Ж. Г. НИКОГОСЯН

ОДНО ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ГАМИЛЬТОНОВОСТИ ГРАФА

Рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Все понятия и обозначения, не определяемые здесь, можно найти в книге [1]. Пусть G—граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $X(G)$. Через $v(G)$, $\delta(G)$, $k(G)$ и $\alpha(G)$ обозначим соответственно число вершин, минимальную степень, вершинную связность и вершинное число независимости графа G. Граф G называется гамильтоновым, если содержит простой цикл C длины $v(G)$ (при этом C называется гамильтоновым циклом графа G).

Дирак [2] доказал, что если $\delta(G)\geqslant v(G)/2$, то G имеет гамильтонов цикл. При $\delta(G)\geqslant v(G)/2-1$ граф G не всегда содержит гамильтонов цикл.

В работе [3] (см. также [4]) доказано, что при дополнительном условии $k(G)\geqslant 2$ для гамильтоновости графа G достаточно требовать $\delta(G)\geqslant(v(G)+k(G))/3$.

Заметим, что из условий $k(G)\geqslant 2$ и $\delta(G)\geqslant(v(G)+k(G))/3$, в частности, следует (см. [3]) $\delta(G)\geqslant\alpha(G)$. Однако оба неравенства $k(G)\geqslant 2$ и $\delta(G)\geqslant\alpha(G)$ могут нарушаться при условии $\delta(G)\geqslant(v(G)+k(G)-1)/3$.

Нэш-Вильямс доказал [5, лемма 4], что если $k(G)\geqslant 2$ и $\delta(G)\geqslant\max((v(G)+2)/3),\ \alpha(G))$, то G—гамильтонов. В случае $k(G)\geqslant 2$ и $\delta(G)\geqslant\max((v(G)+1)\ 3,\ \alpha(G))$ граф G не всегда гамильтонов.

В настоящей статье доказывается

Теорема. *Если $k(G)\geqslant 3$ и*

$$\delta(G)\geqslant\max\left(\frac{v(G)+2k(G)}{4},\ \alpha(G)\right), \tag{1}$$

то G-гамильтонов.

Пусть H—маршрут графа G. По определению [1] H есть чередующаяся последовательность $v_0, x_1, v_1, \ldots, v_{n-1}, x_n, v_n$ некоторых вершин $v_i\in V(G)$ и ребер $x_j\in X(G)$ и обозначается через $H=v_0v_1\ldots v_n$. Пусть $V(H)=\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$, $X(H)=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Подграф, который имеет множество вершин $V(H)$ и множество ребер $X(H)$, обозначим $\|H\|$. Пусть $P=v_1v\ldots v_n$—простая цепь, а $C=v_1v_2\ldots v_nv_1$—простой цикл. Для $i<j$ обозначим $P[v_i, v_j]=C[v_i, v_j]=v_iv_{i+1}\ldots v_j$. Для $i>j$ будем обозначать $C[v_i, v_j]=v_iv_{i+1}\ldots v_nv_1v_2\ldots v_j$. Длина простой цепи P есть число $|X(P)|$. Для любого подграфа $Q\subseteq G$ и для любых вершин $x, y\in V(Q)$ расстоянием $d_Q(x, y)$ между вершинами x и y низывается длина кратчайшей простой цепи подграфа Q, соединяющей x и y. через $N(v)$ обозначим множество вершин, смежных с вершиной $v \in V(G)$. Обозначим

$$N(R)=(\bigcup_{v\in R} N(v))\setminus R,$$

где $R\subseteq V(G)$.

Пусть элементы n-вершинного множества X расположены в некотором порядке $x_1 x_2 \ldots x_n$. Тогда $s=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется перестановкой, а $s=(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1)$—циклической перестановкой множества X. Обозначим

$$s^t(x_i)=x_{i+t(\mathrm{mod}\, n)},\quad s^{-t}(x_i)=x_{|n+i-t|(\mathrm{mod}\, n)},$$
$$s^t(A)=\bigcup_{\xi\in A} s^t(\xi),\quad s^{-t}(A)=\bigcup_{\xi\in A} s^{-t}(\xi),$$

где $i\in\overline{1, n}$, t—положительное целое число и $A\subseteq X$. Первый и последний элемент любой конечной последовательности s обозначим $F(s)$ и $L(s)$ соответственно.

Пусть H—маршрут графа G, r—положительное целое число и пусть $Z_i\subseteq V(H)$, $i=1, 2, \ldots, \varepsilon$ $(\varepsilon\geqslant 2)$.

Определение. $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_\varepsilon)$ назовем (H, r)-схемой, если $Z_1, Z_2, \ldots, Z_\varepsilon$ являются независимыми множествами в подграфе $\|H\|$, а неравенство $d_H(\xi, \eta)\geqslant r$ имеет место для любых i, j $(i\neq j)$ и для любых $\xi\in Z_i$, $\eta\in Z_j$ $(\xi\neq\eta)$. Если множества $Z_1, Z_2, \ldots, Z_\varepsilon$ имеют систему различных представителей, то (H, r)-схема называется нетривиальной.

В работе [5, лемма 1] доказана следующая

Лемма 1. (Нэш-Вильямс). *Если C является n-вершинным простым циклом, $r\geqslant 2$—целое число и (Z_1, Z_2) является нетривиальной (C, r)-схемой, то*

$$|Z_1|+|Z_2|\leqslant \max\left(\frac{n-2r+6}{2},\ \frac{2n}{r}\right).$$

Лемма 2. *Если C является n-вершинным простым циклом, $r\geqslant 2$—целое число, (Z_1, Z_2, Z_3)—нетривиальная (C, r)-схема и* $|Z_i|\geqslant 3$, $i=1, 2, 3$, то

$$|Z_1|+|Z_2|+|Z_3|\leqslant \max\left(\frac{n-3r+13}{2},\ \frac{3n}{r}\right). \tag{2}$$

Доказательство. Выберем циклическую перестановку s множества $V(C)$ так что $s^1(\xi)$ $\xi\in X(C)$, $s^{-1}(\xi)$ $\xi\in X(C)$ для любого $\xi\in V(C)$. Обозначим $Z=Z_1\cup Z_2\cup Z_3$. Для любого $\xi\in Z$ через $f(\xi)$ обозначим минимальное целое число l, для которого $s^l(\xi)\in Z$. Тогда

$$n=\sum_{\xi\in Z} f(\xi). \tag{3}$$

Выберем перестановку t множества Z так, что $t^1(\xi)=s^{f(\xi)}(\xi)$ для любого $\xi\in Z$. Пусть любая вершина $\xi\in Z$ принадлежит ровно $g(\xi)$ различным Z_i $(i\in\{1, 2, 3\})$. Тогда

$$|Z_1|+|Z_2|+|Z_3|=\sum_{\xi\in Z} g(\xi). \tag{4}$$

Случай 1. $r\leqslant 6$.

Так как (Z_1, Z_2, Z_3) — нетривиальная (C, r)-схема и $r\geqslant 2$, то $f(\xi)\geqslant r$, если $g(\xi)\geqslant 2$ и $f(\xi)\geqslant 2$, если $g(\xi)=1$. Из $r\leqslant 6$ следует $f(\xi)\geqslant r\cdot g(\xi)/3$ для всех $\xi\in Z$. В силу (3) и (4) имеем $n\geqslant r\ (|Z_1|+|Z_2|+|Z_3|)/3$, откуда следует (2).

Случай 2. $r\geqslant 7$.

Случай 2.1. $g(\xi)\geqslant 2$ для любого $\xi\in Z$.

Поскольку (Z_1, Z_2, Z_3) — нетривиальная (C, r)-схема и $g(\xi)\geqslant 2$ для любого $\xi\in Z$, то $f(\xi)\geqslant r$ для любого $\xi\in Z$. В силу (3) $n\geqslant r\cdot|Z|\geqslant r\cdot\max|Z_i|\geqslant r(|Z_1|+|Z_2|+|Z_3|)/3$. Тогда $|Z_1|+|Z_2|+|Z_3|\leqslant 3n/r$, откуда следует (2).

Случай 2.2. $g(\xi)=1$ для некоторого $\xi\in Z$.

Случай 2.2.1. $g(\xi_i)=1$, $i=1, 2, 3$, где $\xi_i\in Z_i$.

Пусть τ_i $(i\in\{1, 2, 3\})$ — минимальное положительное число такое, что $t^{\tau_i}(\xi_i)\in\bigcup_{j\neq i} Z_j$. Тогда $t^{\tau_i-1}(\xi_i)\in Z_i$, $i=1, 2, 3$. Так как (Z_1, Z_2, Z_3) является (C, r)-схемой, то

$$f(t^{\tau_i-1}(\xi_i))\geqslant r\geqslant 2g(t^{\tau_i-1}(\xi_i))+r-2,\quad i=\overline{1, 3}.$$

Для остальных вершин $\xi\in Z\setminus\bigcup_i\{t^{\tau_i-1}(\xi_i)\}$ имеем либо $g(\xi)\geqslant 2$ и $f(\xi)\geqslant r\geqslant 7>2g(\xi)$, либо $g(\xi)=1$ и $f(\xi)\geqslant 2=2g(\xi)$. В силу (3) и (4) имеем $n\geqslant 2\ (|Z_1|+|Z_2|+|Z_3|)+3r-6$. Тогда

$$|Z_1|+|Z_2|+|Z_3|\leqslant\frac{n-3r+6}{2}<\frac{n-3r+13}{2},$$

откуда следует (2).

Случай 2.2.2. $g(\xi_1)=g(\xi_2)=1$ для $\xi_1\in Z_1$, $\xi_2\in Z_2$ и $g(\xi)\geqslant 2$ для всех $\xi\in Z_3$.

