B\};$$

$$E(A, B)=E(A \to B) \cup E(B \to A);$$

$$O(x)=\{y \in V(G)/xy \in E(G)\};\quad I(x)=\{y \in V(G)/yx \in E(G)\};$$

$$O_A(x)=A \cap O(x);\quad I_A(x)=A \cap I(x);$$

$$\mathrm{od}(x, A)=|O_A(x)|;\quad \mathrm{id}(x, A)=|I_A(x)|.$$

Обозначим через $O_A^s(x)$, $s \geqslant 0$ (соответственно $I_A^s(x)$) множество таких вершин z из подмножества A, для которых существует путь длины s из вершины x в вершину z (соответственно из z в x), в частности $I_A^0(x)=O_A^0(x)=\{x\}$ и $O_A^1(x)=O_A(x)$, $I_A^1(x)=I_A(x)$. Число $\mathrm{od}^*(x, A)$ (соответственно $\mathrm{id}^*(x, A)$)—количество тех вершин подмножества $A \setminus \{x\}$, которые не смежны из вершины (соответственно к вершине) x. В частности

$$\mathrm{od}^*(x)=\mathrm{od}^*(x, V(G))=|V(G)|-\mathrm{od}(x)-1;$$

$$\mathrm{id}^*(x)=\mathrm{id}^*(x, V(G))=|V(G)|-\mathrm{id}(x)-1.$$

Число $d(x)=\mathrm{id}(x)+\mathrm{od}(x)$ называется степенью вевшины x. Запись $A\to B$ означает, что если $y\in A$ и $z\in B$, то $yz\in G$. Если $C\subseteq V(G)$ и $A\to B$, $B\to C$, то будем писать $A\to B\to C$, если же $A=\{x\}$, то вместо $\{x\}$ будем писать x. Обозначим через $\beta(x, A)$ число тех вершин подмножества $A\setminus\{x\}$, которые не смежны с вершиной x. В частности

$$\beta(x)=\beta(x, V(G))=|V(G)|-d(x)-1.$$

Подграф, порожденный подмножеством A, обозначим через $\langle A\rangle$.

Через C_r будем обозначать контур длины r, а через $[m, n]$ обозначим множество целых чисел не меньших m и не больших n. Если G—орграф, то $\overline{G}$ орграф, полученный после переориентации всех дуг оргрсфа G. Если $C_r: v_1v_2\ldots v_rv_1$, то всюду индексы вершин контура C_r берутся по $\mathrm{mod}\,(r)$.

Запись $G=\varnothing$ означает, что орграф G не содержит дуг.

Если $x, y\in V(G)$, то $E(x, y)=\varnothing$ означает, что вершины x и y не смежны, а $H\subset G$ означает, что H—подграф графа G.

Приведем известные леммы, которыми в дальнейшем часто будут пользоваться

Лемма 1. *Пусть G—произвольный p-вершинный орграф, $C_r: v_1v_2\ldots v_rv_1$—негамильтоновый контур длины $r\geqslant 3$ в G и $x\in V(G)\setminus V(C_r)$.*

а) *Если для некоторых вершин v_i, v_j и v_k контура C_r, где $i\neq j$ и $v_k\notin\{v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}\}$, имеет место xv_j; v_kv_{i+1}; $v_{j-1}v_{k+1}$; $v_ix\in G$, то G содержит контур длины $r+1$.*

б) *Если $P: u_1u_2\ldots u_q$—путь в $\langle V(G)\setminus V(C_r)\rangle$, где $q\geqslant 1$, $q\leqslant r\geqslant 2$, и для некоторого $l\in[1, q]$ G не содержит контур длины $r+l$, то для любого $i\in[1, r]$ имеет место*

$$|E(v_i\to u_1)|+|E(u_q\to v_{i+q-l+1})|\leqslant 1.$$

Замечание 1. *По принципу ориентированной двойственности* [1, с. 234] *утверждения всех лемм останутся справедливыми, если в их формулировках заменить* $\mathrm{od}(x, C)$ *на* $\mathrm{id}(x, C)$ *или* $\mathrm{id}(x, C)$ *на* $\mathrm{od}(x, C)$.

Лемма 2. *Пусть G является p-вершинный ($p\geqslant 1$) направленый граф. Тогда G содержит вершины x и y с* $\mathrm{od}(x)\leqslant[(p-1)/2]$ *и* $\mathrm{od}^*(y)\geqslant[p/2]$ *(как обычно $[a]$ обозначает наибольшее целое не большее числа $a\geqslant 0$).*

Лемма 3. *Пусть G—произвольный p-вершинный ($p\geqslant 1$) направленный граф. Тогда*

а) *G является бирегулярным турниром тогда и только тогда, когда* $\max\limits_{x\in V(G)}\{\mathrm{od}^*(x)\}=(p-1)/2$;

б) *если* $\max\limits_{y\in V(G)}\{\mathrm{od}^*(x)\}\leqslant p/2$, *то существует по крайней мере $[p/2]$ вершин со степенью не исхода равной $[p/2]$.*

Замечание 2. *Пусть G—произвольный p-вершинный направленный граф с минимальными полустепенями не меньшими* $[p/2]-k$

($k\geqslant 1$). *Тогда для любой его вершины* x *имеет место:* $\beta(x)\leqslant 2k$, *при нечетном* p; $\beta(x)\leqslant 2k-1$, *при четном* p; $\mathrm{od}^*(x)\leqslant[p/2]+k$; $\mathrm{id}^*(x)\leqslant[p/2]+k$. *Кроме того, если* $A\subset V(G)$ *и* $E(\langle A\rangle)=\varnothing$, *то* $|A|\leqslant 2k+1$.

Если $C_r: v_1v_2\ldots v_rv_1$ контур в орграфе G и $x\in V(G)\setminus V(C_r)$, то для любых $i\in[1, r]$ и $j\in[1, r-1]$ будем использовать обозначения:

$$B_j(x, C_r)=\{v_i/v_{i-j}\in I_{V(C_r)}(x)\};$$

$$D_j(x, C_r)=\{v_i/v_{i+j}\in O_{V(C_r)}(x)\}.$$

Вместо $B_j(x, C_r)$ и $D_j(x, C_r)$ в дальнейшем будем использовать обозначения $B_j(x)$ и $D_j(x)$, если это не приводит к путанице.

Теорема 1. *Пусть* G *есть* p*-вершинный* ($p\geqslant 10$) *направленный граф с минимальным и полустепенями не меньшими* $[p/2]-k\geqslant 6k-2$ ($k\geqslant 1$). *Тогда любая вершина графа* G *находится на контуре любой длины* $r\in[3, 5]$.

Доказательство. Из $\mathrm{od}(x)\geqslant 6k-2\geqslant 2k+2$ следует, что $\langle O(x)\rangle\neq\varnothing$. Значит, в G существует транзитивная тройка вершин x, y, z (т. е. такие вершины, что xy, yz, $xz\in G$). Если $L_1=E(O(z)\to I(x))\neq\varnothing$, то $C_4: xzuvx\subset G$ и $C_5: xyzuvx\subset G$, где $uv\in L_1$. Поэтому можно предполагать, что $L_1=\varnothing$. Отсюда, в частности имеем, что $\langle S\rangle=\varnothing$, где $S=O(z)\cap I(x)$. Следовательно, $I(x)\setminus S\neq\varnothing$, по лемме 2, существует вершина $u\in I(x)\setminus S$ такая, что

$$\mathrm{id}^*(u)\geqslant|O(z)\cup\{z, x\}|+[([p/2]-k-|S|)/2]\geqslant$$
$$\geqslant[p/2]+k+[([p/2]-5k-|S|+4)/2].$$

Следовательно,

$$[p/2]-5k-|S|+3\leqslant 0.$$

Отсюда и из $[p/2]\geqslant 7k-2$ имеем $|S|\geqslant 2k+1$. Поэтому, так как $\langle S\rangle=\varnothing$, то $|S|=2k+1$; $[p/2]=7k-2$ и

$$\mathrm{id}(x)=\mathrm{od}(x)=[p/2]-k.$$

Пусть

$$H=V(G)\setminus(O(z)\cup I(x)\cup\{x, y, z\}).$$

Из $L_1=\varnothing$ и $|H|=4k-1$ вытекает, что существуют вершины $v\in O(z)\setminus S$ и $w\in I(x)\setminus S$ такие, что

$$\min\{\mathrm{od}(v, H), \mathrm{id}(w, H)\}\geqslant 2k.$$

Следовательно, $O_H(v)\cap I_H(v)\neq\varnothing$ и $C_4: xyzu_1x$, $C_5: xzvu_2wx$, где $u_1\in S$; $u_2\in O_H(v)\cap I_H(w)$. Далее из $E(O(x)\to I(x))\neq\varnothing$ следует, что $C_3\subset G$. Теорема доказана.

Лемма 4. *Пусть* G *есть* p*-вершинный направленный граф с минимальными полустепенями не меньшими* $[p/2]-k\geqslant 6k-2$, *где* $k\geqslant 1$, *который содержит контур* C *длины* r *и не содержит контур длины* $r+1$. *Тогда*

а) *если* $r\geqslant 6k-1$ *и* $x\in A=V(G)\setminus V(C)$, *то* $\mathrm{od}(x, C)\neq 0$;

б) *если* $|A|\geqslant 6k-2$ *и* $x\in A$, *то* $\mathrm{id}(x, A)\neq 0$.

Доказательство. Пусть $C: v_1 v_2 \ldots v_r v_1 \subset G$ и $[p/2]=n$.

а) Допустим, что существует вершина $x \in A$ такая, что, $od(x, C)=0$. Тогда $od(x, A) \geqslant n-k$ и $id(x, C) \geqslant r-\beta(x) \geqslant r-2k \geqslant 4k-1$. Следовательно, $|B_2(x)| \geqslant 4k-1$. Так как $E(O_A(x) \to B_2(x))=\varnothing$, то для любой вершины $u \in B_2(x)$ имеет место $id^*(u, B_2(x)) \leqslant 2k-1$. Отсюда из $B_2(x)| \geqslant 4k-1$ с помощью леммы 2 получим, что $|B_2(x)|=4k-1$ и

$$\max_{u \in B_2(x)} \{id^*(u, B_2(x))\}=2k-1.$$

Следовательно, по лемме 3а $\langle B_2(x) \rangle$ является регулярным турниром и значит для любой вершины $u \in B_2(x)$ имеет место $id^*(u, B_2(x))=2k-1$. Далее, так как $r-|B_2(x)|>0$, то существует такая вершина $v_i \in B_2(x)$, что $v_{i+1} \notin B_2(x)$. Поэтому

$$id^*(v_i) \geqslant |\{x, v_{i+1}\} \cup O_A(x)|+2k-1 \geqslant n+k+1,$$

что по замечанию 2 невозможно.