Пусть τ_i $(i\in\{1, 2\})$ — минимальное положительное число такое, что $t^{\tau_i}(\xi_i)\in\bigcup_{j\neq i} Z_j$. Тогда $t^{\tau_i-1}(\xi_i)\in Z_i$, $i=1, 2$. Так как (Z_1, Z_2, Z_3) является (C, r)-схемой, то

$$f(t^{\tau_i-1}(\xi_i))\geqslant r\geqslant 2g(t^{\tau_i-1}(\xi_i))+r-2,\quad i=1, 2.$$

Для всех вершин $\xi\in Z_3$ имеем $f(\xi)\geqslant r\geqslant 2g(\xi)+r-6$. Для остальных вершин $\xi\in Z\setminus(\bigcup_i\{t^{\tau_i-1}(\xi_i)\}\cup Z_3)$ имеем $f(\xi)\geqslant 2g(\xi)$ (см. случай 2.2.1). В силу (3) и (4) получим $n\geqslant 2\ (|Z_1|+|Z_2|+|Z_3|)+2(r-2)+r-6$. Тогда

$$|Z_1|+|Z_2|+|Z_3|\leqslant\frac{n-3r+10}{3}\leqslant\frac{n-3r+13}{3},$$

откуда следует (2).

Случай 2.2.3. $g(\xi_1)=1$ для $\xi_1\in Z_1$ и $g(\xi)\geqslant 2$ для всех $\xi\in Z_2\cup Z_3$.

Пусть τ — минимальное положительное число такое, что $t^{\tau}(\xi_1)\in\bigcup_{i\neq 1} Z_i$. Тогда $t^{\tau-1}(\xi_1)\in Z_1$. Так как (Z_1, Z_2, Z_3) является (C, r)-схемой, то

$$f(t^{\tau-1}(\xi_1))\geqslant r\geqslant 2g(t^{\tau-1}(\xi_1))+r-2.$$

Для всех вершин $\xi \in Z_2 \cup Z_3$ имеем $f(\xi) \geqslant r \geqslant 2g(\xi)+r-6$. Для остальных вершин $\xi \in Z \setminus (Z_2 \cup Z_3 \cup \{t^{-1}(\xi_1)\})$ имеем $f(\xi) \geqslant 2g(\xi)$ (см. случай 2.2.1). В силу (3), (4) и ввиду $|Z_2 \cup Z_3| \geqslant 3$ получим $n \geqslant 2(|Z_1| + |Z_2| + |Z_3|) + r-2+3(r-6)$. Тогда $|Z_1|+|Z_2|+|Z_3| \leqslant (n-3r+13)/2$, откуда следует (2). Лемма доказана.

Лемма 3. *Если P является n-вершинной ($n \geqslant 3$) простой цепью, $r \geqslant 2$ — целое число, (Z_1, Z_2, Z_3) — нетривиальная (P, r)-схема и $|Z_i| \geqslant 3$, $i=1, 2, 3$, то*

$$|Z_1|+|Z_2|+|Z_3| \leqslant \max\left(\frac{n-2r+12}{2},\ \frac{3(n+r-1)}{r}\right).$$

Доказательство. Рассмотрим $(r+1)$-вершинную цепь P', не имеющая общих вершин с P. Отождествим вершину $F(P)$ с $F(P')$, а $L(P)$ с $L(P')$. Полученный при этом простой цикл обозначим через C. Очевидно, что $|V(C)|=n+r-1$. Легко проверить, что тройка (Z_1, Z_2, Z_3) является (C, r)-схемой. По лемме 1

$$|Z_1|+|Z_2|+|Z_3| \leqslant \max\left(\frac{|V(C)|-3r+13}{2},\ \frac{3|V(C)|}{r}\right).$$

Учитывая $|V(C)|=n+r-1$ получим требуемое неравенство. Лемма доказана.

Аналогично доказательству леммы 3 и на основе леммы 1 получим

Лемма 4. *Если P является n-вершинной ($n \geqslant 2$) простой цепью, $r \geqslant 2$ — целое число, (Z_1, Z_2) — нетривиальная (P, r) — схема, то*

$$|Z_1|+|Z_2| \leqslant \max\left(\frac{n-r+5}{2},\ \frac{2(n+r-1)}{r}\right).$$

Лемма 5. *Пусть $P=\xi_1\xi_2\ldots\xi_n$ ($n \geqslant 3$) — произвольная простая цепь графа G. Если*

$$|N(\xi_1) \cap V(P)| + |N(\xi_n) \cap V(P)| \geqslant n+1,$$

то существует вершина $\xi_i (2 \leqslant i \leqslant n-1)$ такая, что

$$\xi_1\xi_{i+1} \in X(G), \quad \xi_n\xi_{i-1} \in X(G).$$

Доказательство. Введем обозначения

$$S_1=\{i/\xi_1\xi_i \in X(G)\}, \quad S_2=\{i/\xi_n\xi_{i-2} \in X(G)\},$$
$$d_1=|N(\xi_1) \cap V(P)|, \quad d_2=|N(\xi_n) \cap V(P)|.$$

Очевидно, что $d_1=|S_1|$, $d_2=|S_2|+1$, $S_1 \subseteq \{2, 3, \ldots, n\}$, $S_2 \subseteq \{3, 4, \ldots, n\}$. Если $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, то $|S_1|+|S_2| \leqslant n-1$, откуда $d_1+d_2=|S_1|+|S_2|+1 \leqslant n$, что противоречит предположению. Если же $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$, то утверждение леммы выполняется непосредственно. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть $P=\xi_1\xi_2\ldots\xi_n$ ($n \geqslant 3$) — произвольная простая* *цепь графа G, ε $(0\leqslant\varepsilon\leqslant n-2)$ — произвольное целое число. Если*

$$|N(\xi_1)\cap V(P)|+|N(\xi_n)\cap V(P)|\geqslant n+\varepsilon,$$

то существуют различные целые числа $i_1, i_2, \ldots, i_{\varepsilon+1}$ такие, что для всех значений $i=i_1, i_2, \ldots, i_{\varepsilon+1}$

$$\xi_1\xi_{i+1}\in X(G),\quad \xi_n\xi_i\in X(G). \tag{5}$$

Доказательство. Докажем лемму методом индукции по числу ε. Утверждение леммы при $\varepsilon=0$ можно доказать методом Оре [6, теорема 3. 4. 5]. Допустим, что лемма верна для всех значениях $\varepsilon=0, 1, \ldots, m$ $(m\geqslant 1)$ и докажем ее для $\varepsilon=m+1$. Условие (5) очевидно выполняется по крайней мере для одного значения $i=i_0$. В графе $G'=G-\xi_n\xi_{i_0}$ имеет место $|N(\xi_1)\cap V(P)|+|N(\xi_n)\cap V(P)|\geqslant n+\varepsilon-1=n+m$. По индуктивному предположению в графе G' существует различные числа $i_1, i_2, \ldots, i_{m+1}$, удовлетворяющие (5). Поскольку $\xi_n\xi_{i_0}\notin X(G')$, то $m+1\leqslant n-3$ и $i_j\neq i_0$ для всех $j=1, 2, \ldots, m+1$. Тогда условие (5) в графе G выполняется для всех $i=i_1, i_2, \ldots, i_{m+1}, i_{m+2}=i_0$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $v(G)=v$, $\delta(G)=\delta$, $k(G)=k$ и $\alpha(G)=\alpha$. Будем предполагать, что G отличен от полного графа, поскольку полные графы очевидно являются гамильтоновыми. Тогда существует k-вершинное подмножество $S\subseteq V(G)$ такое, что $\langle V(G)\setminus S\rangle$ - несвязный граф. Пусть $S=\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ и пусть $G_1, G_2, \ldots, G_t$ — компоненты связности графа $\langle V(G)\setminus S\rangle$.

Рассмотрим произвольную вершину $\xi\in V(G_i)$, $i\in\overline{1, t}$. Посколку G — связен, то $\{\xi\}\cup N(\xi)\subseteq S\cup V(G_i)$, т. е. $\delta+1\leqslant|\{\xi\}\cup N(\xi)|\leqslant|S|+|V(G_i)|$, откуда

$$|V(G_i)|\geqslant\delta-k+1,\quad i=\overline{1, t}. \tag{6}$$

Покажем, что

$$k\geqslant t. \tag{7}$$

Допустим обратное, т. е. $t\geqslant k+1$. Тогда в силу (1) и (6)

$$4\delta-2k\geqslant v=\sum_{i=1}^{t}|V(G_i)|+k\geqslant(k+1)(\delta-k+1)+k,$$

откуда $(\delta-k)(k-3)\leqslant -1$, что невозможно ввиду $\delta\geqslant k$, $k\geqslant 3$. Следовательно, (7) выполняется.

Введем обозначения

$$H^+=\bigcup_{i=1}^{f}G_i,\quad H^-=\bigcup_{i=f+1}^{t}G_i,\quad f\in\overline{1, t-1}.$$

Пусть $\Omega(n)$ обозначает множество всевозможных n-ок $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$, где $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — простые цепи графа G, попарно не имеющих общих вершин. Введем обозначения

$$\Omega^*(n)=\{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in\Omega(n)/$$

$$/F(x_i)\in S,\quad L(x_i)\in S,\quad V(x_i)\subseteq V(H^*)\cup S,\quad i=\overline{1, n}\},\quad *\in\{+, -\},$$

$$\Omega^+_\infty=\bigcup_{n=1}^{[k/2]}\Omega^+(n),\quad \Omega^-_\infty=\bigcup_{n=1}^{[k/2]}\Omega^-(n).$$

Через Ω^{+-} обозначим множество всевозможных пар $(\hat{x}, \hat{y})$ таких, что $\hat{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in\Omega^+_\infty$, $\hat{y}=(y_1, y_2, \ldots, y_n)\in\Omega^-_\infty$, а множество вершин $\bigcup_{i=1}^{n}(V(x_i)\cup V(y_i))$ с множеством ребер $\bigcup_{i=1}^{n}(X(x_i)\cup X(y_i))$ определяют простой цикл графа G.

Если $N(v_i)\cap V(G_j)=\varnothing$ для некоторых $i\in\overline{1, k}$, $j\in\overline{1, t}$, то множество $S\setminus\{v_i\}$ для графа G является $(k-1)$-вершинным разделяющим множеством, что противоречит k-связности графа G. Следовательно,

$$N(v_i)\cap V(G_j)\neq\varnothing,\ i=\overline{1, k},\ j=\overline{1, t}. \tag{8}$$

Случай 1. $|V(H^+)|\leqslant 2\delta-k-1$, $|V(H^-)|\leqslant 2\delta-k-1$.

Так как $v\leqslant 4\delta-2k$ (см. (1)) и $|V(H^-)|=v-|V(H^+)|-k$, то для некоторых целых чисел $\beta\geqslant 0$ и $\gamma\geqslant 0$

$$|V(H^+)|=2\delta-k-1-\beta,\quad |V(H^-)|=2\delta-2k+\beta-\gamma+1. \tag{9}$$

В силу $|V(H^-)|=2\delta-2k+\beta-\gamma+1$ и $|V(H^-)|\leqslant 2\delta-k-1$ получим

$$\beta-\gamma\leqslant k-2. \tag{10}$$

Введем число Δ следующим образом

$$\left.\begin{array}{ll}\Delta=k-\beta, & \text{если}\quad \beta\leqslant k-3,\\ \Delta=2, & \text{если}\quad \beta\geqslant k-2,\end{array}\right\}$$

откуда следует $2\leqslant\Delta\leqslant k$. Введем обозначения

$$A_1^+=\{p\in\Omega^+(1)/F(p)=v_1,\ L(p)=v_2\},$$

$$A_2^+=\{p\in A_1^+/|V(p)\cap S|\leqslant\Delta\},$$

$$A_3^+=\{p\in A_2^+/\forall p'\in A_2^+(|V(p')\cap S|\leqslant|V(p)\cap S|)\},$$

$$A_4^+=\{p\in A_3^+/\forall p'\in A_3^+(|\{i/V(G_i)\cap V(p')\neq\varnothing\}|\leqslant|\{i/V(G_i)\cap V(p)\neq\varnothing\}|)\},$$

$$A_5^+=\{p\in A_4^+/\forall p'\in A_4^+(|V(p')|\leqslant|V(p)|)\}.$$

В силу (8) и ввиду связности подграфов G_i для любых вершин $v_x, v_y\in S$ и для любого компонанса G_z существует некоторая цепь $P[x, y, z]$, удовлетворяющая условию

$$F(P[x, y, z])=v_x,\quad L(P[x, y, z])=v_y,\quad V(P[x, y, z])\subseteq V(G_z)\cup\{v_x, v_y\}.$$

В частности имеем $P[1, 1, 1]\in A_1^+$. Тогда по построению множеств A_2^+, A_3^+, A_4^+, A_5^+ имеем $A_5^+\neq\varnothing$. Пусть $P_0^+\in A_5^+$. Введем обозначения

$$A_1^-=\{p\in\Omega^-(1)/F(p)=v_1,\ L(p)=v_2\},$$

$$A_2^-=\{p\in A_1^-/V(p)\cap V(P_0^+)=\{v_1, v_2\}\},$$

$$A_3^-=\{p\in A_2^-/\forall p'\in A_2^-(|V(p')\cap S|\leqslant V(p)\cap S|)\},$$

$$A_4^-=\{p\in A_3^-/\forall p'\in A_3^-(|\{i/V(G_i)\cap V(p')\neq\varnothing\}|\leqslant|\{i/V(G_i)\cap V(p)\neq\varnothing\}|)\},$$

$$A_5^-=\{p\in A_4^-/\forall p'\in A_4^-(|V(p')|\leqslant|V(p)|)\}.$$

Из $P[1, 1, t]\in A_1^-$ следует $A_5^-\neq\varnothing$. Пусть $P^-\in A_5^-$. Введем обозначения

$$B_1^+=\{p\in A_1^+/V(p)\cap V(P^-)=\{v_1, v_2\}\},$$

$$B_2^+=\{p\in B_1^+/\forall p'\in B_1^+(|V(p')\cap S|\leqslant(V(p)\cap S|)\},$$

$$B_3^+=\{p\in B_2^+/\forall p'\in B_2^+(|\{i/V(G_i)\cap V(p')\neq\varnothing\}|\leqslant|\{i/V(G_i)\cap V(p)\neq\varnothing\}|)\},$$

$$B_4^+=\{p\in B_3^+/\forall p'\in B_3^+(|V(p')|\leqslant|V(p)|\}.$$

Из $A_1^+\neq\varnothing$ следует также $B_4^+\neq\varnothing$. Выберем $P^+\in B_4^+$. Покажем, что подграф $\|P^+\|\cup\|P^-\|$ определяет гамильтонов цикл графа G. Без потери общности можем предполагать, что для некоторых чисел Δ_1 и Δ_2

$$V(P_0^+)\cap S=\{v_1, v_2, \ldots, v_{\Delta_1}\},\quad V(P^-)\cap S=\{v_1, v_2, v_{\Delta_1+1}, v_{\Delta_1+2}, \ldots, v_{\Delta_2}\},$$

$$V(P^+)\cap S=\{v_1, v_2, \ldots, v_{\Delta_1}, v_{\Delta_2+1}, v_{\Delta_2+2}, \ldots, v_{\Delta_3}\}.$$

Покажем, что

$$f\leqslant\Delta-1. \tag{11}$$

При $f=1$ неравенство (11) очевидно. Пусть $f\geqslant2$. В силу (6) и (9)

$$f(\delta-k+1)\leqslant|V(H^+)|=2\delta-k-1-\beta=2(\delta-k+1)+k-\beta-3,$$

т. е. $k-\beta-3\geqslant(\delta-k+1)(f-2)\geqslant(\delta-k)(f-2)+f-2\geqslant f-2$. Поскольку $f\geqslant2$, то $k-\beta-3\geqslant0$, откуда $\Delta=k-\beta$ (по определению Δ). Тогда $f\leqslant\leqslant k-\beta-1=\Delta-1$. Этим доказано (11).

Покажем теперь, что

$$t-f\leqslant k-\Delta+1. \tag{12}$$

В силу (6) и (9)

$$(t-f)(\delta-k+1)\leqslant|V(H^-)|=2\delta-2k+1+\beta-\gamma=2(\delta-k+1)+\beta-\gamma-1,$$

откуда $\beta-\gamma-1\geqslant(\delta-k+1)(t-f-2)\geqslant t-f-2$, т. е. $t-f\leqslant\beta-\gamma+1$. При $k-\beta-3\geqslant0$ имеем $\Delta=k-\beta$. Тогда из $t-f\leqslant\beta-\gamma+1$, $\beta=k-\Delta$ следует (12). Пусть теперь $k-\beta-3<0$, т. е. $\Delta=2$. Тогда в силу (10), $t-f\leqslant\leqslant\beta-\gamma+1\leqslant k-1=k-\Delta+1$, чем и доказывается (12).

Покажем

$$V(P_0^+)\cap V(G_i)\neq\varnothing,\quad i=\overline{1, f}. \tag{13}$$

Допустим, что (13) неверно, т. е. для некоторого $i\in\overline{1, f}$, скажем для $i=f$, имеет место

$$V(P_0^+)\cap V(G_f)=\varnothing. \tag{13a}$$

Поскольку P_0^+ есть чередующаяся последовательность вершин и ребер, то можем выбирать некоторую ее максимальную подпоследовательность $x_1, x_2, \ldots, x_{\Delta_1}$, все элементы которой принадлежат $V(P_0^+)\cap S$. Очевидно, что $x_1=v_1$, $x_{\Delta_1}=v_2$. Если для некоторого числа $a(1\leqslant a\leqslant\Delta_1-1)$ цепь $P_0^+[x_a, x_{a+1}]$ не имеет общих вершин с H^+, то подграф $\|x_1x_2\ldots x_a\|\cup\|P[i_1, i_2, f]\|\cup\|x_{a+1}x_{a+2}\ldots x_{\Delta_1}\|$, где i_1 и i_2 определяются условиями $x_a=v_{i_1}$, $x_{a+1}=v_{i_2}$, определяет цепь, которая противоречит определению множества A_4^+. Следовательно,

$$V(P_0^+[x_i, x_{i+1}])\cap V(H^+)\neq\varnothing,\quad i=\overline{1, \Delta_1-1}. \tag{13б}$$

Из (7) из $t\geqslant f+1$ получим $k\geqslant f+1$, откуда следует, что подграф

$$\bigcup_{i=1}^{f-1}\|P[i+1, i+2, i]\|\cup\|P[f, 1, f]\|$$

определяет некоторую цепь L_1. По построению имеем $F(L_1)=v_1$, $L(L_1)=v_2$, $|V(L_1)\cap S|=f+1$. Тогда в силу (11) $|V(L_1)\cap S|\leqslant\Delta$ и, следовательно, $L_1\in A_2^+$. По построению A_3^+ получим

$$\Delta\geqslant\Delta_1\geqslant|V(L_1)\cap S|=f+1. \tag{13в}$$

Из (13а), (13б) и из $\Delta_1\geqslant f+1$ (см. (13в)) следует, что для некоторого $G_i(1\leqslant i\leqslant f-1)$, скажем для G_1, и для некоторых различных чисел $b, c(1\leqslant b\leqslant\Delta_1-1,\ 1\leqslant c\leqslant\Delta_1-1)$ цепи $P_0^+[x_b, x_{b+1}]$ и $P_0^+[x_c, x_{c+1}]$ имеют хотя бы по одной общей вершине с G_1. Тогда подграф $\|x_1x_2\ldots x_b\|\cup\|P[i_3, i_4, f]\|\cup\|x_{b+1}x_{b+2}\ldots x_{\Delta_1}\|$, где i_3 и i_4 определяются условиями $x_b=v_{i_3}$, $x_{b+1}=v_{i_4}$, определяет цепь, которая противоречит определению множества A_4^+, чем и доказывается (13).