б) Предположим, что для некоторой вершины $x \in A$ имеет место $id(x, A)=0$. Тогда легко заметить, что $r \geqslant n-k-1$. Действительно, в противном случае имеем $od(x, A) \geqslant n-k$ и $I_{V(C)}(x)=V(C)$. Отсюда $E(O_A(x) \to V(C))=\varnothing$ и следовательно по лемме 2 существует вершина $x \in O_A(x)$ такая, что

$$od^*(x) \geqslant [od(x, A)/2]+r+1 \geqslant n+k+(n-5k+1)/2,$$

значит $n \leqslant 5k-1$, что невозможно. Так как $r \geqslant 6k-1$, то по утверждению леммы 4а) имеем

$$\min\{id(x, C), od(x, C)\} \geqslant 1.$$

Отсюда вытекает, что $\beta(x, C) \geqslant 1$ и $|O_A(x)| \geqslant 4k-2$. Далее, так как $E(O_A(x) \to B_2(x))=\varnothing$ и $|B_2(x)| \geqslant n-k$, то для любой вершинл $y \in O_A(x)$ имеет место $od^*(y, O_A(x)) \leqslant 2k-1$. Следовательно, из лдммы 2 и 3б следует, что множество

$$Z=\{y \in O_A(x) / od^*(y, O_A(x))=2k-1\}$$

содержит по крайней мере $2k-1$ вершин. Если для некоторой вершины $y \in Z$ имеет место $E(O_A(x) \to y) \neq \varnothing$ (т. е. $y \in O_A^2(x)$), то по лемме 1б имеем

$$od^*(y) \geqslant 2k+|B_2(x) \cup B_3(x)| \geqslant n+k+1,$$

а это является противоречием. Поэтому $E(O_A(x) \to Z)=\varnothing$. Отсюда имеем $Z=O_A(x)$ и $\langle Z \rangle=\varnothing$. Следовательно, $|Z|=2k$ и существует вершина $u \in A \setminus Z$ такая, что $Z \to u$. Вновь имеем

$$od^*(u) \geqslant |B_3(x) \cup Z|+1 \geqslant n+k+1,$$

а это невозможно. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть G—произвольный p-вершинный направленный граф с минимальными полустепенями не меньшими $[p/2]-1=n-1 \geqslant 4$. Тогда G является панциклическим.*

Доказательство. По теореме 1 G содержит контур любой длины $r \in [3, 5]$. Поэтому для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что если $r \in [5, p-1]$ и $C_r \subset G$, то $C_{r+1} \subset G$. Допустим, что утверждение теоремы неверно, т. е. существует число $r\in[5, p-1]$ такое, что $C_r\subset G$ и $C_{r+1}\not\subset G$. Пусть $C=C_r: v_1v_2\ldots v_rv_1$ и $A=V(G)\setminus V(C)$. Тогда из леммы 1б следует, что для любой вершины $x\in A$ и для любого $i\in[1, r]$ имеет место

$$E(O_A^{i-1}(x)\to B_i(x))=E(D_i(x)\to I_A^{i-1}(x))=\varnothing. \qquad (1)$$

Так как $r\geqslant 5$, то с помощью леммы 4 и замечания 1 получим, что если $|A|\geqslant 4$ и $x\in A$, то $\beta(x, C)\geqslant 1$ и

$$1\leqslant \mathrm{id}(x, C)\leqslant \mathrm{id}(x)-1;\quad 1\leqslant \mathrm{od}(x, C)\leqslant \mathrm{od}(x)-1. \qquad (2)$$

Заметим, что для любой вершины $x\in V(G)$ имеет место

$$n-1\leqslant \mathrm{id}(x)\leqslant n+1;\quad n-1\leqslant \mathrm{od}(x)\leqslant n+1;$$

$$\beta(x)\leqslant 2;\quad \max\{\mathrm{od}^*(x),\ \mathrm{id}^*(x)\}\leqslant n+1;$$

если $|B|\geqslant 4$ и $B\subset V(G)$, то $\langle B\rangle\neq\varnothing$.

В ходе доказательства теоремы будем доказывать некоторые свойства для контура C и графа G в виде лемм.

Лемма. 5 *Если* $B\subset V(G)$ *и для всякой вершины* $x\in B$ *имеет место* $\beta(x, V(G)\setminus B)=2$, *то* $|B|\leqslant|V(G)\setminus B|$.

Доказательство очевидно.

Лемма 6. *Если* $x\in A$ *и* $y_1y_2\in O_A(x)$, *то* $E(y_2\to I_A(x))\neq\varnothing$.

Доказательство. Пусть $E(y_2\to I_A(x))=\varnothing$. Тогда по (1) и (2) имеем

$$\mathrm{od}^*(y_2)\geqslant|I_A(x)\cup B_2(x)\cup B_3(x)|+2\geqslant n+2,$$

а это невозможно.

Лемма 7. $r\geqslant 6$.

Доказательство. Предположим, что $r\leqslant 5$. Тогда $r=5$ и $|A|\geqslant 5$. Поэтому, согласно лемме 5 и (2), для любой вершины $y\in A$ имеет место $\beta(y, C)\geqslant 1$ и найдется такая вершина $x\in A$, которая не смежна точно с одной вершиной контура C. Отсюда в частности имеем, если $H\subseteq A$ и $|H|\geqslant 3$, то $\langle H\rangle\neq\varnothing$. Вершины контура C пронумеруем таким образом, чтобы $\{v_1v_2,\ldots v_{m-1}\}\to x\to\{v_{m+1}, v_{m+2},\ldots, v_r\}$ и $E(x, v_m)=\varnothing$. Пользуясь (2) можем предполагать, что $2\leqslant m\leqslant 4$.

Случай 1. $m=2$ *или* $m=4$.

Пусть $m=2$. Тогда $I_A(x)\geqslant n-2\geqslant 3$ и поэтому $\langle I_A(x)\rangle\neq\varnothing$. Пусть $y_2y_3\in E(\langle I_A(x)\rangle)$. Следовательно, по лемме 6 имеет место

$$L_1=E(O_A(x)\to y_2)\neq\varnothing,$$

и пусть, для определенности, $y_1y_2\in L_1$. Значит, $y_1\in I_A^2(x)$. Поэтому, так как $v_2\in D_i(x)$ для всех $i\in[1, 3]$, то по (1) имеем

$$E(v_2\to I_A(x)\cup\{x, v_1, y_1\})=\varnothing.$$

Отсюда и из $|I_A(x)\cup\{x, v_1, y_1\}|\geqslant n+1$ следует, что $v_2\to\{v_4, v_5\}$, и так как $E(v_2, x)=0$, то $E(\{y_1, y_2\}\to v_2)\neq\varnothing$. Следовательно, $C_6: v_1xy_1\ldots y_iv_2v_{3+i}\ldots v_rv_1$, где $i=1$ или $i=2$, а это противоречит предположении $C_{r+1}\not\subset G$.

Если же $m=4$, то для графа $\overline{G}$ имеет место случай $m=2$.

Случай 2. $m=3$.

Если $\beta(x)=1$, то легко заметить, что $|O_A(x)|=n-2$ или $|I_A(x)|=n-2$. Пусть для определенности $|O_A(x)|=n-2\geqslant 3$. Тогда $y_1y_2\in\langle O_A(x)\rangle$ и по лемме 6 имеем $L_2=E(y_2\to I_A(x))\neq\varnothing$. Далее, так как $E(O_A(x)\cup\{x, v_4\}\to v_3)=\varnothing$, то $v_1v_3\in G$ или $v_5v_3\in G$. Следовательно, если $v_3y_2\in G$, то $C_6: v_3y_2y_3v_{3+i}v_{4+i}v_3$, где $y_2y_3\in L_2$ и $i=1$ или $i=2$. Если же $v_3y_2\notin G$, то из $E(v_3, \{x, y_2\}=\varnothing$ следует, что v_3y_1, $y_3v_3\in G$ и $E(v_3, v_5)\neq\varnothing$. Поэтому, $C_8: v_1xy_2y_3v_3v_5v_1$ или $C_8: v_5v_3y_1y_2y_3xv_5$ соответственно при $v_3v_5\in G$ и $v_5v_3\in G$, а это невозможно.

Пусть теперь $\beta(x)=2$ и $E(x, y)=\varnothing$, где $y\in A$.

Допустим, что $yv_3\notin E(G)$. Тогда из $E(O_A(x)\cup\{x, y, v_4\}\to v_3)=\varnothing$ и из $|O_A(x)|\geqslant n-3$ вытекает, что $v_1v_3\in G$ или $v_5v_1\in G$. Если $v_3y\in G$, то нетрудно заметить, что $I_A(x)\to y$, так как в противном случае имеем $C_6: v_3yzxv_{3+i}v_{4+i}v_3$, где $z\in I_A(x)$ и $i=1$ или $i=2$. Отсюда и из (1) вытекает, что $E(O_A(x)\to I_A(x))=\varnothing$, поскольку в противном случае имеем $y\in O_A^3(x)$ и, учитывая случай 1, получим

$$\mathrm{od}^*(y)\geqslant|I_A(x)\cup\{x, v_3, v_4, v_5, v_1\}|\geqslant n+2.$$

Поэтому для некоторой вершины $z\in I_A(x)$ будет иметь место

$$\mathrm{id}^*(z)\geqslant|O_A(x)\cup\{x, y, v_2, v_3\}|+1\geqslant n+2,$$

а это невозможно. Если же $E(v_3, y)=\varnothing$, то $v_3\to O_A(x)$ и учитывая случай 1, можем предполагать, что $\{v_1, v_2\}\to y\to\{v_4, v_5\}$. Далее, так как $v_1v_3\in G$ или $v_5v_3\in G$, то по (1) имеем $E(O_A(x)\to I_A(x))=\varnothing$. Поэтому $E(O_A(x)\to y)\neq\varnothing$ и $C_8: v_1v_2v_3zyv_5v_1\subset G$, где $z\in O_A(x)$, что является противоречием. Пусть теперь $yv_3\in G$. Тогда легко заметить, что этот случай сводится к рассмотренному случаю $v_3y\in G$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Если* $x\in A$, *то* $\mathrm{od}(x, C)\geqslant 2$.

Доказательство. Допустим, что $\mathrm{od}(x, C)\leqslant 1$. Тогда с помощью (2) имеем $\mathrm{od}(x, C)=1$ и $\mathrm{od}(x, A)\geqslant n-2\geqslant 3$. Следовательно, $|A|\geqslant 4$; $I_A(x)\neq\varnothing$ и $E(\langle O_A(x)\rangle)\neq\varnothing$. Пусть для определенности $xv_r\in G$, $E(x, v_{r-1})=\varnothing$ и $y_1y_2\in E(\langle O_A(x)\rangle)$. По лемме 6 имеем $L_3=E(y_2\to I_A(x))\neq\varnothing$ и пусть $y_2z\in L_3$.

Если $\{v_{r-5}, v_{r-4}\}\to x$, то

$$E(O_A(x)\cup\{x\}\to v_{r-2})=E(z, v_{r-2})=\varnothing.$$

Значит $\{v_{r-5}, v_{r-4}\}\to v_{r-2}$ и $v_{r-2}y_1\in G$ или $v_{r-2}y_2\in G$. Следовательно, $C_{r+1}: v_1v_2\ldots v_{r-6+i}v_{r-2}y_iy_2zxv_r$, где $i=1$ или $i=2$. Отсюда вытекает, что $E(v_{r-5}, x)=\varnothing$ или $E(v_{r-4}, x)=\varnothing$.

Пусть $E(v_{r-4}, x)=\varnothing$. Тогда $v_{r-5}x\in G$ и с помощью лемм 1б и 6 получим

$$E(y_2, v_{r-3})=E(O_A(x)\cap O_A(v_{r-3})\to I_A(x)=\varnothing,$$
$$E(y_2\to(O_A(x)\cap O_A(v_{r-3}))\cup B_2(x)\cup B_3(x)\cup\{x\}))=\varnothing.$$

Следовательно, так как $|B_2(x)\cup B_3(x)|\geqslant 5$ и $|O_A(x)\cap O_A(v_{r-3})|\geqslant n-4$, то

$$\mathrm{od}^*(y_2) \geqslant |O_A(x) \cap O(v_{r-3})| + |B_2(x) \cup B_3(x) \cup \{x\}| \geqslant n+2,$$

что невозможно.

Пусть теперь $E(v_{r-5}, x) = \varnothing$. Тогда

$$E(O_A(x) \cup \{x, z, v_r\} \to v_{r-1}) = \varnothing.$$

Следовательно для некоторого $i \in [1, 2]$ имеют место $v_{r-1}y_i \in G$ и $\{v_{r-5}, v_{r-4}\} \to v_{r-1}$. Значит, $C_{r+1}: v_1v_2 \ldots v_{r-6+i}v_{r-1}y_iy_2zxv_rv_1$, где $i=1$ или $i=2$. Полученные противоречия завершают доказательство леммы 8.

С помощью леммы 8 *и соотношения* (2) *имеем, если* $|A| \geqslant 4$, *то для любой вершины* $x \in A$ *имеют место*

$$2 \leqslant \mathrm{id}(x, C) \leqslant \mathrm{id}(x) - 1; \quad 2 \leqslant \mathrm{od}(x, C) \leqslant \mathrm{od}(x) - 1. \tag{3}$$

Лемма 9. *Если* $|A| \geqslant 4$ и $x \in A$, *то* $\beta(x, C) = 2$.

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы неверно. Тогда по (2) имеем $\beta(x, C) = 1$. Так как $r \geqslant 6$ и $\mathrm{od}(x, C) \geqslant 2$, $\mathrm{id}(x, C) \geqslant 2$, то без потери общности можем предпологать, что

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}\} \to x \to \{v_{m+1}, v_{m+2}, \ldots, v_r\}$$

и $E(x, v_m) = \varnothing$, где $4 \leqslant m \leqslant r-2$.

Рассмотрим отдельно два случая.

Случай 1. $E(O_A(x) \to I_A(x)) = \varnothing$.

Согласно лемме 6 имеем $\langle O_A(x) \rangle = \langle I_A(x) \rangle = \varnothing$. Отсюда и из (3) вытекает, что $O_A(x) \to y \to I_A(x)$, где $y \in A$ и $E(x, y) = \varnothing$.

Если $m \leqslant r-3$, то $E(y, v_m) = \varnothing$ и

$$\{v_{m+1}, v_{m+2}, \ldots, v_r, v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}\} \to y,$$

т. е. $\mathrm{od}(y, C) = 0$, а это противоречит соотношению (3). Поэтому $m = r-2$. Следовательно,

$$E(O_A(x) \cup \{x, y, v_{m+1}\} \to v_m) = \varnothing.$$

Отсюда, так как $|O_A(x)| \geqslant n-3$ и $E(x, v_m) = \varnothing$, имеем $L_4 = E(v_m \to O_A(x)) \neq \varnothing$ и $v_{m-4}v_m \in G$ или $v_{m-3}v_m \in G$. Поэтому $C_{r+1}: v_{m-j}v_mz_1yz_2xv_{m+5-j} \ldots v_{m-j}$, где $v_mz_1 \in L_4$, $z_2 \in I_A(x)$ и $j=3$ или $j=4$, а это противоречит тому, что $C_{r+1} \not\subset G$.

Случай 2. $H = E(O_A(x) \to I_A(x)) \neq \varnothing$.

Пусть $z_1z_2 \in H$. Если $m \leqslant r-3$, то из (1) вытекает, что $E(v_m, \{x, z_1, z_2\}) = \varnothing$, что противоречит условию $\beta(v_m) \leqslant 2$. Поэтому $m = r-2$, значит, $|O_A(x)| \geqslant n-3$. Далее очевидно, что

$$E(v_m, z_2) = E(\{x, z_2, v_{m+1}\} \cup O_A(x) \to v_m) = \varnothing.$$

Отсюда для некоторого $j \in [2, 3]$ имеет место $v_{m-j}v_m \in G$. Следовательно, $C_{r+1}: v_1v_2 \ldots v_{m-j}v_mz_1z_2xv_{m+4-j} \ldots v_rv_1$, что противоречит предположению $C_{r+1} \subset G$. Лемма доказана.

Лемма 10. *Если* $|A| \geqslant 4$ *и* $x \in A$, *то* $\mathrm{od}(x, C) \geqslant 3$.

Доказательство. Допустим, что $\mathrm{od}(x, C) \leqslant 2$. Тогда из (3) вытекает, что $\mathrm{od}(x, C) = 2$ и $|O_A(x)| \geqslant n-3$. С другой стороны, из леммы

9 следует, что для любой вершины $y \in A$ имеет место $\beta(y, C)=2$, значит $\langle A\rangle$ является турниром. Следовательно, по лемме 5 $r \geqslant n+1$. Отсюда и из $\mathrm{od}(x, C)=2$ имеем $\mathrm{id}(x, C) \geqslant n-3$.

Случай 1. *В подграфе $\langle O_A(x)\rangle$ существует путь длины* 2. Пусть $P: y_1 y_2 y_3 \subset \langle O_A(x)\rangle$ — произвольный путь. По (1) имеем

$$E(y_3 \to \{x, y_2\} \cup \bigcup_{j=2}^{4} B_j(x))=\varnothing, \tag{4}$$

а из $\mathrm{id}(x, C) \geqslant n-3$ имеем

$$|\bigcup_{j=2}^{4} B_j(x)| \geqslant \mathrm{id}(x, C)+2 \geqslant n-1. \tag{5}$$

Из (4) и (5) вытекает, что

$$y_3 \to \{y_1\} \cup I_A(x) \tag{6}$$

и в 5 имеет место равенство. Так как путь P был произвольным, то в $\langle O_A(x)\rangle$ не существует транзитивной тройки вершин. Следовательно, $|O_A(x)|=3$ и из симметричности вершин y_1, y_2, y_3 и из (5), (6) вытекает $O_A(x) \to I_A(x)$ и $I_C(x)=\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-3}\}$; $|I_A(x)| \geqslant 2$. Пусть $z_1 z_2 \in \langle I_A(x)\rangle$. С помощью (1) имеем

$$E(z_2 \to \bigcup_{j=3}^{4} B_j(x) \cup \{O_A(x) \cup \{z_1\}\})=\varnothing.$$

Следовательно, $\mathrm{od}^*(z_2) \geqslant n+2$, а это невозможно.

Случай 2. *В подграфе $\langle O_A(x)\rangle$ не существует путь длины* 2. Тогда из $n-3 \leqslant |O_A(x)| \leqslant 2$ вытекает, что $n=5$ и $|O_A(x)|=2$. Так как $\langle O_A(x)\rangle$ являетчя турниром, то он содержит дугу $y_1 y_2$. По лемме 6 имеем, что $L_5=E(y_2 \to I_A(x)) \neq \varnothing$, а из (1) следует, чво

$$E(y_2 \to \{x, y_1\} \cup \bigcup_{j=2}^{3} B_j(x))=\varnothing. \tag{7}$$

Пусть для определенности $y_2 z \in L_5$.

Допустим, что $\mathrm{id}(x, C) \geqslant n-2=3$. Тогда из (7) вытекает, что $|\bigcup_{j=2}^{3} B_j(x)|=4$; $\mathrm{id}(x, C)=3$; $r=7$; $\{v_1, v_2, v_3\} \to x$ и $y_2 \to \{v_1, v_2, v_7\}$. Следовательно, пользуясь (1), получим $E(v_4, \{x, z\})=\varnothing$. Вновь пользуясь соотношением (1), получим $v_4 \to \{y_1, y_2\}$, $x \to \{v_5, v_6\}$ и $E(x, v_7)=\varnothing$. Длаее, так как $E(\{x, y_1, y_2, z, v_5\} \to v_4)=\varnothing$, то $v_2 v_4 \in G$ или $v_1 v_4 \in G$. В результате имеем $C_8: v_1 v_2 v_4 y_2 z x v_6 v_7 v_1$ или $C_8: v_1 v_4 y_2 z x v_5 v_6 v_7 v_1$, соответственно для $v_2 v_4 \in G$ и $v_1 v_4 \in G$, а это является противоречием. Следовательно, $\mathrm{id}(x, C) \leqslant n-3=2$, т. е. $\mathrm{id}(x, C)=2$. Отсюда $|I_A(x)| \geqslant 2$ и $r=6$.

Пусть $I_C(x)=\{v_1, v_2\}$. Если $x v_6 \in G$, то легко заметить, что $E(v_3, \{x, y_2\})=\varnothing$, $v_3 y_1 \in G$ и $E(y_1 \to I_A(x))=\varnothing$. Отсюда имеем $z y_1 \in G$ и поскольку $x y_2 z y_1 \subset G$, то из соотношения (1) следует $E(y_1 \to \{v_3, v_4, v_5, v_6\})=\varnothing$. Следовательно, $\mathrm{od}^*(y_1) \geqslant n+2$, что невозможно. Из полученного противоречия следует, что $x v_6 \notin G$, т. е. $E(x, v_6)=\varnothing$. Тогда $x \to \{v_4, v_5\}$ и $E(v_3 \to \{y_1, y_2\}) \neq \varnothing$. Отсюда легко заметить, что $v_6 v_3 \notin G$, Поэтому, если $v_5v_3 \in G$, то $E(v_3v_6)=\varnothing$, $v_3y_1 \in G$ и $C_7: v_4v_5v_3y_1y_2zxv_4$. Следовательно, $E(\{v_5, v_6\}\to v_3)=\varnothing$. Отсюда $v_1v_3 \in G$ и $E(v_3, y_2)=\varnothing$. Значит zv_3, $v_3v_6 \in G$ и $C_7: v_1v_2xy_2zv_3v_6v_1$.

Пусть теперь $I_C(x)\neq\{v_1, v_2\}$. Тогда $v_1x \in G$, $E(x, v_2)=\varnothing$ и можно предполагать, что $O_C(x)\neq\{v_i, v_{i+1}\}$, $i\in[3, 5]$, так как иначе для $\overline{G}$ имеем рассмотренный случай $I_C=\{v_1, v_2\}$. Отсюда легко заметить, что $v_4\to x\to\{v_3, v_6\}$. Далее из $E(y_2\to\{v_3, v_4, v_6, v_1, y_1, x\})=\varnothing$ имеем $y_2\to I_A(x)\cup\{v_2, v_5\}$, $E(z_2, \{v_1, v_2, v_4\})=\varnothing$, где $z_1, z_2\in I_A(x)$ и $z_1z_2\in G$, т. е. $\beta(z_2)\geqslant 3$, а это является противоречием. Итак, лемма 10 доказана.

Для доказательства следующих лемм нам понадобится

Замечание 3. *Если для всякой вершины $x\in A$ имеет место неравенство $1\leqslant\beta(x, C)\leqslant 2$, то возможны только следующие случаи (с точностью до выбора начальной вершины контура C и переориентации всех дуг графа G):*

I. $I_C(x)=\{v_1, v_2, \ldots, v_{s-1}\}$ *и* $E(x, v_s)=\varnothing$, *где* $x\in A$ *и* $1\leqslant s\leqslant r-3$.

II. $I_C(x)=\{v_1, v_2, \ldots, v_{s-1}, v_{s+\alpha+1}, v_{s+\alpha+2}, \ldots, v_{t-1}\}$; $O_C(x)=\{v_{s+1}, v_{s+2}, \ldots, v_{s+\alpha}, v_{t+1}, v_{t+2}, \ldots, v_r\}$, $E(x, \{v_s, v_t\})=\varnothing$ *где* $\alpha\geqslant 1$, $s+\alpha\leqslant t-2$, $s\geqslant 2$ *и* $t\leqslant r-1$.

Лемма 11. *В подграфе $\langle A\rangle$ не существует контура длины* 3.