Покажем

$$V(P^-)\cap V(G_i)\neq\varnothing,\quad i=\overline{f+1, t}. \tag{14}$$

Допустим, что (14) неверно, т. е. для некоторого $i\in\overline{f+1, t}$, скажем для $i=t$, имеет место

$$V(P^-)\cap V(G_t)=\varnothing. \tag{14а}$$

Из последовательности P^- выберем такую максимальную подпоследовательность $y_1y_2\ldots y_{\Delta_2-\Delta_1+2}$, все элементы которой принадлежат $V(P^-)\cap S$. Очевидно, что $y_1=v_1$, $y_{\Delta_2-\Delta_1+2}=v_2$. Если для некоторого числа $d(1\leqslant d\leqslant\Delta_2-\Delta_1+1)$ цепь $P^-[y_d, y_{d+1}]$ не имеет общих вершин с H^-, то подграф $\|y_1y_2\ldots y_d\|\cup\|P[j_1, j_2, t]\|\cup\|y_{d+1}y_{d+2}\ldots y_{\Delta_2-\Delta_1+2}\|$, где j_1 и j_2 определяются условиями $y_d=v_{j_1}$, $y_{d+1}=v_{j_2}$, определяет цепь, которая противоречит определению множества A_4^-. Следовательно,

$$V(P^-[y_i, y_{i+1}])\cap V(H^-)\neq\varnothing,\quad i=\overline{1, \Delta_2-\Delta_1+1}. \tag{14б}$$

Поскольку $(k-\Delta_1+2)\geqslant$ (в силу (13с)) $\geqslant k-\Delta+2\geqslant$ (в силу (12))$\geqslant$ $\geqslant t-f+1$, то додграф

$$\|P[2, \Delta_1+1, 1]\|\cup\left(\bigcup_{i=2}^{t-f-1}\|P[\Delta_1-1+i, \Delta_1+i, i]\|\right)\cup\|P[t-f+\Delta_1-1, 1, t-f]\|$$

определяет некоторую простую цепь L_2, удовлетворяющую условиям $F(L_2)=v_1$, $L(L_2)=v_2$, $|V(L_2)\cap S|=t-f+1$. Очевидно, что $L_2\in A_2^-$, откуда по построению A_3^- имеем

$$\Delta_2-\Delta_1+2=|V(P^-)\cap S|\geqslant|V(L_2)\cap S|=t-f+1. \qquad (14в)$$

Из (14а), (14б) и (14в) следует, что для некоторого G_i, скажем для G_{f+1}, и для некоторых различных чисел b, c $(1\leqslant b\leqslant\Delta_2-\Delta_1+1$, $1\leqslant c\leqslant\Delta_2-\Delta_1+1)$ цепи $P^-[y_b, y_{b+1}]$, $P^-[y_c, y_{c+1}]$ имеют хотя бы по одной общей вершине с G_{f+1}. Тогда подграф

$$\|y_1y_2\ldots y_b\|\cup\|P[j_3, j_4, t]\|\cup\|y_{b+1}y_{b+2}\ldots y_{\Delta_2-\Delta_1+2}\|,$$

где j_3 и j_4 определяются условиями $y_b=v_{j_3}$, $y_{b+1}=v_{j_4}$, определяет цепь, которая противоречит определению множества A_4^-, чем и доказывается (14).

Покажем

$$V(P^+)\cap V(G_i)\neq\varnothing,\quad i=\overline{1,f}. \qquad (15)$$

Если $\Delta_3\leqslant\Delta$, то $P_0^+\equiv P^+$ и (15) следует из (13). Если же $\Delta_3\geqslant\Delta+$ $+1$, то ввиду (11) имеем $\Delta_3\geqslant f+2$. Тогда (15) можно получить аналогично (13).

Покажем

$$V(H^+)\subseteq V(P_0^+). \qquad (16)$$

Допустим, что (16) неверно, т. е. для некоторого G_i, скажем для G_1, имеет место $V(G_1)\setminus V(P_0^+)\neq\varnothing$. Через T_1 обозначим некоторую компоненту связности графа $\langle V(G_1)\setminus V(P_0^+)\rangle$. Введем обозначения

$$M_1=N(V(T_1)),\quad E=\{x\in M_1/\exists y\notin S\quad(xy\in X(P_0^+))\}.$$

Покажем, что $E\neq\varnothing$. Допустим обратное, т. е. $E=\varnothing$. Из определения T_1 следует $M_1\subseteq V(P_0^+)\cup S$. В силу связности подграфа G_1 имеем $M_1\setminus S\neq\varnothing$. Из $E=\varnothing$ следует $D\subseteq S$, $D\cap M_1=\varnothing$, где

$$D=\{x\in P_0^+/\exists y\in M_1\setminus S(xy\in X(P_0^+))\}.$$

Очевидно, $|D|\geqslant|M_1\setminus S|$. Равенство $|D|=|M_1\setminus S|$ имеет место тогда и только тогда, когда P_0^+ является циклом и все ребра этого цикла имеют хотя бы по одной общей вершине с H^+, что противоречит выбору P_0^+. Следовательно, $|D|\geqslant|M_1\setminus S|+1$. Тогда

$$|M_1|\leqslant|M_1\setminus S|+|S\setminus D|\leqslant(|D|-1)+(k-|D|)\leqslant k-1.$$

С другой стороны, из $k(G)=k$ следует $|M_1|\geqslant k$. Полученное противоречие доказывает $E\neq\varnothing$. Пусть $x\in E$. По определению множества E существует ребро $xy\in X(P_0^+)$ такое, что $y\notin S$. Из $x\in M_1$ следует существование ребра xz такого, что $z\in T_1$. Без погери общности можем предполагать, что $x\notin P_0^+[v_1, y]$. Обозначим $l_1=P_0^+[v_1, y]$. Пусть цепь l_2 оцределяется подграфом $\|P_0^+[v_2, x]\|\cup\|xz\|$. Введем обозначения

$$\Omega_1(2)=\{(x, y)\in\Omega(2)/F(x)=v_1,\ \ L(x)\in V(H^+),\ F(y)=v_2,\ L(y)\in V(H^+)\},$$
$$\Omega_2(2)=\{(x, y)\in\Omega_1(2)/V(P_0^+)\subset V(x)\cup V(y),\ (V(x)\cup V(y))\cap S=V(P_0^+)\cap S\},$$
$$\Omega_3(2)=\{(x, y)\in\Omega_2(2)/\forall(x', y')\in\Omega_2(2)(|V(x')\cup V(y')|\leqslant|V(x)\cup V(y)|)\}.$$

По построению имеем $(l_1, l_2)\in\Omega_1(2)$. Тогда $\Omega_2(2)\neq\varnothing$ и $\Omega_3(2)\neq\varnothing$. Выберем $(R_1, R_2)\in\Omega_3(2)$. Через $Q\equiv\xi_1\xi_2\ldots\xi_n$ обозначим фиктивную цепь, которая определяется подграфом $\|R_1\|\cup\|R_2\|\cup\|v_1v_2\|$, где v_1v_2 — фиктивное ребро. По определению цепи Q_1 имеем

$$N(\xi_1)\subseteq V(Q_1)\cup S,\quad N(\xi_n)\subseteq V(Q_1)\cup S. \tag{17}$$

Обозначим

$$d_1=|N(\xi_1)\cap V(Q_1)|,\quad d_2=|N(\xi_n)\cap V(Q_1)|.$$

Покажем, что

$$d_1+d_2\geqslant|V(Q_1)|+1.$$

Допустим, что $\Delta_1=\Delta$. Если $\beta\leqslant k-3$, то $\Delta=k-\beta$, и в силу (17) и (9)

$$d_1+d_2\geqslant|N(\xi_1)|+|N(\xi_2)|-2|S\setminus V(Q_1)|\geqslant 2\delta-2(k-\Delta)=$$
$$=2\delta-2\beta=(2\delta-k-1-\beta)+(k-\beta)+1=|V(H^+)|+\Delta_1+1\geqslant|V(Q_1)|+1.$$

Если же $\beta\geqslant k-2$ (т. е. $\beta-k+2\geqslant 0$), то $\Delta=2$ и, следовательно,

$$d_1+d_2\geqslant 2\delta-2(k-\Delta)=(2\delta-k-1-\beta)+\Delta+1+(\beta-k+2)\geqslant$$
$$\geqslant|V(H^+)|+\Delta_1+1\geqslant|V(Q_1)|+1.$$

Пусть теперь $\Delta_1<\Delta$. Если для некоторой вершины $\xi\in S\setminus V(Q_1)$ имеет место $\xi_1\xi\in X(G)$, $\xi_n\xi\in X(G)$, то цепь, которая определяется подграфом $\|R_1\|\cup\|R_2\|\cup\|\xi_1\xi\|\cup\|\xi_n\xi\|$, ввиду $\Delta_1<\Delta$ противоречит определению множества A_3^+. Если же $\xi_1\xi\notin X(G)$ или $\xi_n\xi\notin X(G)$ для любого $\xi\in S\setminus V(Q_1)$, то

$$d_1+d_2\geqslant 2\delta-(k-\Delta_1)=(2\delta-k-1-\beta)+\Delta_1+1+\beta\geqslant$$
$$\geqslant|V(H^+)|+\Delta_1+1\geqslant|V(Q_1)|+1,$$

чем и доказывается (18). Тогда по лемме 6 (здесь $\varepsilon=1$) существуют различные числа i_1, i_2 такие, что для $i=i_1, i_2$ имеет место $\xi_1\xi_{i+1}\in X(G)$, $\xi_n\xi_i\in X(G)$. Так как одна из вершин ξ_{i_1}, ξ_{i_2} (скажем ξ_{i_1}) отлична от v_1, то цепь P_1^+, которая определяется подграфом $(\|R_1\|\cup\|R_2\|\cup\|\xi_1\xi_{i_1+1}\|\cup$ $\cup\|\xi_n\xi_{i_1}\|-\xi_{i_1}\xi_{i_1+1}$, противоречит определению множестви A_3^+. Этим доказано (16).