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы не справедливо, и пусть $C_3: xyz\subset\langle A\rangle$. Из утверждения лемм 4б, 9 и 10 вытекает, что $\langle A\rangle$ является турниром и для всякой вершины $u\in A$ имеют место соотношения

$$\mathrm{od}(u, C),\ \mathrm{id}(u, C)\geqslant 3;\quad \mathrm{id}(u, A),\ \mathrm{od}(u, A)\geqslant 1. \qquad (8)$$

Отсюда имеем, что любая вершина $u\in A$ не смежна с некоторой вершиной из контура C. Пусть для определенности $E(x, v_s)=\varnothing$, где $s\in[1, r]$.

Покажем справедливость следующих утверждений:

Замечание 4. *Приведенные ниже утверждения* 1°—7° *останутся справедливыми, если в их формулировках заменить вершину x любой вершиной, которая в $\langle A\rangle$ находится на контуре длины* 3.

1°. а) $|E(\{v_{s-s}, v_{s-2}, v_{s-1}\}\to x)|+|E(x\to\{v_{s+2}, v_{s+3}\})|\neq 5$.

б) $|E(\{v_{s-4}, v_{s-3}, v_{s-2}, v_{s-1}\}\to x)|+|E(x\to\{v_{s+1}, v_{s+2}\})|\neq 6$.

Доказательство. а) Действительно, в просивном случае, в силу соотношения (1), вершина v_s не смежна с вершинами x, y, z, что невозможно.

б) Допустим противоречие. Тогда, исходя из (1)выводим: $E(z, \{v_{s-1}, v_s\})=\varnothing$. Следовательно, $\mathrm{od}(z, C)=0$, что противоречит неравенству (8).

2°. $|E(\{v_{s-3}, v_{s-2}, v_{s-1}\}\to x)|+|E(x\to\{v_{s+1}, v_{s+2}, v_{s+4}\})|\neq 6$.

Действителнно, в противном случае имеем $E(z,\{v_s, v_{s+2}\})=\varnothing$ и $z\to\{v_1, v_2, \ldots, v_{s-1}, v_{s+3}, v_{s+4}, \ldots, v_r\}$, т. е. получаем соотношение $\mathrm{id}(x, C)\leqslant 1$, противоречающее неравенству (8).

3°. $|E(\{v_{s-3}, v_{s-2}, v_{s-1}\}\to x)|+|E(x\to\{v_{s+1}, v_{s+3}, v_{s+4}\})|\neq 6$.

Если это соотношение не имеет места, то справедливо $E(z, \{v_{s+1}, v_{s+2}\})=\varnothing$. Отсюда $\mathrm{id}(x, C)\leqslant 1$, а это противоречит (8).

Из утверждений 1—3 вытекает

4°. а). Для любой вершины $u\in\{v_{s-2}, v_{s-1}, v_{s+1}, v_{s+2}\}$ имеет место $E(u, x)\neq\varnothing$. б) Если $E(x, v_l)=\varnothing$, то $v_{l-1}xv_{l+1}\subset G$.

5°. $|E(\{v_{s-3}, v_{s-2}, v_{s-1}\}\to x)|+|E(x\to v_{s+1})|\neq 4$.

Доказательство. Предположим, что утверждение не верно. Если $xv_{s+2}\in G$ или $v_{s-4}x\in G$, то из (1) и утверждения 4° вытекает, что $E(u, v_{s-1})=\varnothing$ и $v_su\in G$, где $u=y$ при $xv_{s+2}\in G$ и $u=z$ при $v_{s-4}x\in G$ а это противоречит утверждению 4°. Поэтому можно считать, что $xv_{s+2}\notin G$ и $v_{s-4}x\notin G$. Пусть вторая вершина, с которой вершина x не смежна, есть v_t. Тогда, так как $\mathrm{od}(x, C)\geqslant 3$, то $t\leqslant r-2$. Принимая во внимание утверждение 4° и замечание 3, получим $s=4\leqslant t-3$ и

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_{s-1}, v_{s+2}, v_{s+3}, \ldots, v_{t-1}\}\to x\to\{v_{s+1}, v_{t+1}, v_{t+2}, \ldots, v_r\}.$$

Вновь пользуясь (1) и 4°, легко получить: $r-s\leqslant 6$. Отсюда $t-s\leqslant 4$. Рассмотрим отдельно случаи $t-s=4$ и $t-s=3$.

Случай 1. $t-s=4$.

Тогда $\{v_{s+2}, v_{s+3}\}\to x$ и из $r-s\leqslant 6$ следует, что $r-t=2$. Значит, $\mathrm{od}(x, C)=3$, $\mathrm{id}(x)\geqslant 6$ и $n\geqslant 7$. Следовательно, $\mathrm{od}(x, A)\geqslant 3$ и в подграфе $\langle O_A(x)\rangle$ существует путь $y_1y_2y_3$. В силу леммы 6 имеем $E(y_i\to I_A(x))\neq\varnothing$, при всех $i\in[2, 3]$, т. е. в подграфе $\langle A\rangle$ вершина y_2 находится на контуре длины 3. Далее, из $C_{r+1}\not\subset G$ получим $E(y_2, \{v_{s+1}, v_{s+2}\})=\varnothing$, а это противоречит утверждению 1°*а*.

Случай 2. $t-s=3$.

Тогда, пользуясь соотношением (1), получим $E(y, v_{s+1})=$, $=E(z, v_{s+2})=\varnothing$. Следовательно, по 4° и (1) имеем v_3z, $v_{s+3}y\in G$ и $r-t=2$. Значит, $\mathrm{od}(x, A)\geqslant 2$ и пусть $y_1y_2\in\langle O_A(x)\rangle$. Тогда из леммы 6 вытекает $E(y_2\to I_A(x))\neq\varnothing$, т. е. в $\langle A\rangle$ вершина y_2 находится на контуре 3. Вновь пользуясь (1), получим $E(y_2, \{v_{s+1}, v_{s+2}\})=\varnothing$ т. е. для вершины y_2 выполняется случай I замечания 3, а это противоречит 4°. Полученное противоречие доказывает утверждение 5°.

6°. $|E(\{v_{s-2}, v_{s-1}\}\to x)|+|E(x\to\{v_{s+1}, v_{s+2}\})|\neq 4$.

Доказательство. Допустим, что утверждение неверно, так как имеет место случай II замечания 3, то по 5° имеем $s=3$; $v_{s+3}x\in G$, $4\leqslant t-s\leqslant 5$ и $1\leqslant r-t\leqslant 2$. Легко заметить, что $|E(v_s, \{y, z\}|=2$. Действительно, в противном случае для $u=y$ или $u=z$ имеем $E(v_s, u)=\varnothing$. Отсюда и из 4° вытекает, что $v_{s+1}u\in G$, т. е. для вершины u имеет место случай I замечания 3, а это невозможно.

Аналогичным образом имеем $|E(v_t, \{y, z\})|=2$. Из вышесказанного и из (1) вытекает, что $zv_sy\subset G$. Вновь пользуясь 4°, получим $v_{s+1}z$, $yv_{s-1}\in G$. Если $yv_t\in G$, то $C_{r+1}: v_1v_2\ldots v_{s+1}\,zxyv_t\ldots v_rv_1$ при $t-s=4$ и $C_{r+1}: v_1v_2\ldots v_{s+3}xyv_t\ldots v_rv_1$, при $t-s=5$. Поэтому можно предположить, что $yv_t\notin G$. Тогда из $|E(v_t, y)|=1$ имеем $v_ty\in G$. Следовательно, $r-t=2$, так как при $r-t=1$, $C_{r+1}: v_tyv_{s-1}v_sv_{s+1}zxv_{s+2}\ldots v_t$. Далее с помощью 5° нетрудно заметить, что те вершины контура C, которые не смежны с вершиной z, принадлежат множеству $\{v_1, v_2, v_{s+2}, v_{s+3}\}$. Поэтому вершина z смежна со всеми вершинами v_t, v_{t+1}, v_r. Отсюда $zv_{t+1}\in G$ или $v_{t+1}z\in G$. Если $v_{t+1}z\in G$, то $C_{r+1}: v_{t+1}zxyv_2 \dots v_{t+1}$, если же $zv_{t+1}\in G$, то $t-s=4$ и по (1) имеем $zv_t\in G$. Следовательно $C_{r+1}: v_1xyv_2 \dots v_{s+1}zv_tv_{t+1}v_rv_1$. Утверждение 6° доказано.

$$7^\circ.\ |E(\{v_{s-2}, v_{s-1}\}\to x)|+|E(x\to v_{s+1})|\neq 3.$$

Доказательство. Допустим, что утверждение неверно. Тогда по 4°, 5° и 6° имеем $r=8$; $s=3$; $t=6$ и $\{v_1, v_2, v_5\}\to x\to\{v_4, v_7, v_8\}$. Из (1) и 4° вытекает, что $E(y, v_4)=E(z, v_5)=\varnothing$; $x_3yv_5\subset G$; $v_4zv_8\subset G$ и $E(z, v_3)\neq\varnothing$. Пусть $v_3z\in G$. Тогда по (1) имеем $v_6y\in G$ и из 6° вытекает, что вторая вершина, которая не смежна с вершиной y, принадлежит множеству $\{v_7, v_8\}$. Следовательно, $yv_1\in G$ и $C_{r+1}: v_6yv_1v_2v_3zx v_4v_5v_6$. Пусть теперь $zv_3\in G$. Тогда вторая вершина, которая не смежна с вершиной z, принадлежит множеству $\{v_1, v_2\}$. По (1) имеем $v_8z\in G$ и при $yv_6\in G$, $C_{r+1}: v_1xv_4zv_3yv_6v_7v_8v_1$. Поэтому $v_6y\in G$ и $yv_1\in G$. Отсюда $C_{r+1}: v_7zv_3yv_1xv_4v_5v_6v_7$, при $v_7z\in G$. Поэтому бедем предполагать, что $v_7z\notin G$. В результате имеем $C_{r+1}: v_2zv_8yv_2v_3v_4v_5xv_8$, при $yv_2\in G$, и $C_{r+1}: v_1v_2yv_5xv_4zv_7v_8v_1$, при $v_2y\in G$. Итак, утверждение 7° доказано.

Из 4° и 7° вытекает, что $\mathrm{od}(x, C)\leqslant 2$ или $\mathrm{id}(x, C)\leqslant 2$, а это противоречит неравенству (8), поэтому наше предположение, что $C_3\subset\langle A\rangle$, неверно. Лемма доказана.

Лемма 12. *Если* $|A|\geqslant 4$ *и* $x\in A$, *то* $E(O_A(x)\to I_A(x))\neq\varnothing$.

Доказательство. Из леммы 9 следует, что $\langle A\rangle$ является турниром, а из (8) имеем, что $O_A(x)\neq\varnothing$ и $I_A(x)\neq\varnothing$. Так как $|A|\geqslant 4$, то можно предполагать, что $y_1y_2\in\langle O_A(x)\rangle$. Тогда, согласно лемме 6, имеем $E(y_2\to I_A(x))\neq\varnothing$. Лемма доказана.

Лемма 13. $|A|\leqslant 2$.

Доказательство. Допустим, что $|A|\geqslant 3$. Из лемм 9, 11 и 12 вытекает, что $|A|=3$. А из леммы 4а следует, что для всякой вершины $x\in A$ имеет место

$$\min\{\mathrm{id}(x, C), \mathrm{od}(x, C), \beta(x, C)\}\geqslant 1.$$

Пусть $\langle A\rangle$ является турниром. Тогда по лемме 11 он является транзитивной тройкой, т. е. если $A=\{x_1, x_2, x_3\}$, то $x_ix_j\in G$, при $1\leqslant i<j\leqslant 3$. Имеем, что $\mathrm{id}(x_1, C)\geqslant n-1$ и $E(x_3\to B_2(x_1)\cup B_3(x_1))=\varnothing$. Следовательно, $\mathrm{od}^*(x_3)\geqslant n+2$, что приводит к противоречию.