Покажем

$$V(H^-)\subseteq V(P^-). \tag{19}$$

Допустим (19) неверно. Тогда аналогично построению Q_1 можем построить некоторую максимальную цепь Q_2 с фиктивным ребром v_1v_2, удовлетворяющую условиям

$$F(Q_2)\in V(H^-),\quad L(Q_2)\in V(H^-),$$
$$V(P^-)\subset V(Q_2),\quad V(P^-)\cap S=V(Q_2)\cap S.$$

Обозначим

$$Q_2=\eta_1\eta_2\ldots\eta_m,\quad d_3=|N(\eta_1)\cap V(Q_2)|,\quad d_4=|N(\eta_m)\cap V(Q_2)|.$$

По определению цепи P^- имеем

$$d_3'+d_4'\geqslant 2\delta-2(\Delta_1-2)-(k-\Delta_2')=(2\delta-2k+1+\beta-\gamma)+(\Delta_2-\Delta_1'+2)+1+$$
$$+(k-\Delta_1-\beta+\gamma)\geqslant|V(H^-)|+|V(Q_2)\cap S|+1+\rho=|V(Q_2)|+1+\rho,$$

где $\rho=k-\Delta_1-\beta+\gamma\geqslant k-\Delta-\beta+\gamma$. Если $\beta\leqslant k-3$, то $\Delta=k-\beta$ и, следовательно, $\rho\geqslant\gamma\geqslant 0$. Если же $\beta\geqslant k-2$, то $\Delta=2$, откуда $\Delta_1=2$. Тогда в силу (10) имеем $\rho=k-2-(\beta-\gamma)\geqslant 0$. Таким образом, $d_3+d_4\geqslant|V(Q_2)|+1$. По лемме 6 для некоторого числа i_3 имеет место $\eta_1\eta_{i_3+1}\in X(G)$, $\eta_m\eta_{i_3}\in X(G)$, где $\eta_{i_3}\neq v_1$. Тогда цепь, которая определяется подграфом

$$((\|Q_2\|\cup\|\eta_1\eta_{i_3+1}\|\cup\|\eta_m\eta_{i_3}\|)-\eta_{i_3}\eta_{i_3+1})-v_1v_2,$$

противоречит определению множества A_5^-. Этим доказывается (19).

Покажем

$$V(H^+)\subseteq V(P^+). \tag{20}$$

Допустим, что (20) неверно. Тогда аналогично построению Q_1 можем построить некоторую максимальную цепь Q_3 с фиктивным ребром v_1v_2, удовлетворяющую условиям

$$F(Q_3)\in V(H^+),\quad L(Q_3)\in V(H^+),$$
$$V(P^+)\subset V(Q_3),\ V(Q_3)\cap S=V(P^+)\cap S.$$

Обозначим

$$d_5=|N(F(Q_3))\cap V(Q_3)|,\quad d_6=|N(L(Q_3))\cap V(Q_3)|.$$

Если $|V(P^+)\cap S|\leqslant\Delta$, то из определения цепи P_0^+ следует $P^+=P_0^+$, откуда получим (20). Пусть $|V(P^+)\cap S|\geqslant\Delta+1$. Тогда

$$d_5+d_6\geqslant 2\delta-2|S\setminus V(P^+)|=2\delta-2(|S|-|V(P^+)\cap S|)\geqslant$$
$$\geqslant(2\delta-k-1-\beta)+|V(P^+)\cap S|+1+(\beta-k+\Delta+1)\geqslant|V(Q_3)|+1+(\beta-k+\Delta+1).$$

Рассмотрим число $\theta=\beta-k+\Delta+1$. Если $\beta\leqslant k-3$, то $\Delta=k-\beta$ и, следовательно, $\theta=1$. Если же $\beta\geqslant k-2$, то $\Delta=2$ и, следовательно, $\theta\geqslant(\beta-k+2)+1\geqslant 1$. Таким образом, $\theta\geqslant 1$, откуда следует $d_5+d_6\geqslant$ $\geqslant|V(Q_3)|+1$. Тогда аналогично построению цепи P_1^+ можем построить цепь, которая противоречит определению множества A_5^+. Этим доказывается (20).

Подграф $\|P^+\|\cup\|P^-\|$ определяет некоторый простой цикл C. Покажем

$$S\subseteq V(C). \tag{21}$$

Допустим, что (21) неверно. Через T_2 обозначим компоненту связности подграфа $\langle S\setminus V(C)\rangle$. Пусть $N(V(T_2))=\{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_\tau\}$. В силу (19) и (20) имеем $N(V(T_2))\subseteq V(C)$. Без потери общности можем предполагать, что $V(C[\gamma_i,\gamma_{i+1}])\cap\{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_\tau\}=\{\gamma_i,\gamma_{i+1}\}$ для всех $i=1,2,\ldots,\tau-1$. Из $k(G)=k$ следует $\tau\geqslant k$. Так как T_2-связен, то для любого $i\in\overline{1,\tau}$ существует цепь Z_i, такая, что

$$F(Z_i)=\gamma_i,\ L(Z_i)=\gamma_{i+1},\ V(Z_i)\setminus\{\gamma_i,\gamma_{i+1}\}\subseteq V(T_2),$$

где $\gamma_{\tau+1}=\gamma_1$. Обозначим $(V(C[\gamma_s,\gamma_{s+1}])\setminus\{\gamma_s,\gamma_{s+1}\})\cap S=W_s$, где $s\in$ $\in\overline{1,\tau}$. Если $\{\gamma_s,\gamma_{s+1}\}\subseteq V(P^-)$ и $W_s=\varnothing$, то цепь, которая определяется подграфом $\|C[\gamma_{s-1}, \gamma_s]\| \cup \|Z_s\|$, противоречит определению множества B_2^+. Следовательно, $W_s \neq \varnothing$. Аналогично, $W_s \neq \varnothing$, если $\{\gamma_s, \gamma_{s+1}\} \subseteq V(P^+)$. Если же $\gamma_s \in V(P^-)$, $\gamma_{s+1} \in V(P^+)$ или $\gamma_s \in V(P^+)$, $\gamma_{s+1} \in V(P^-)$, то условие $W_s \neq \varnothing$ очевидно выполняется, поскольку либо $v_1 \in W_s$, либо $v_2 \in W_s$. Таким образом, $W_s \neq \varnothing$ для всех $s=\overline{1,\tau}$, т. е. $|V(C) \cap S| \geqslant \tau \geqslant k$. Отсюда $k=|S| \geqslant |V(C) \cap S| + |V(T_2)| \geqslant k+1$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает (21).

Из соотношений (19), (20) и (21) следует, что C есть гамильтонов цикл графа G.

Случай 2. Либо $|V(H^+)| \geqslant 2\delta - k$, либо $|V(H^-)| \geqslant 2\delta - k$.

Без потери общности можем предполагать, что $|V(H^+)| \geqslant 2\delta - k$. Из (1) следует $v \leqslant 4\delta - 2k$, откуда в силу $|V(H^+)| \geqslant 2\delta - k$

$$|V(H^-)| = v - k - |V(H^+)| \leqslant 2\delta - 2k. \tag{22}$$

Без потери общности можем предполагать также, что H^- состоит из одной компоненты связности, т. е. $H^- = G_l$. Так как $\delta \geqslant \alpha$, то при $\delta \geqslant (v+2)/3$ граф G—гамильтонов [5]. Следовательно, достаточно рассматривать случай

$$\delta \leqslant (v+1)/3. \tag{23}$$

Обозначим

$$\Omega^+ = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \Omega^+_\alpha /$$
$$/ \forall (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \Omega^+_\alpha \Big(\sum_{i=1}^{n} |V(y_i)| \leqslant \sum_{i=1}^{m} |V(x_i)| \Big) \Big\}.$$

Поскольку $P[1,1,1] \in \Omega^+_\alpha$, то $\Omega^+ \neq \varnothing$. Выберем произвольный $(L_1^+, L_2^+, \ldots, L_m^+) \in \Omega^+$. Обозначим $X^+ = \bigcup_{i=1}^{m} X(L_i^+)$. Без потери общности можем предполагать, что

$$F(L_i^+) = v_{2i-1}, \quad L(L_i^+) = v_{2i}, \quad i=\overline{1,m}.$$

Введем фиктивные ребра $v_{2i}v_{2i+1}$, $i=\overline{1,m-1}$. Подграф $\bigcup_{i=1}^{m} \|L_i^+\| \cup \bigcup_{i=1}^{m-1} \|v_{2i}v_{2i+1}\|$ определяет некоторую простую фиктивную цепь $L^+ \in \Omega^+(1)$. Пусть $L^+ = x_1 x_2 \ldots x_s$ и пусть $s=(x_1, x_2, \ldots, x_s)$—перестановка множества $V(L^+)$.

Случай 2.1. $V(H^+) \setminus V(L^+) \neq \varnothing$.

Через P^0 обозначим максимальную цепь подграфа $\langle V(H^+) \setminus V(L^+) \rangle$. Покажем, что

$$|V(P^0)| \leqslant \delta - k. \tag{24}$$

Пусть C^0—длиннейший цикл графа G. При $|V(C^0)| = v$ граф G—гамильтонов. Пусть $|V(C^0)| < v$. Так как $k \geqslant 3$, то $|V(C^0)| \geqslant 3\delta - k$ (см. [4]). Если $V(C^0) \subseteq V(H^+) \cup S$, то в силу (6) имеем

$$v \geqslant |V(C^0)|+|V(G_i)| \geqslant (3\delta-k)+\delta-k+1 \geqslant (4\delta-2k)+1,$$

что противоречит условию (1). Если же $V(C^0) \subseteq V(H^-) \cup S$, то

$$v \geqslant |V(C^0)|+|V(H^+)| \geqslant (3\delta-k)+(2\delta-k) \geqslant (4\delta-2k)+\delta,$$

что также противоречит (1). Таким образом, C^0 имеет общие вершины как с H^+, так и с H^-. Часть цикла C^0, лежащая в подграфе $H^+ \cup \cup S$, представляет собой объединение некоторых простых цепей L^+_{11}, $L^+_{12}, \ldots, L^+_{1n}$ $(n \geqslant 1)$. Очевидно, что $(L^+_{11}, L^+_{12}, \ldots, L^+_{1n}) \in \Omega^+_{\lambda}$. По определению цепей $L^+_1, L^+_2, \ldots, L^+_m$ имеем

$$|V(P^0)| \leqslant |V(H^+) \cup S| - |V(L^+)| \leqslant$$

$$\leqslant |V(H^+) \cup S| - |\bigcup_{i=1}^{n} (L^+_{1i})| \leqslant v - |V(C^0)| \leqslant 4\delta - 2k - (3\delta - k) \leqslant \delta - k,$$

что доказывает (24). Введем обозначения

$$|V(P^0)|=q, \quad F(P^0)=\varphi, \quad L(P^0)=\psi,$$

$$Z_1 = N(\varphi) \cap V(L^+), \quad Z_2 = N(\psi) \cap V(L^+),$$

$$\tilde{Z}_1 = N(\varphi) \cap V(P^0), \quad \tilde{Z}_2 = N(\psi) \cap V(P^0).$$

Пусть $L^+_0 = x_\nu x_{\nu+1} \ldots x_\pi$ $(1 \leqslant \nu < \pi \leqslant \sigma)$ — минимальная подцепь цепи L^+ такая, что $Z_1 \cup Z_2 \subseteq V(L^+_0)$. Если для некоторого $l_0 (1 \leqslant l_0 \leqslant \sigma - 1)$ имеет место $\{x_{l_0}, x_{l_0+1}\} \subseteq Z_1$, то цепь $x_1 x_2 \ldots x_{l_0} \varphi x_{l_0+1} x_{l_0+2} \ldots x_\sigma$ без фиктивных ребер порождает семейство цепей, которое противоречит определению множества Ω^+. Следовательно, Z_1 является независимым множеством в подграфе $\|L^+_0\|$. Аналогично, Z_2 — независимое множество в $\|L^+_0\|$.

Случай 2.1.1. $q=1$ (т. е. $Z_1 = Z_2$).

Пусть $\xi_1, \xi_2 \in s^1(Z_1 \setminus \{x_\sigma\})$. Если $\xi_1 \xi_2 \in X(G)$, то множество вершин $V(L^+) \cup \{\varphi\}$ и множество ребер

$$(X^+ \cup \{s^{-1}(\xi_1)\varphi, s^{-1}(\xi_2)\varphi, \xi_1\xi_2\}) \setminus \{s^{-1}(\xi_1)\xi_1, s^{-1}(\xi_2)\xi_2\}$$

определяют семейство цепей, которое противоречит Ω^+. Следовательно, $s^1(Z_1 \setminus \{x_\sigma\}) \cup \{\varphi\}$ — независимое множество. Нетрудно заметить, что множество $s^1(Z_1) \cup \{\varphi\}$ является независимым при $m \geqslant 2$.

Случай 2.1.1.1. $m \geqslant 2$.

Если $|Z_1| \geqslant \delta$, то $s_1(Z_1) \cup \{\varphi\}$ является $\geqslant(\delta+1)$-вершинным независимым множеством, что противоречит $\delta \geqslant \alpha$. Пусть $|Z_1| \leqslant \delta - 1$. Если $|Z_1| \leqslant \delta - 2$, то из $|N(\varphi)| \geqslant \delta$ следует существование различных вершин ξ_1, ξ_2 из $N(\varphi) \cap (S \setminus V(L^+))$. Тогда семейство $L^+_1, L^+_2, \ldots, L^+_m, \xi_1 \varphi \xi_2$ противоречит Ω^+. Следовательно, $|Z_1| = \delta - 1$. Так как $|N(\varphi)| \geqslant \delta$, то существует вершина $\xi \in N(\varphi) \cap (S \setminus V(L^+))$. Рассмотрим некоторую вершину $\eta \in Z_1$. Если $\eta \in \{v_1, v_2, \ldots, v_{2m}\}$ $(s^1(\eta) \in \{v_1, v_2, \ldots, v_{2m}\})$, то множество вершин $V(L^+) \cup \{\varphi, \xi\}$ и множество ребер $(X^+ \cup \{\eta\varphi, \varphi\xi\})$ (соответственно множество вершин $(V(L^+) \cup \{\varphi, \xi\}) \setminus \{s^1(\eta)\}$ и множество ребер $(X^+ \cup \{\eta\varphi, \varphi\xi\}) \setminus \{s^1(\eta)\eta\}$) определяют семейство цепей, которое противоречит Ω^+. Следовательно, $\{s^1(\eta), \eta\} \cap \{v_1, v_2, \ldots, v_{2m}\} = \varnothing$. Отсюда следует, что если $s^1(\eta)\in S$, то множество вершин $V(L^+)\cup\{\varphi, \xi\}$ и множество ребер $(X^+\cup\{\eta\varphi, \varphi\xi\})\setminus\{s^1(\eta)\eta\}$ определяют семейство цепей, которое противоречит Ω^+. Поэтому $s^1(\eta)\notin S$ (т. е. $s^1(\eta)\in V(H^+)$) для любого $\eta\in Z_1$. Тогда любая вершина $\mu\in V(H^-)$ не имеет смежных вершин в $s^1(Z_1)\cup\{\varphi\}$. Таким обризом, $s^1(Z_1)\cup\{\varphi, \mu\}$ есть $(\delta+1)$-вершинное независимое множество, что противоречит $\delta\geqslant\alpha$.

Случай 2.1.1.2. $m=1$.

Если $\varphi v_2\notin X(G)$ или $\varphi v_1\notin X(G)$, то рассуждения можно провести аналогично случаю $m\geqslant 2$, причем в случае $\varphi v_1\notin X(G)$ вместо перестановки s необходимо рассматривать перестановку $(x_\sigma, x_{\sigma-1}, \ldots, x_1)$. Пусть $\varphi v_1\in X(G)$, $\varphi v_2\in X(G)$. Если $\varphi\xi\in X(G)$ для некоторого $\xi\in S\setminus V(L^+)$, то цепь $x_1 x_2 \ldots x_\sigma\varphi\xi$ противоречит Ω^+, следовательно, $|Z_1|=|N(\psi)|\geqslant\delta$. Рассмотрим любую вершину $\eta\in Z_1\setminus\{v_2\}$. Если $s^1(\eta)\in S$, то множество вершин $V(L^+)\cup\{\varphi\}$ и множество ребер $(X\cup\{\eta\varphi, v_2\varphi\})\setminus\{s^1(\eta)\eta\}$ определяют цепь, которая противоречит Ω^+. Поэтому $s^1(\eta)\notin S$. Тогда для любого $\mu\in V(H^-)$ множество $s^1(Z_1\setminus\{v_2\})\cup\{\varphi, \mu\}$, содержащее $\geqslant(\delta+1)$ вершин, является независимым, что противоречит $\delta\geqslant\alpha$.

Случай 2.1.2. $q\geqslant 2$.

Если $|N(\varphi)|\geqslant|Z_1|+|\hat{Z}_1|+2$, то $|N(\varphi)\cap(S\setminus V(L^+))|\geqslant 2$, что противоречит определению цепи L^+ (см. случай 2.1.1.1 при $|Z_1|\leqslant\delta-2$). Аналогично приходим к протоворечию при $|N(\psi)|\geqslant|Z_2|+|\hat{Z}_2|+2$. Следовательно,

$$|N(\varphi)|\leqslant|Z_1|+|\hat{Z}_1|+1, \quad |N(\psi)|\leqslant|\hat{Z}_2|+|Z_2|+1. \tag{25}$$

Допустим, что $|N(\varphi)|=|Z_1|+|\hat{Z}_1|+1$. Тогда существует вершина $\xi\in S\setminus V(L^+)$ такая, что $\varphi\xi\in X(G)$. Если $\pi\geqslant\sigma-1$ и $x_\pi\in N(\psi)$, то множество вершин $\{x_1, x_2, \ldots, x_\pi\}\cup V(P^0)\cup\{\xi\}$ и множество ребер $(X^+\cup \cup X(P^0)\cup\{\varphi\xi, \psi x_\pi\})\setminus\{x_\pi x_{\pi+1}\}$ определяют семейство цепей, которое противоречит Ω^+. Если $\pi\geqslant\sigma-1$ и $x_\pi\in N(\varphi)$, то множество вершин $\{x_1, x_2, \ldots, x_\pi\}\cup\{\varphi, \xi\}$ и множество ребер $(X^+\cup\{x_\pi\varphi, \varphi\xi\})\setminus\{x_\pi x_{\pi+1}\}$ определяют семейство цепей, которое также противоречит Ω^+. Отсюда следует, что при $|N(\varphi)|=|Z_1|+|\hat{Z}_1|+1$ имеет место $\pi\leqslant\sigma-2$. Аналогично, при $|N(\varphi)|=|Z_1|+|\hat{Z}_1|+1$ имеем $\nu\geqslant 3$. Следовательно, в случае $|N(\varphi)|=|Z_1|+|\hat{Z}_1|+1$ имеем $|V(L^+)|\geqslant|V(L_0^+)|+4$. В силу симметрии неравенство $|V(L^+)|\geqslant|V(L_0^+)|+4$ выполняется также при $|N(\psi)|=|Z_2|+ +|\hat{Z}_2|+1$. Таким образом,

$$\left.\begin{array}{l}\text{если}\quad |N(\varphi)|=|Z_1|+|\hat{Z}_1|+1 \text{ или } |N(\psi)|=|Z_2|+|\hat{Z}_2|+1,\\ \text{то}\quad |V(L^+)|\geqslant|V(L_0^+)|+4.\end{array}\right\} \tag{26}$$

Случай 2.1.2.1. $|\hat{Z}_1|+|\hat{Z}_2|\leqslant q$.

Если $|N(\varphi)|\leqslant|Z_1|+|\hat{Z}_1|$ и $|N(\psi)|=|Z_2|+|\hat{Z}_2|$, то

$$|Z_1|+|Z_2|\geqslant|N(\varphi)|+|N(\psi)|-(|\hat{Z}_1|+|\hat{Z}_2|)\geqslant 2\delta-q. \tag{27}$$

Если же $|N(\varphi)|=|Z_1|+|\hat{Z}_1|+1$ или $|N(\psi)|=|Z_2|+|\hat{Z}_2|+1$, то в силу (26)

$$|Z_1|+|Z_2|\geqslant 2\delta-q-2,\quad |V(L^+)|\geqslant|V(L_0^+)|+4. \tag{27a}$$

Таким образом, имеет место либо (27), либо (27a).