Пусть теперь $\langle A\rangle$ не является турниром, т. е. некоторая пара вершин из A, не смежны между собой. Пусть $A=\{x, y, z\}$. Тогда, без ограничения общности, можем считать, что $\mathrm{id}(x, C)=n-1$; $\{v_1, x_2, \dots, v_{n-1}\}\to x\to\{v_{n+1}, v_{n+2}, \dots, v_r\}$; $E(x, z)=\varnothing$ и $xy\in G$. Если $zy\in G$, то из соотношений $E(y\to B_2(x))=\varnothing$ и $E(D_2(y)\to z)=\varnothing$ легко вытекает, что yv_2, $v_1z\in G$. Отсюда $C_{r+1}: v_1zyv_2 \dots v_{n-1}xv_{n+2}\dots v_rv_1$, что не возможно. Если же $yz\in G$, то из $E(z\to B_3(x))=\varnothing$ получим $v_nz\in G$ и

$$O(z)=\{v_{n+3}, v_{n+4}, \ldots, v_r, v_1, v_2, v_3\}.$$

Следовательно, существует такое $i\in[2, n]$, что $v_rv_i\in G$. Поэтому $C_{r+1}: v_rv_i \ldots v_nzv_1v_2 \ldots v_{i-1}xv_{n+2} \ldots v_r$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 14. *Если* $E(\langle A\rangle)=\varnothing$ *и* $x\in A$, *то* $I_A(x)\neq\{v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}\}$, *где* $m-1=\mathrm{id}(x)\geqslant n-1$.

Доказательство. Из леммы 13 следует, что $|A|\leqslant 2$.

Допустим, что $I(x)=\{v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}\}$. Тогда очевидно, что $E(x, v_m)=\varnothing$ и $O(x)\subseteq\{v_{m+1}, v_{m+2}, \ldots, v_r\}$.

Случай 1. $E(v_r\to\{v_2, v_3, \ldots, v_m\})=\varnothing$.

Тогда легко заметить, что $m=n$ и $v_r\to\{v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots, v_{r-2}\}$. Отсюда и из $|\{v_j, n\leqslant j\leqslant r-1 / xv_{j+1}\in G\}|\geqslant n-1$ следует, что для любого $i\in[2, n-2]$ существует такое $t_i\in[n, r-1]$, что $v_{t_i}v_i$, $xv_{t_i+1}\in G$. Поэтому для любого $i\in[1, n-3]$ имеет место

$$L=E(v_i\to\{v_{i+2}, v_{i+3}, \ldots, v_n\})=\varnothing,$$

так как, в противном случае, имеем $C_{r+1}: v_1 \ldots v_iv_j \ldots v_{t_{i+1}}v_{i+1} \ldots v_{j-1}xv_{t_{i+1}}+1 \ldots v_rv_1$, где $v_iv_j\in L$. Поэтому

$$E(\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-3}, v_{n+1}, x, v_r\}\to v_n)=\varnothing, \tag{9}$$

и, значит, для некоторого $l\in[r-1, r-2]$ имеет место $v_lv_n\in G$.

Пусть $xv_{l+1}\in G$. Тогда при $v_iv_1\in G$, $n\leqslant i\leqslant r-3$, имеем $C_{r+1}: xv_{l+1} \ldots v_rv_{i+1} \ldots v_lv_n \ldots v_iv_1 \ldots v_{n-1}x$, что невозможно. Поэтому для всех $i\in[n, r-3]$ имеет место $v_iv_1\notin G$. Отсюда и из $L=\varnothing$ следует, что $E(v_1, v_n)=\varnothing$. Поэтому в силу равенства $E(v_n, x)=\varnothing$, $v_nv_2\in G$ и $v_{n-1}v_l\in G$ или $v_1v_{n+1}\in G$. Следовательно, $C_{r+1}: v_n v_2 \ldots v_{n-1}v_1xv_{l+1} \ldots v_rv_{n+1} \ldots v_lv_n$, при $v_{n-1}v_1\in G$, и $C_{r+1}: v_nv_2 \ldots v_{n-1}xv_{l+1} \ldots v_rv_1v_{n+1} \ldots v_lv_n$, при $v_1v_{n+1}\in G$, а это невозможно.

Пусть теперь $xv_{l+1}\notin G$. Тогда $A=\{x\}$; $E(x, v_{l+1})=\varnothing$ и $x\to\{v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots, v_l\}$. Пользуясь леммой 1а и считая рассмотренный случай $xv_{l+1}\in G$, имеем, что $E(v_n, v_{l+1})=\varnothing$, а из (9) вытекает, что $v_nv_1\in G$ и $v_{n+2}v_n\in G$. Поэтому $C_{r+1}: v_rv_{n+1}v_{n+2}\ v_nv_1v_2 \ldots v_{n-1}xv_{n+3} \ldots v_r$, что противоречит предложению $C_{r+1}\not\subset G$.

Случай 2. Существует $k\in[2, m]$ такое, что $v_rv_k\in G$

Из леммы 1а вытекает, что для любого $i\in[m, r-1]$ имеет место неравенство:

$$|E(v_i\to v_1)|+|E(x\to v_{i+1})|\leqslant 1. \tag{10}$$

Следовательно, при $O(x)=\{v_r, v_{r-1}, \ldots, v_{r-\mathrm{od}(x)+1}\}$ после переориентации всех дуг графа G придем к рассмотренному случаю 1. Таким образом, можем считать, что $O(x)\neq\{v_r, v_{r-1}, \ldots, v_{r-\mathrm{od}(x)+1}\}$. Отсюда имеем: $m=n$; $E(x, v_{n+1})\neq\varnothing$ (т. е. $xv_{n+1}\in G$); $A=\{x\}$ и $\mathrm{od}(x)=n-1$. Из соотношения (10) следует, что $\{v_3, v_4, \ldots, v_{n-1}\}\to v_1$. Поэтому, поскольку $E(\{v_1, v_4, v\}\to v_3)=\varnothing$, то существует $i\in[n, r-1]$ такое, что

$$|E(x\to v_{i+1})|+|E(v_i\to v_3)|=2.$$

Отсюда выводим, что $k\leqslant 3$, так как при $k\geqslant 4$ имеем $C_{r+1}: v_rv_k \ldots v_iv_3 \ldots v_{k-1}v_1v_2xv_{i+1} \ldots v_r$, а это невозможно.

2.1. $v_n v_r \in G$.

Если существует такое $i \in [2, n]$, что $v_{r-1} v_i \in G$, то $C_{r+1} : v_1 v_2 \ldots \ldots v_{i-1} x v_{n+1} \ldots v_{r-1} v_i \ldots v_n v_r v_1$. Поэтому

$$E(v_{r-1} \to \{v_2, v_3, \ldots, v_n\}) = \varnothing; \quad O(v_{r-1}) = \{v_1, v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots, v_{r-3}, v_r\}.$$

Отсюда и из (10) вытекает, что $E(v_r, x) = \varnothing$. Следовательно, так как $v_{r-2} v_1 \notin G$, то существует $j \in [2, n]$ такое, что $v_{r-2} v_j \in G$. Значит, $C_{r+1} : : x v_{r-1} v_{n+1} \ldots v_{r-2} v_j \ldots v_n v_r v_1 \ldots v_{j-1} x$, что приводит нас к противоречию.

2.2. $E(v_n, v_r) = \varnothing$.

Тогда из равенства $E(v_n, \{x, v_r\}) = \varnothing$ и формулы (10) следует, что $v_1 v_n \in G$, откуда вкупе с леммой 1а выводим:

$$I(v_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}, \quad O(v_n) = \{v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots v_{r-1}\}.$$

С другой стороны, согласно (10), очевидно, что существуют такие числа $l \in [2, n-1]$ и $j \in [n+1, r-1]$, что $v_j v_l \in G$ и $x v_{j+1} \in G$. Поэтому, $C_{r+1} : v_1 v_2 \ldots v_{l-1} v_n \ldots v_j v_l \ldots v_{n-1} x v_{j+1} \ldots v_r v_1$, чао невозможно.

Итак, всевозможные случаи рассмотрены. Лемма доказана.

Лемма 15. $|A| \neq 2$.

Доказательство. Допустим противное: $|A| = 2$. Из леммы 14 следует, что $\langle A \rangle \neq \varnothing$; $\beta(x, C) = 2$; $r = 2n-1$. Пусть, для определенности, $xy \in \langle A \rangle$.

Случай 1. $I(x) \subseteq \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Без ограничения общности, можно считать, что $v_1 x \in G$. Так как $\beta(x) = 2$, то для некоторого $s \in [2, n]$ имеет место $E(x, v_s) = \varnothing$, т. е. $I(x) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{s-1}, v_{s+1}, v_{s+2}, \ldots, v_n\}$, и если $i \in [3, s+1] \cup [s+3, n+ +2]$, то $y v_i \notin G$. Отсюда иммем, что для любого

$$j \in [\min\{2n-s+2, n+3\}, r+1]$$

имеет место $v_j y \notin G$. Следовательно, существует $m \in [2, n+1]$ такое, что $v_r v_m$, $v_{m-1} x \in G$.

1.1. $s = n$.

Покажем, что $y v_1 \in G$. Допустим, что $y v_1 \notin G$. Тогда $E(y, v_1) = \varnothing$, и следовательно, $y \to \{v_{n+2}, v_{n+3}, \ldots, v_r, v_2\}$. С другой стороны, поскольку $r = 2n-1$, то существует $k \in [n, r-1]$ такое, что $v_k v_1 \in G$. Поэтому $C_{r+1} : v_r v_m \ldots v_k v_1 \ldots v_{m-1} x y v_{k+2} \ldots v_r$, при $k \leqslant r-2$; $C_{r+1} : v_r v_m \ldots v_k v_1 \ldots v_{m-2} x y v_r$, при $m \geqslant 3$ и $k = r-1$; $C_{r+1} : v_r v_{n+1} \ldots v_{r-1} v_1 \ldots v_{n-1} x y v_r$, при $m = 2$ и $k = r-1$. Из полученного противоречия вытекает, что $y v_1 \in G$.

Теперь докажем, что

$$E(y, \{v_n, v_{n+1}\}) = \varnothing. \tag{11}$$

Допустим, что (11) неверно. Тогда для некоторого $l \in [n, n+1]$ имеет место $v_l y \in G$. Ясно, что $E(x, v_{l+2}) = \varnothing$, так как в случае $x v_{l+2} \in G$ имеем $C_{r+1} : v_r v_m \ldots v_l y v_1 \ldots v_{m-1} x v_{l+2} \ldots v_r$. Поэтому $x \to \{v_{l+1}, v_{l+3}, v_{l+4}, \ldots, v_r\}$. Следовательно, при $m \geqslant 3$ имеем $C_{r+1} : v_r v_m \ldots v_l y v_1 \ldots v_{m-2} x v_{l+1} \ldots v_r$, что невозможно. Отсюда $m = 2$ и значит, $v_r \to \{v_{n+1},$

$v_{n+2}, \dots v_{r-2}\}$. С другой стороны, существует $i\in[2, n-1]$ такое, что $v_{i+1}v_i\in G$. Отсюда и из вышеприведенных рассуждений вновь имеем $C_{r+1}: v_r v_{i+1} v_i \dots v_l y v_1 \dots v_{l-1} x v_{l+3} \dots v_r$. Поэтому из полученного противоречия следует справедливость соотношения (11).