Очевидно, что $|\hat{Z}_1|\leqslant q-1$. Тогда в силу (24) и (25) имеем $|Z_1|\geqslant|N(\varphi)|-|\hat{Z}_1|-1\geqslant\delta-(q-1)-1=\delta-|V(P^0)|\geqslant k\geqslant 3$. Аналогично, $|Z_2|\geqslant 3$. Тогда можем выбирать вершины x_i, x_j такие, что $i<j$, $x_i\in Z_1$, $x_j\in Z_2$. Если $|V(L_0^+[x_i, x_j])|\leqslant q+1$, то множество вершин $\{x_1, x_2, \ldots, x_i, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_s\}\cup V(P_0)$ и множество ребер $(X^+\cup X(P_0)\cup\{x_i\varphi, x_j\psi\})\setminus X(L^+[x_i, x_j])$ определяют семейство цепей, которое пуотиворечит Ω^+. Следовательно, для любых $\xi\in Z_1$, $\eta\in Z_2(\xi\neq\eta)$ имеет место $d_{L_0^+}(x_i, x_j)\geqslant q+1$, т. е. (Z_1, Z_2) есть нетривиальная $(L_0^+, q+1)$—схема. По лемме 4

$$|Z_1|+|Z_2|\leqslant \max\left(\frac{|V(L_0^+)|-q+4}{2},\ \frac{2(|V(L_0^+)|+q)}{q+1}\right). \tag{28}$$

Если имеет место (27), то из (28) ввиду $|V(L_0^+)|\leqslant|V(L^+)|$

$$2\delta\leqslant\max\left(\frac{|V(L^+)|+q+4}{2},\ \frac{2|V(L^+)|+q^2+3q}{q+1}\right). \tag{29}$$

Если же имеет место (27a), то из (28) получим

$$2\delta\leqslant\max\left(\frac{|V(L^+)|+q+4}{2},\ \frac{2|V(L^+)|+q^2+5q-6}{q+1}\right). \tag{29a}$$

Таким образом, имеет место либо (29), либо (29a).

С помощью (1) и (6) получим

$$q+|V(L^+)|\leqslant|V(H^+)|+|S|=v-|V(H^-)|\leqslant 4\delta-2k-(\delta-k+1)=3\delta-k-1,$$

откуда

$$|V(L^+)|\leqslant 3\delta-k-q-1. \tag{30}$$

Случай 2.1.2.1.1. $2\delta\leqslant(|V(L^+)|+q+4)/2$.

Из $2\delta\leqslant(|V(L^+)|+q+4)/2$ следует $|V(L^+)|\geqslant 4\delta-q-4$. Учитывая (30) получим $3\delta-k-q-1\geqslant 4\delta-q-4$, откуда $\delta\leqslant 3-k\leqslant 0$, что невозможно, поскольку $\delta\geqslant k\geqslant 3$.

Случай 2.1.2.1.2. $2\delta>(|V(L^+)|+q+4)/2$.

Если $q=2$, то из $2\delta>(|V(L^+)|+q+4)/2$ и из (29), (29a) получим $2\delta\leqslant(2|V(L^+)|+10)/3$. Отсюда и из (30) имеем $6\delta-10\leqslant|V(L^+)|\leqslant 3\delta-k-3$, т. е. $\delta\leqslant(7-k)/3\leqslant 2$, что невозможно. Следовательно, $q\geqslant 3$, т. е. $5q-6\geqslant 3q$. Тогда из $2\delta>(|V(L^+)|+q+4)/2$ и из (29), (29a)

$$2\delta\leqslant\frac{2|V(L^+)|+q^2+5q-6}{q+1},$$

откуда $|V(L^+)|\geqslant\delta(q+1)-(q^2+5q-6)/2$. Ввиду (30) $3\delta-k-q-1\geqslant\delta(q+1)-(q^2+5q-6)/2$, откуда

$$\delta(q-2)\leqslant\frac{(q-2)(q-1)}{2}-(k+5)\leqslant\frac{(q-2)(q-1)}{2}.$$

Так как $q \geqslant 3$, т. е. $q-2 \neq 0$, то в силу (24) $\delta \leqslant (q-1)/2 \leqslant (\delta-k-1)/2$, откуда $\delta \leqslant -k-1$, что невозможно.

Случай 2.1.2.2. $|\hat{Z}_1|+|\hat{Z}_2| \geqslant q+1$.

Неравенство $|\hat{Z}_1|+|\hat{Z}_2| \geqslant q+1$ в случае $q=2$ не выполняется, следовательно, $q \geqslant 3$. Из $|\hat{Z}_1|+|\hat{Z}_2| \geqslant q+1$ следует существование вершины $\mu \in V(P^0)$ ($\mu \neq \varphi$, $\mu \neq \psi$), удовлетворяющей условию леммы 5 для цепи P^0. Тогда легко заметить, что любая пара вершин из $\{\varphi, \psi, \mu\}$ в подграфе $\langle V(H^+) \setminus V(L^+) \rangle$ соединена простой q-вершинной цепью. Пусть $Z_3 = N(\mu) \cap V(L^+)$, $\hat{Z}_3 = N(\mu) \cup V(P^0)$. Тройка (Z_1, Z_2, Z_3) очевидно является $(L_0^+, q+1)$-схемой. Аналогично неравенствам $|Z_1| \geqslant 3$, $|Z_2| \geqslant 3$ получим $|Z_3| \geqslant 3$. Тогда по лемме 3

$$|Z_1|+|Z_2|+|Z_3| \leqslant \max\left(\frac{|V(L_0^+)|-2q+10}{2},\ \frac{3(|V(L_0^+)|+q)}{q+1}\right). \tag{31}$$

Аналогично (26) имеем

$$\text{если } |N(\mu)| = |Z_3|+|\hat{Z}_3|+1, \text{ то } |V(L^+)| \geqslant |V(L_0^+)|+4. \tag{26a}$$

Если имеет место $|N(\varphi)| \leqslant |Z_1|+|\hat{Z}_1|$, $|N(\psi)| \leqslant |Z_2|+|\hat{Z}_2|$ и $|N(\mu)| \leqslant |Z_3|+|\hat{Z}_3|$, то ввиду $|\hat{Z}_1| \leqslant q-1$, $|\hat{Z}_2| \leqslant q-1$ и $|\hat{Z}_3| \leqslant q-1$ имеем

$$|Z_1|+|Z_2|+|Z_3| \geqslant |N(\varphi)|+|N(\psi)|+|N(\mu)|-(|\hat{Z}_1|+|\hat{Z}_2|+|\hat{Z}_3|) \geqslant 3\delta-3q+3.$$

Тогда из (31) ввиду $|V(L_0^+)| \leqslant |V(L^+)|$ получим

$$3\delta \leqslant \max\left(\frac{|V(L^+)|+4q+4}{2},\ \frac{3|V(L^+)|+3q^2+3q-3}{q+1}\right). \tag{32}$$

Если же имеет место либо $|N(\varphi)| = |Z_1|+|\hat{Z}_1|+1$, либо $|N(\psi)| = |Z_2|+|\hat{Z}_2|+1$, либо $|N(\mu)| = |Z_3|+|\hat{Z}_3|+1$, то в силу (26), (26a) и (31) имеем $|V(L^+)| \geqslant |V(L_0^+)|+4$ и $|Z_1|+|Z_2|+|Z_3| \geqslant 3\delta-3q$. Тогда из (31) получим

$$3\delta \leqslant \max\left(\frac{|V(L^+)|+4q+6}{2},\ \frac{3|V(L^+)|+3q^2+6q-12}{q+1}\right). \tag{32a}$$

Таким образом, имеет место либо (32), либо (32a).

Неравенство $q \geqslant 3$ равносильно $6q-12 \geqslant 3q-3$. Следовательно, из (32) и (32a) следует

$$3\delta \leqslant \max\left(\frac{|V(L^+)|+4q+6}{2},\ \frac{3|V(L^+)|+3q^2+6q-12}{q+1}\right). \tag{33}$$

Если $3\delta \leqslant (|V(L^+)|+4q+6)/2$, то ввиду (30) имеем $6\delta-4q-6 \leqslant |V(L^+)| \leqslant 3\delta-k-q-1$, откуда в силу (24) $3\delta \leqslant 3q-k+5 \leqslant (3\delta-3k)-k+5 = 3\delta-4k+5$, т. е. $k \leqslant 5/4$, что невозможно. Следовательно, $3\delta > (|V(L^+)|+4q+6)/2$. Ввиду (33)

$$3\delta \leqslant \frac{3|V(L^+)|+3q^2+6q-12}{q+1},$$

откуда $|V(L^+)|\geqslant\delta(q+1)-q^2-2q-4$. Учитывая также (30) получим $3\delta-k-q-1\geqslant\delta(q+1)-q^2-2q+4$. Отсюда в силу $q-2\neq 0$ и (24) имеем $\delta\leqslant q+3+(1-k)/(q-2)\leqslant\delta-k+3+(1-k)/(q-2)$, т. е. $k-3\leqslant(1-k)/(q-2)\leqslant -2/(q-2)$, что невозможно.

Случай 2.2. $V(H^+)\setminus V(L^+)=\varnothing$.

Введем обозначения

$$\Omega^-=\{\hat{x}\in\Omega^-_\alpha/\exists\hat{y}\in\Omega^+((\hat{x},\hat{y})\in\Omega^{+-})\}.$$

Покажем, что $\Omega^-\neq\varnothing$. Из (1) и (23) следует $3\delta-1\leqslant v\leqslant 4\delta-2k$, откуда $\delta-k+1\geqslant k$. Тогда в силу (6)

$$|V(H^-)|\geqslant|V(G_t)|\geqslant\delta-k+1\geqslant k. \tag{34}$$

Обозначим $N_i=N(v_i)\cap V(H^-)$, $i=\overline{1,k}$. В силу (8) имеем $N_i\neq\varnothing$, $i=\overline{1,k}$. Если множества N_i не имеют систему различных представителей, то по теореме Холла [7] существует подмножество $\{i_1, i_2, \ldots, i_z\}\subseteq\{1, 2, \ldots, k\}$ такое, что $|\bigcup_{j=1}^{z} N_{i_j}|<z$. Тогда ввиду (34) $(S\setminus\{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_z}\})\cup(\bigcup_{j=1}^{z} N_{i_j})$ является $\leqslant(k-1)$-вершинным разделяющим множеством, что противоречит k-связности графа G. Следовательно, множества $N_1, N_2, \ldots, N_k$ имеют систему различных представителей. Тогда в частности существует множество вершин $\{v'_1, v'_2, \ldots, v'_{2m}\}\subseteq\subseteq V(H^-)$ такое, что $v'_i v_i\in X(G)$, $i=\overline{1, 2m}$. Введем два множества фиктивных ребер

$$R^-=(\bigcup_{i=1}^{m-1}\{v'_{2i}v'_{2i+1}\})\cup\{v'_{2m}v'_1\},\quad R^0=\bigcup_{i=1}^{m}\{v_{2i-1}v_{2i}\}.$$