Из $yv_1\in G$ и (11) вытекает, что

$$O(y)=\{v_{n+2}, v_{n+3}, \dots, v_r, v_{r+1}\},\quad I(y)=\{x, v_2, v_3 \dots, v_{n-1}\}.$$

С другой стороны, так как $E(v_n, \{x, y\})=\varnothing$ и $v_r v_m\in G$, то по лемме 1а имеем $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}\to v_n$. Следовательно, $C_{r+1}: v_r v_m \dots v_{n-1} y v_1 \dots v_{m-1} v_n \dots v_r$, что является противоречием.

1.2. $2\leqslant s\leqslant n-1$.

Тогда $E(x, v_{n+1})=\varnothing$; $x\to\{v_{n+2}, v_{n+3}, \dots, v_r\}$ и, так как $v_r v_m$, $v_{m-1}x\in G$, то нетрудно заметить, что $y\to\{v_{n+4}, v_{n+5}, \dots, v_r\}$, поскольку в противном случае y не смежна с некоторой вершиной v_i, где $i\in[n+4, r]$, откуда вытекает, что $yv_1, v_{n+1}y\in G$ и $C_{r+1}: v_r v_m \dots v_{n+1} y v_1 \dots v_{m-1} x v_{n+3} \dots v_r$. Аналогичным образом можем убедиться и в справедливости $v_{n+2}y\notin G$. Значит $E(v_{n+2}, y)=\varnothing$. Если $E(y, v_{n+1})=\varnothing$, то $y\to\{v_{n+3}, v_{n+4}, \dots, v_r, v_1, v_2\}$ и в $\overline{G}$ имеет место рассматриваемый выше случай 1.1 относительно вершины y и контура $\overline{C}_r$. Поэтому можно считать, что $E(y, v_{n+1})\neq\varnothing$. Если $v_{n+1}y\in G$, то легко заметить, что $s\leqslant n-2$; $E(y, v_1)=\varnothing$; $m=2$ и $y\to\{v_{n+3}, v_{n+4}, \dots, v_r, v_2, v_{s+2}\}$. В результате получим $C_{r+1}: v_r v_2 \dots v_{s+1} x y v_{s+2} \dots v_r$. Значит $yv_{n+1}\in G$. Отсюда имеем $s=n-1$ и

$$O(y)=\{v_{n+1}, v_{n+3}, v_{n+4}, \dots, v_r, v_1\},\quad I(y)=\{v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, x\}.$$

Если $m=2$, то $C_{r+1}: v_r v_m \dots v_n x y v_{n+1} \dots v_r$. Пусть $m\geqslant3$. Тогда для некоторого $i\in[n+1, r-1]$ имеет место $v_i v_2\in G$. Поэтому $C_{r+1}: v_r v_m \dots v_i v_2 \dots v_{m-2} y v_1 x v_{i+1} \dots v_r$, при $m\geqslant4$, а при $m=3$ существует такое $j\in[n, r-2]$, что $v_j v_2\in G$ откуда несложно получить $C_{r+1}: v_r v_3 \dots v_j v_2 y v_1 x v_{j+2} \dots v_r$, что приводит нас к противоречию.

Случай 2. $I(x)\not\subseteq\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Тогда имеет место случай II замечания 3. Так как $\mathrm{od}(x, C)=n-2$, то вершины контура C можно пронумеровать так, чтобы $|\{v_{t+1}, v_{t+2}, \dots, v_r\}|\geqslant(n-2)/2$, т. е. $t\leqslant r-2$. Если $\beta(y)=1$, то в $\overline{G}$ имеет место рассмотренный случай 1. Поэтому будем считать, что $\beta(y)=2$. Следовательно, по (1) имеем

$$E(y\to\{v_3, v_4, \dots, v_{s+1}, v_{s+\alpha+3}, v_{s+\alpha+4}, \dots, v_{t+1}\})=$$
$$=E(\{v_{t+2}, v_{t+3}, \dots, v_r, v_{r+1}, v_{s+2}, v_{s+3}, \dots, v_{s+\alpha+1}\}\to y)=\varnothing. \qquad (12)$$

С помощью $\beta(y)=2$ и (12) получим, что $yv_1\in G$, а из $E(v_r\to\{x, y\})=\varnothing$ вытекает существование такого $m\in[2, s]\cup[s+\alpha+2, t]$, что $v_r v_m\in G$. Очевидно, что $v_t y\notin G$, так как иначе $C_{r+1}: v_r v_m \dots v_t y v_1 x_{t-1} x v_{t+2} \dots v_r$. Рассмотрим случаи $yv_t\in G$ и $E(y, v_t)=\varnothing$ отдельно.

2.1. $yv_t\in G$.

Тогда очевидно, что $s+\alpha=t-2$. Отсюда и из $n\geqslant5$ следует, что $s=n-1\geqslant4$. Далее нетрудно заметить, что вершина y не смежна по крайней мере с одной вершиной из множества $\{v_{s+1}, v_{s+2}, \ldots, v_{t-1}\}$.

Покажем, что $E(y, v_{t+1})=\varnothing$. Допустим, что $E(y, v_{t+1})\neq\varnothing$. Тогда по (12) имеем $v_{t+1}y\in G$ и $m=t$, так как $C_{r+1}: v_rv_m\ldots v_{t+1}yv_1v_2\ldots v_{m-2}xv_{t+2}\ldots \ldots v_r$, при $m\geqslant 3$ и $C_{r+1}: v_rv_m\ldots v_{s+\alpha+1}xyv_t\ldots v_r$, при $m=2$. Из $m=t$ следует, что $t+2=r$ и, значит, $E(y, v_r)=\varnothing$, v_sy, $v_rv_{s+1}\in G$. С другой стороны, существует число $i\in[2, s]$ такое, что $v_tv_i\in G$. В результате имеем $C_{r+1}: v_r v_{s+1}\ldots v_tv_i\ldots v_syv_1\ldots v_{i-1}xv_r$. Полученное противоречие доказывает равенство $E(y, v_{t+1})=\varnothing$, из которого вытекает, что $\{v_3, v_4, \ldots, v_s\}\to y$. Очевидно, $C_{r+1}: v_rv_m\ldots v_{s-1}yv_1\ldots v_{m-1}xv_{s+1}\ldots v_r$, при $m\leqslant s-1$ и $C_{r+1}: v_rv_syv_1\ldots v_{s-2}xv_{s+1}\ldots v_r$, при $m=s$. Следовательно $m=t$, $v_rv_{s+1}\in G$ и существует $i\in[2, s]$ такое, что $v_{r-2}v_i\in G$. Снова приходим к противоречию, поскольку $C_{r+1}: v_rv_{s+1}\ldots v_{r-2}v_i\ldots \ldots v_syv_1\ldots v_{i-2}xv_r$.

2.2. $E(y, v_t)=\varnothing$.

Если $E(y, v_{t+1})=\varnothing$, то в $\bar{G}$ для вершины y и контура $\bar{C}_r$ имеет место случай 1. Поэтому можно предполагать, что $E(y, v_{t+1})\neq\varnothing$. Значит, согласно (12), $v_{t+1}y\in G$. Очевидно, $C_{r+1}: v_rv_m\ldots v_{t+1}yv_1\ldots \ldots v_{m-1}xv_{t+2}\ldots v_r$, при $t+2<r$. Поэтому $t+2=r$. Отсюда $E(y,v_r)=\varnothing$ и $\{v_3, v_4,\ldots, v_{t-1},v_{t+1}\}\to y$, т. е. $\mathrm{od}(y, C)\leqslant 2$, что противоречит условию $n\geqslant 5$.

Итак, рассмотрены всевозможные случаи. Лемма доказана.

Лемма 16. $|A|\neq 1$.

Доказательство. Предположим, что $|A|=1$, и пусть $A=\{x\}$. Из леммы 14 следует, что $\beta(x, C)=2$ и $I(x)\neq\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$; $O(x)\neq \neq\{v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots, v_r\}$. Следовательно, имеет место случай II из замечания 3. Значит $E(x, \{v_s, v_t\})=\varnothing$ и

$$I(x)=\{v_1, v_2, \ldots, v_{s-1}, v_{s+\alpha+1}, v_{s+\alpha+2}, \ldots, v_{t-1}\},$$

$$O(x)=\{v_{s+1}, v_{s+2}, \ldots, v_{s+\alpha}, v_{t+1}, v_{t+2}, \ldots, v_r\},$$

где $\alpha\geqslant 1$, $s+\alpha\leqslant t-2$, $s\geqslant 2$ и $t\leqslant r-1=2n-1$.

Заметим, что вершины контура C можно пронумеровать таким образом, чтобы имело место неравенство $s-1\geqslant(n-1)/2$.

Из леммы 1а вытекает, что для любого $i\in[2, s]$ и для любого $j\in[s, s+\alpha-1]\cup[t, r-1]$ справедливо соотношение:

$$|E(v_r\to v_i)|+|E(v_j\to v_1)|\leqslant 1. \tag{13}$$

Из (13) следует, что если $E(v_r\to\{v_2, v_3, \ldots, v_{s-1}\})\neq\varnothing$, то

$$\{v_3, v_4, \ldots, v_{s-1}, v_{s+\alpha}, v_{s+\alpha+1}, \ldots, v_{t-1}\}\to v_1. \tag{14}$$

Исследуем отдельно 4 случая.

Случай 1. $v_sv_{2n}\in G$ и $\alpha\geqslant 2$.

Из $\alpha\geqslant 2$ выводим; что $x\to\{v_{s+1}, v_{s+2}\}$. Так как $2n-s\geqslant n+1$, то $E(\{v_{s+1}, v_{s+2}, \ldots, v_{2n}\}\to v_s)\neq\varnothing$, и поэтому по лемме 1а существует такое $m\in[s+3, 2n-1]$, что $v_{m-1}v_s$, $v_sv_{m+1}\in G$ и вершина v_s не смежна с вершиной v_m. Поскольку $E(v_s, \{x, v_m\})=\varnothing$, то вершина v_s смежна со всеми вершинами $V(G)\setminus\{x, v_m, v_s\}$.

Следовательно, согласно лемме 1а имеет место $v_s\to\{v_{m+1}, v_{m+2},\ldots$

$\ldots, v_{2n}\}$. Очевидно, что $v_{s+1}v_m \notin G$, так как при $v_{s+1}v_m \in G$ имеем $C_{2n+1}:$ $: v_1v_2 \ldots v_{s-1}xv_{s+2} \ldots v_{m-1}v_sv_{s+1}v_m \ldots v_{2n}$. Поэтому $v_m v_{s+1} \in G$ или $E(v_m, v_{s+1}) = \varnothing$.

1.1. $v_mv_{s+1} \in G$.

Нетрудно заметить, что $s+\alpha+1 \leqslant m \leqslant t$. Действительно, в случае $m \leqslant s+\alpha$ или $m \geqslant t+1$ имеем $C_{2n+1}: xv_mv_{s+1} \ldots v_{m-1}v_sv_{m+1} \ldots v_{2n}v_1 \ldots v_{s-1}x$, а это невозможно.

Далее имеем

$L_1 = E(\{v_{s+1}, v_{s+2}, \ldots, v_{s+\alpha-1}\} \cup \{v_m, v_{m+1}, \ldots, v_{2n-1}\} \to \{v_2, v_3, \ldots, v_{s-1}\}) = \varnothing$,

так как если $L_1 \neq \varnothing$ и $v_jv_l \in L_1$, то $C_{2n+1}: xv_{s+1} \ldots v_jv_l \ldots v_sv_{j+1} \ldots v_{2n}v_1$ $\ldots v_{l-1}x$, или $C_{2n+1}: xv_{j+1} \ldots v_mv_{s+1} \ldots v_jv_l \ldots v_sv_{m+1} \ldots v_{2n}v_1 \ldots v_{l-1}x$, соответсавенно для $j \in [m, 2n-1]$ и $j \in [s+1, s+\alpha-1]$.

Покажем, что $m=t$. Предположим противное, а именно: $m \neq t$. Тогда из $m \leqslant t$ и из $L_1 = \varnothing$ следует, что $m = t-1$; $v_sv_l \in G$; $v_{2n} \to \{v_2, v_3, \ldots, v_{s-1}\}$ и $v_s \to \{v_2, v_3, \ldots, v_{s-2}\}$. Следовательно, из $E(v_s, \{x, v_{l-1}\}) = \varnothing$, (13) и (14) получаем, что $v_1v_s, v_{l-1}v_1 \in G$. Отсюда $C_{2n+1}: xv_{s+1} \ldots$ $\ldots v_{l-1}v_1v_sv_l \ldots v_{2n}v_2 \ldots v_{s-1}x$. Полученное противоречие доказывает справедливость равенства $m=t$.

Теперь докажем что

$$L_2 = E(v_{2n} \to \{v_2, v_3, \ldots, v_{s-1}\}) = \varnothing.$$

Предположим, что $v_{2n}v_l \in L_2$. Тогда, пользуясь (13), (14) и равенством $m=t$, получим $v_1 \to \{v_l, v_s\}$, и, следовательно, по лемме 1а имеем: $\{v_1, v_2, \ldots, v_{s-1}\} \to v_s$. Отсюда, поскольку v_s смежна со всеми вершинами $v_{s+1}, v_{s+2}, \ldots, v_{l-1}$, то $v_sv_{s+2} \in G$. Далее, из $v_2v_s \in G$, $L_1 = \varnothing$ и предположения $L_2 \neq \varnothing$ имеем $v_{2n}v_2 \in G$. Кроме того,

$$E(v_{s+1} \to \{v_{s+\alpha+2}, v_{s+\alpha+3}, \ldots, v_t\}) = \varnothing, \tag{15}$$

поскольку в противном случае $C_{2n+1}: v_1v_2 \ldots v_sv_{s+2} \ldots v_{j-1}xv_{s+1}v_j \ldots$ $\ldots v_{2n}v_1$, где $v_{s+1}v_j \in G$ и $j \in [s+\alpha+2, t]$. Из соотношений (13), (15) и $L_1 = \varnothing$ имеем $v_{s+1} \to \{v_{s+2}, v_{s+3}, \ldots, v_{s+\alpha+1}\}$. Следовательно, $C_{2n+1}:$ $: v_1v_t \ldots v_{2n}v_2 \ldots v_{s+1}v_{s+\alpha+1} \ldots v_{t-1}xv_{s+2} \ldots v_{s+\alpha}v_1$. Полученное противоречие доказывает справедливость равенства $L_2 = \varnothing$.

Из $L_1 = \varnothing$ и (13) следует, что $s \leqslant 4$; $v_2v_l \in G$ и

$$\{v_1, v_{s+\alpha}, v_{s+\alpha+1}, \ldots, v_{l-1}\} \to \{v_2, v_3, \ldots, {}_{s-1}\};$$

$$v_s \to \{v_2, v_3, \ldots, v_{s-2}\}. \tag{16}$$

Отсюда, при $s=4$ имеем $C_{2n+1}: v_1v_3v_4v_2xv_5 \ldots v_{2n}v_1$, поэтому будем предполагать, что $s=3$. Тогда $n=5$; $s+\alpha = t-3$.

Покажем, что $v_sv_{s+2} \in G$. Предположим, что $v_{s+2}v_s \in G$. Тогда, так как вершина v_s смежна со всеми вершинами $v_{s+2}, v_{s+3}, \ldots, v_{t-1}$, то по лемме 1а имеем: $\{v_{s+2}, v_{s+3}, \ldots, v_{t-1}\} \to v_s$. Следовательно, исходя из равенства $L_2 = \varnothing$, выводим:

$$E(v_{2n} \to \{v_{s+3}, \ldots, v_{t-1},, v_t\}) \neq \varnothing,$$

и, значит, $C_{2n+1}: v_{2n}v_i \ldots v_tv_{s+1} \ldots v_{i-1}v_sv_1v_2xv_{t+1}v_{2n}$, что невозможно.

Итак показали, что $v_s v_{s+2} \in G$. Очевидно, что $E(v_{s+1} \to \{v_{t-2}, v_{t-1}\}) = \varnothing$, так как в противном случае с помощью (16) имеем $C_{2n+1}: x v_{s+2} \ldots v_{t-1} v_2 v_s v_{s+1} v_i \ldots v_{2n} v_1 x$, где $i \in [t-2, t-1]$. Отсюда и из $E(v_{s+1} \to \{x, v_2, v_t, v_s\}) = \varnothing$ вытекает, что $v_{s+1} \to \{v_1, v_{t-3}, v_{t+1}, v_{2n}\}$. Теперь так как

$$E(v_{2n} \to \{v_2, v_3, v_4, v_{2n-1}, x\}) = \varnothing,$$

то для некоторого $i \in [t-2, t-1]$ имеет место $v_{2n} v_i \in G$. Следовательно, $C_{2n+1}: v_{2n} v_i \ldots v_t v_{s+2} \ldots v_{i-1} v_2 v_3 v_{s+1} v_1 x v_{t+1} \ldots v_{2n}$, при $v_t v_{s+2} \in G$. Значит, $v_{s+2} v_t \in G$ и при $\alpha \geqslant 3$, $C_{2n+1}: x v_{s+2} v_t \ldots v_{2n} v_1 \ldots v_{s+1} v_{t-3} v_{t-1} x$. Отсюда $\alpha = 2$ (т. е. $t+2 = 2n$) и $v_1 v_s \in G$. Далее, с помощью (16) и включения $v_2 v_t \in G$ выводим $C_{2n+1}: x v_{s+1} v_1 v_s v_{s+2} \ldots v_{t-1} v_2 v_t \ldots v_{2n} v_i \ldots v_{t-1} x$, что невозможно.

Таким образом, случай 1.1 рлссмотрен.

1.2. $E(v_m, v_{s+1}) = \varnothing$.

Тогда $m \neq t$ и

$$L_3 = E(\{v_m, v_{m+1}, \ldots, v_{2n-1}\} \to \{v_2, v_3, \ldots, v_{s-1}\}) = \varnothing,$$

поскольку при $v_i v_j \in L_3$ имеем $C_{2n+1}: x v_{s+1} \ldots v_i v_j \ldots v_s v_{i+1} \ldots v_{2n} v_1 \ldots v_{j-1} x$, а это невозможно. Из $L_3 = \varnothing$ и из $E(v_m, \{v_s, v_{s+1}\}) = \varnothing$ имеем

$$\{v_2, v_3, \ldots, v_{s-1}\} \to v_m. \tag{17}$$

Отсюда нетрудно вывести, что $C_{2n+1}: v_1 v_2 \ldots v_{s-1} v_m \ldots v_{t-1} x v_{s+1} \ldots v_{m-1} v_s v_t \ldots v_{2n} v_4$, при $m \leqslant t-1$; $C_{2n+1}: x v_{m+1} \ldots v_{2n} v_1 v_2 \ldots v_{s-1} v_m v_i \ldots v_{m-1} v_s \ldots v_{i-1} x$, где $i \in [s+\alpha+2, t]$, при $m \geqslant t+2$. Следовательно, $m = t+1$.

Легко заменить, что

$$L_4 = E(\{v_m, v_{m+1}, \ldots, v_{2n-1}\} \to v_{s+1}) = \varnothing,$$

$$L_5 = E(\{v_m, v_{m+1}, \ldots, v_{2n-1}\} \to \{v_{s+\alpha+2}, v_{s+\alpha+3}, \ldots, v_{t-1}\}) = \varnothing.$$

Действительно, иначе $C_{2n+1}: v_m \ldots v_i v_{s+1} \ldots v_{m-1} v_s v_{i+1} \ldots v_{2n} v_1 \ldots v_{s-1} x v_m$, при $v_i v_{s+1} \in L_4$, и $C_{2n+1}: v_m \ldots v_i v_j \ldots v_{m-1} v_s \ldots v_{j-1} x v_{i+1} \ldots \ldots v_{2n} v_1 v_2 \ldots v_{s-1} v_m$, при $v_i v_j \in L_5$. Из $L_4 = L_5 = \varnothing$ и (17) вытекает что $v_m v_1 \in G$, Следовательно, в силу соотношения (13)

$$E(v_{2n} \to \{v_2, v_3, \ldots v_s, v_{s+\alpha+2}, \ldots, v_t\}) = \varnothing.$$

Поэтому

Отсюда имеем $C_{2n+1}: v_{2n} v_{s+1} \ldots v_{m-1} v_s v_1 \ldots v_{s-1} x v_m \ldots v_{2n}$, при $v_s v_1 \in G$. Значит $v_1 v_s \in G$ и по лемме 1а имеет место $\{v_2, v_3, \ldots, v_{s-1}\} \to v_s$.

Если $v_t v_2 \in G$, то $C_{2n+1}: v_{2n} v_{s+1} \ldots v_t v_2 \ldots v_{s-1} x v_{t+1} v_1 v_s v_{2n}$, а если же $v_j v_2 \in G$, где $j \in [s, s+\alpha-1]$, то $C_{2n+1}: v_{2n} v_1 x v_{j+1} \ldots v_{m-1} v_s \ldots v_j v_2 \ldots \ldots v_{s-1} v_m \ldots v_{2n}$. Поэтому будем предполагать, что

$$E(\{v_s, v_{s+1}, \ldots v_{s+\alpha-1}, v_t\} \to v_2) = \varnothing.$$

Отсюда и из $L_3 = \varnothing$ следует, что $s = 3$ (т. е. $n = 5$) и $\{v_{s+2}, v_{s+3}, v_{t-1}\} \to v_2$. Поэтому, Поэтому, если $v_1 v_i \in G$, где $i \in [s+3, t]$, то $C_{2n+1}: v_1 v_i \ldots v_t v_s \ldots v_{i-1} v_2 x v_{t+1} \ldots v_{2n} v_1$. Далее, очевидно, что $v_s v_{s+2} \in G$ и, так как $E(v_{s+1} \to \{v_2, v_s, x, v_{2n}\}) = \varnothing$, то $v_{s+1} v_i \in G$, где $i \in$

$\in[s+3, t]$. Следовательно, $C_{2n+1}: v_1 v_s v_{s+2} \ldots v_{l-1} v_2 x v_{s+1} v_l \ldots v_{2n} v_1$, что невозможно.

Итак, случай 1 полностью рассмотрен.

Случай 2. $v_{2n}v_s \in G$.

Тогда легко заметить, что

$$L_6 = E(v_s \to \{v_1, v_2, \ldots, v_{s-1}\}) = \varnothing,$$

поскольку в случае $L_6 \neq \varnothing$, по (13) и (14) имеет место $s \geqslant 4$ и $v_{s-1}v_1 \in G$, поэтому $C_{2n+1}: v_{2n}v_s v_l \ldots v_{s-1} v_1 v_{l-1} x v_{s+1} \ldots v_{2n}$, где $v_s v_l \in L_6$.

Если $E(v_s, v_1) = \varnothing$, то из $L_6 = \varnothing$ имеем $v_2 v_s \in G$ и следовательно для контура $C'_{2n}: v_1 v_2 \ldots v_{s-1} x v_{s+1} \ldots v_{2n} v_1$ имеет место $O(v_s) = \{v_{s+1}, v_{s+2}, \ldots, v_{s+n-1}\}$, а это противоречит лемме 14. Поэтому можно считать, что $v_1 v_s \in G$. Отсюда и из леммы 1а непосредственно вытекает, что

$$L_7 = E(\{v_s, v_{s+1}, \ldots, v_{s+\alpha-1}, v_t, v_{t+1}, \ldots, v_{2n-1}\} \to v_2) = \varnothing.$$

С другой стороны, из $L_6 = \varnothing$ имеем, что для некоторого $l \in [s+\alpha+1, t]$ имеет место $v_s v_l \in G$. Вновь пользуясь леммой 1а, получим $v_{l-1} v_2 \notin G$. Отсюда и из $L_7 = \varnothing$ заключаем, что $s = 3$; $n = 5$ и $v_{2n} v_2 \in G$. Следовательно, v_l—единственная вершина из множества $\{v_{s+\alpha+1}, v_{s+\alpha+2}, \ldots, v_l\}$ для которой имеет место $v_s v_l \in G$. Далее, $C_{2n+1}: v_s, v_l \ldots v_{2n} v_2 x v_{s+1} \ldots v_{l-1} v_1 v_s$, при $v_s v_l \in G$. Значит, $v_s v_t \notin G$ (т. е. $t \neq l$) и

$$v_s \to \{v_{s+1}, v_{s+2}, \ldots, v_{s+\alpha}, v_{l+1}, v_{l+2}, \ldots, v_{2n-1}\}.$$

Если $t \leqslant 2n-2$, то из $v_s v_t \notin G$ и $v_s v_{t+1} \in G$ следует, что $E(v_s, v_t) = \varnothing$ и $E(v_t, v_1) \neq \varnothing$. Отсюда с помощью (13) имеем $v_1 v_t \in G$. Следовательно, в $\bar{G}$ для контура $\bar{C}_{2n}$ имеет место рассмотренный случай 1. Поэтому будем предполагать, что $t = 2n-1$. Тогда, в силу леммы 14, имеет место $E(v_s, v_t) = \varnothing$ и $v_s \to \{v_{s+1}, v_{s+2}, \ldots, v_{t-2}\}$. Итак, получили, что для контура $v_1 v_2 x v_4 \ldots v_{2n} v_1$ и вершины v_s имеет место

$$O(v_s) = \{v_{s+1}, v_{s+2}, v_{s+3}, v_{s+4}\},$$

что противоречит утверждению леммы 14.

Случай 3. $E(v_s, v_{2n}) = \varnothing$.

Из леммы 1а и из $E(v_s, \{v_{2n}, x\}) = \varnothing$ имеем $v_{2n-1} v_s \in G$ и $E(v_s, v_1) \neq \varnothing$. Если $v_1 v_s \in G$, то вновь пользуясь леммой 1а, получим

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_{s-1}\} \to v_s \to \{v_{s+1}, v_{s+2}, \ldots, v_{s+n-1}\}.$$

Следовательно, для контура $C'_{2n}: v_1 v_2 \ldots v_{s-1} x v_{s+1} \ldots v_{2n} v_1$ и вершины $v_s \notin V(C'_{2n})$ имеет место равенство,

$$O_{V(C'_{2n})}(v_s) = \{v_{s+1}, v_{s+2}, \ldots, v_{s+n-1}\},$$

противоречащее лемме 14. Поэтому будем считать, что $v_s v_1 \in G$

3.1. $\alpha \geqslant 2$.

Из леммы 1а вытекает, что $E(v_{2n}, v_{s+1}) = \varnothing$. Отсюда, поскольку $E(v_{2n}, v_s) = \varnothing$, то в силу соотношения (13) имеем $\{v_2, v_3, \ldots, v_{s-1}\} \to v_{2n}$. Нетрудно убериться, что

$$L_8 = E(\{v_s, v_{s+1}, \ldots, v_{s+\alpha-1}, v_t, v_{t+1}, \ldots, v_{r-2}\} \to \{v_2, v_3, \ldots, v_{s-1}\}) = \varnothing,$$

поскольку в противном случае $C_{2n+1}: xv_{l+1} \ldots v_{2n-1}v_s \ldots v_iv_j \ldots \ldots v_{s-1}v_{2n}v_1 \ldots v_{l-1}x$, где $v_iv_j \in L_2$.

Пусть $s \geqslant 4$. Тогда из $L_8 = \varnothing$ имеем $v_{2n-1}v_2$; $v_2v_3 \in G$ и $v_1v_3 \in G$ или $v_{2n-1}v_3 \in G$. Значит, $C_{2n+1}: v_1v_3 \ldots v_{2n-1}v_2xv_{2n}v_1$, при $v_1v_3 \in G$, и $C_{2n+1}: v_1v_2v_s \ldots v_{2n+1}v_3 \ldots v_{s-1}xv_{2n}v_1$, при $v_{2n-1}v_3 \in G$.

Пусть теперь $s=3$. Тогда $n=5$ и $t-3=s+\alpha$. Если $\alpha=2$, то можем предполагать, что $E(v_t, v_1)=\varnothing$, так как в противном случае для контура $\bar{C}_{2n}$ имеет место рассматриваемый случай 1 или 2. Поэтому из $L_8=\varnothing$ следует, что $v_2v_t \in G$, откуда $C_{2n+1}: v_1v_2v_t \ldots v_{2n-1}v_s \ldots \ldots v_{t-1}xv_{2n}v_1$. Предположим, что $\alpha=3$. Тогда $t=2n-1$. Рассмотрим в орграфе $\bar{G}$ контур $C'_{2n}: v_{s+3}v_{s+2} \ldots v_1v_{2n}v_{2n-1} \ldots v_{s+4}v_{s+3}$. Для этого контура соответственные числа s и α удовлетворяют следующим условиям: $s \geqslant (n-1)/2$ и $\alpha \geqslant 2$. Поэтому, используя случаи 1 и 2, можем предположить, что $E(v_s, v_{s+4})=\varnothing$. В результате имеем $E(v_s, \{x, v_{2n}, v_{s+1}\})=\varnothing$, т. е. $\beta(v_s) \geqslant 3$, т. е. приходим к противоречию.

3.2. $\alpha=1$.

Можно предположить, что $s+\alpha=t-2$, т. е. $t=s+3$, поскольку в случае $s+\alpha<t-2$ в $\bar{G}$ для $\bar{C}_{2n}$ имеет место рассмотренный случай $\alpha=2$.

Тогда, поскольку $v_sv_1 \in G$, то $v_{2n-2}v_s \in G$ и $v_sv_2 \in G$ или $v_sv_3 \in G$. Если $v_sv_2 \in G$, то контур $v_1v_2 \ldots v_{s-1}\,xv_{s+1} \ldots v_{2n}v_1$ можно пронумеровать так, чтобы для него соответственные числа α и s удовлетворяли условиям $\alpha \geqslant 2$ и $s \geqslant (n-1)/2$, а этот случай уже рассмотрен. Если же $v_2v_s \in G$, то

$$\{v_2, v_3, \ldots, v_{s-1}\} \to v_s \to \{v_{s+1}, v_{s+2}, \ldots, v_{s+n-3}\}.$$

Вновь получили, что для контура $v_1v_2 \ldots v_{s-1}xv_{s+1} \ldots v_{2n}v_1$ имеет место рассмотренный случай $\alpha \geqslant 2$.

Случай 4. $v_sv_{2n} \in G$ и $\alpha=1$.

Аналогично случаю 3.2 можем предполагать, что $s+\alpha=t-2$.

Воспользовавшись случаями 2 и 3, можно предполагать, что $v_1v_t \in G$. Очевидно, что

$$L_9=E(\{v_t, v_{t+1}, \ldots, v_{2n-1}\} \to v_2)=E(v_{2n-1} \to \{v_2, v_3, \ldots, v_s\})=\varnothing.$$

Если $v_sv_1 \in G$, то в силу соотношения (13) $v_{2n}v_2 \in G$. Следовательно, поскольку $L_9=\varnothing$ и $2n-t \geqslant n-2$, то $\{v_3, v_4, \ldots, v_{t-1}\} \to v_2$. Отсюда следует существование такого $i \in [t, 2n-1]$, что $v_1v_s \in G$.

Таким образом $C_{2n+1}: v_1v_t \ldots v_iv_sv_{s+1}v_{s+2}v_2 \ldots v_{s-1}xv_{i+1} \ldots v_{2n}v_1$, что невозможно. Если же $v_1v_s \in G$, то, поскольку вершина v_s не смежна хотя бы с одной из вершин множества $\{v_{s+2}, v_{s+3}, \ldots, v_{2n-1}\}$, пользуясь леммой 1а, получим $\{v_1, v_2, \ldots, v_{s-1}\} \to v_s$. Отсюда и из $L_9=\varnothing$ имеем $v_{2n}v_2 \in G$. С другой стороны, из-за симметричности вершин v_2 и v_{2n-1} можем предполагать, что $v_{2n-1}v_1 \in G$. В результате имеем $C_{2n+1}: v_1xv_{2n}v_2v_3 \ldots v_{2n-1}v_1$, и вновь приходим к противоречию.

Таким образом, всевозможные случаи рассмотрены. Лемма полностью доказана.

Поскольку $|A|\geqslant 1$, то леммы 15 и 16 противоречат друг другу. Из полученного противоречия вытекает справедливость теоремы. Теорема доказана.

Из теоремы 2 вытекают следующие следствия:

Следствие 1. ([3]). *Любой направленный граф с минимальными полустепенями, не меньшими k ($k\geqslant 4$) и не более $2k+2$ вершинами, является гамильтоновым.*

Следствие 2 ([2]). *Каждый* $(2n+1)$*-вершинный* ($n\geqslant 8$) $(n-1)$*-бирегулярный направленный граф является панциклическим.*

Следующие примеры показывают, что в теореме 2 ограничения на p и на минимальные полустепени не улучшаемы.

Пример 1. *G—направленный граф с множеством вершин $X_1\cup X_2\cup X_3$, где $|X_i|=3$, $1\leqslant i\leqslant 3$ и $xy\in E(G)$ тогда и только тогда, когда $x\in X_i$ и $y\in X_{i+1(\mathrm{mod}(3))}$.*

Очевидно, что G является 3-бирегулярным и не содержит контуров длины 4, 5, 7 и 8.

Пример 2. *G—направленный граф с множеством вершин $\{x_1, x_2, \dots x_{11}\}$ и $x_ix_j\in E(G)$ тогда и только тогда, когда $(j-i)\mathrm{mod}(11)=$* $=1;\ 2;\ 3$.

Очевидно, что G является $([p/2]-2)$-бирегулярным и не содержит контура длины 3.

Ս. Խ. ԴԱՐԲԻՆՅԱՆ

ՄԵԾ ԿԻՍԱԱՍՏԻՃԱՆՆԵՐՈՎ ՈՒՂՂՈՐԴՎԱԾ ԳՐԱՖՆԵՐԻ ՊԱՆՑԻԿԼԻԿՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում ցույց է տրվում, որ եթե p-գագաթանի ($p\geqslant 10$) ուղղորդված G գրաֆի մինիմալ կիսաաստիճանը փոքր չէ $[p/2]-1$-ն թվից, ապա G-ն պանցիկլիկ է, այսինքն պարունակում է ցանկացած k ($3\leqslant k\leqslant p$) երկարության կողմնորոշված ցիկլ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Харари Ф.* Теория графов. М., Мир, 1973.
2. *Дарбинян С. Х., Мосесян К. М.* О панцикличности регулярных орграфов. ДАН АрмССР, 1978, т. LXVII, № 4, 208—211.
3. *Jackson B.*, Long paths and cycles in oriented graphs, Journal of Graph Theory, 1981 vol. 5, 145—157.