Рассмотрим граф G' с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $R^-\cup R^0\cup X(G)$. Через W обозначим множество простых циклов C графа G', удовлетворяющих условиям

$$V(C)\subseteq V(H^-)\cup S,\quad V(C)\cap V(L^+)=\{v_1, v_2, \ldots, v_{2m}\},\quad R^0\subseteq X(C).$$

Множество вершин $\{v_1, v_2, \ldots, v_{2m}\}\cup\{v'_1, v'_2, \ldots, v'_{2m}\}$ и множество ребер $R^-\cup R^0\cup(\bigcup_{i=1}^{2m}\{v_i v'_i\})$ определяют простой цикл графа G', принадлежащий W, т. е. $W\neq\varnothing$. Обозначим

$$W^1=\{x\in W/\forall y\in W(|X(x)\cap R^-|\leqslant|X(y)\cup R^-|)\},$$
$$W^2=\{x\in W^1/\forall y\in W^1(|V(x)|\geqslant|V(y)|)\}.$$

Из $W\neq\varnothing$ следует $W^2\neq\varnothing$. Выберем произвольный $C^-\in W^2$. Множество вершин $V(C^-)$ и множество ребер $X(C^-)\setminus R^0$ определяют в графе G' некоторое семейство цепей $L^-_1, L^-_2, \ldots, L^-_m$. Покажем, что

$$X(C^-)\cap R^-=\varnothing,\quad V(H^-)\subseteq\bigcup_{i=1}^{m} V(L^-_i). \tag{35}$$

Допустим, что (35) не имеет места. Если $X(C^-)\cap R^-\neq\varnothing$, то существует цепь $x=Q_1$, удовлетворяющая условиям

$$\left.\begin{array}{l} F(x)\in V(H^-),\ L(x)\in V(H^-),\ V(x)\subseteq V(H^-)\cup S \\ V(x)\cup V(L^+)=\{v_1, v_2, \ldots, v_{2m}\} \end{array}\right\} \qquad (36)$$

и условию $V(x)\subseteq V(C^-)$ (удаление любого элемента R^- из C^- порождает цепь, которая содержится в Q_1). Если же $V(H^-)\not\subseteq\bigcup_{l=1}^{m} V(L_l^-)$, то существует цепь $x=Q_2$, удовлетворяющая условиям (36) и $V(x)\subset\subset V(C^-)$ (см. доказательство утверждения (16)). Пусть $Q=Q_1$, если $X(C^-)\cap R^-\neq\varnothing$ и $Q=Q_2$ в противном случае. Обозначим $Q=\xi_1\xi_2\ldots\xi_\omega$ и $|V(Q)\cap S|=\Delta'$. В силу (22)

$$|N(\xi_1)\cap V(Q)|+|N(\xi_\omega)\cap V(Q)|\geqslant 2\delta-2(k-\Delta')\geqslant(2\delta-2k)+2\Delta'\geqslant$$
$$\geqslant(|V(H^-)|+\Delta')+\Delta'\geqslant|V(Q)|+\Delta'.$$

По лемме 6 для графа G' существуют различные целые числа $i_1, i_2, \ldots, i_{\varepsilon+1}$, где $\varepsilon=\Delta'$, удовлетворяющие (5). Поскольку $|R^-\cup R^0|\leqslant\leqslant 2m-1$ и имеет место $\varepsilon+1=\Delta'-1\geqslant 2m+1$ (т. е. $\varepsilon\geqslant 2m$), то для некоторого числа среди $i_1, i_2, \ldots, i_{\varepsilon+1}$ (скажем для i_1) имеет место $\xi_{i_1}\xi_{i_1+1}\in X(G)\setminus X(G')$. Тогда множество вершин $V(Q)$ и множество ребер $X(Q)\cup\{\xi_1\xi_{i_1+1}, \xi_\omega\xi_{i_1}\}$ определяют некоторый цикл $C_1^-\in W$. Если $Q=Q_1$, то $|X(C_1^-)|<|X(C^-)|$, что противоречит определению W^1. Если же $Q=Q_2$, то $|X(C_1^-)|\leqslant|X(C^-)|$ и $|V(C_1^-)|>|V(C^-)|$, что противоречит W^2.

Таким образом, (35) выполняется, откуда $((L_1^+, L_2^+, \ldots, L_m^+), (L_1^-, L_2^-, \ldots, L_m^-))\in\Omega^{+-}$, т. е. $\Omega^-\neq\varnothing$ и $(L_1^-, L_2^-, \ldots, L_m^-)\in\Omega^-$.

Без потери общности можем предполагать, что для любых $\hat{x}==(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\hat{y}=(y_1, \ldots, y_n)$ таких, что $\hat{x}\in\Omega^+$, $(\hat{x}, \hat{y})\in\Omega^{+-}$, имеет место

$$|\bigcup_{l=1}^{m}(V(L_l^+)\cup V(L_l^-))|\geqslant|\bigcup_{l=1}^{n}(V(x_l)\cup V(y_l))|. \qquad (37)$$

Обозначим $X^-=\bigcup_{l=1}^{2m}X(L_l^-)$. Подграф $\bigcup_{l=1}^{2m}(\|L_l^+\|\cup\|L_l^-\|)$ определяет некоторый простой цикл C графа G.

Случай 2.2.1. $S\setminus V(C)\neq\varnothing$.

Пусть $w\in S\setminus V(C)$. По определению цепей $L_1^+, L_2^+, \ldots, L_m^+$ подграф $\langle S\setminus V(C)\rangle$ состоит из изолированных вершин. Следовательно, ввиду $V(H^+)\setminus V(L^+)=\varnothing$ (случай 2.2) и (35) $N(w)\subseteq V(C)$. Пусть $C=\eta_1\eta_2\ldots\eta_g$ и пусть $s=(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_g, \eta_1)$ — циклическая перестановка множества $V(C)$. Выберем два элемента $x, y\in N(w)$.

Случай 2.2.1.1. $s^1(x)s^1(y)\in X(G)$.

Случай 2.2.1.1.1. $x\in V(H^+)$, $y\in V(H^+)$.

Множество вершин $V(L^+)\cup\{w\}$ и множество ребер $(X^+\cup\cup\{s^1(x)s^1(y), wx, wy\})\setminus\{s^1(x)x, s^1(y)y\}$ определяют семейство цепей, которое противоречит Ω^+.

Случай 2.2.1.1.2. $x \in V(H^+)$, $y \in S$.

По определению цепей $L_1^+, L_2^+, \ldots, L_m^+$ подграф $\langle S \setminus V(L^+) \rangle$ состоит из изолированных вершин. Следовательно, если $y \in V(L^-)$ или $y \in \{v_1, v_2, \ldots, v_{2m}\}$, то множество вершин $V(L^+) \cup \{w, y\}$ и множество ребер $X^+ \cup \{wy\}$ определяют семейство цепей, которое противоречит Ω^+. Еели же $y \in V(L^+)$ и $y \notin \{v_1, v_2, \ldots, v_{2m}\}$, то рассуждения можно провести аналогично сзучаю 2.2.1.1.1.

Случай 2.2.1.1.3. $x \in V(H^+)$, $y \in V(H^-)$.

Если $s^1(y) \in S$, то множество вершин $V(L^+) \cup \{w\}$ и множество ребер $(X^+ \cup \{wx, s^1(x)s^1(y)\} \setminus \{s_1(x)x\}$ определяют семейство цепей, которое противоречит Ω^+. Пусть $s^1(y) \in V(H^-)$. Отсюда следует $s^1(x) \in S$. Если $s^1(x) \notin \{v_1, v_2, \ldots, v_{2m}\}$, то множество вершин $V(L^+) \cup \{w\}$ и множество ребер $(X^+ \cup \{wx\} \setminus \{s^1(x)x\}$ определяют семейство цепей, которое противоречит Ω^+. Пусуь $s^1(x) \in \{v_1, v_2, \ldots, v_{2m}\}$. Если $s^1(y) \in S$, то множество вершин $V(L^+) \cup \{w, s^1(y)\}$ и множество ребер $(X^+ \cup \cup \{wx, s^1(x)s^1(y)\}) \setminus s^1(x)x$ определяют элемент, который противоречит Ω^+. Пусть $s^1(y) \in V(H^-)$. Множество вершин $(V(L^+) \cup \{w\}) \setminus \{s^1(x)\}$ и множество ребер $(X^+ \cup \{wx\}) \setminus \{s^1(x)x\}$ определяют элемент из Ω^+, а множество вершин $\bigcup_{i=1}^{2m} V(L_i^-) \cup \{w\}$ и множество ребер $(X^- \cup \{wy, s^1(x)s^1(y)\}) \setminus \{s^1(y)y\}$ определяют элемент из Ω^-. Пара этих двух элементов противоречит условию (37).

Случай 2.2.1.1 4. $x \in S$, $y \in V(H^-)$.

Поскольку $x \notin \{v_1, v_2, \ldots, v_{2m}\}$ (см. случай 2.2.1.1.3) и $x \in S$, то $x \in V(L^+) \setminus \{v_1, v_2, \ldots, v_{2m}\}$. Остальные рассуждения можно провести аналогично случаю 2.2.1.1.3.

Случай 2.2.1.1.5. $x \in V(H^-)$, $y \in V(H^-)$.

Если $s^1(x) \in S$, $s^1(y) \in S$, то множество вершин $V(C) \cup \{w\}$ и множество ребер $(X^+ \cup X^- \cup \{wx, wy, s^1(x)s^1(y)\}) \setminus \{s^1(x)x, s^1(y)y\}$ определяют пару из Ω^{+-}, которая противоречит (37). Если же $s^1(x) \notin S$ или $s^1(y) \notin S$, то множество вершин $V(L^-) \cup \{w\}$ и множество ребер $R^\circ \cup (X^- \cup \{wx, wy, s^1(x)s^1(y)\}) \setminus \{s^1(x)x, s^1(y)y\}$ определяют цикл, который противоречит определению W^2.

Случай 2.2.1.2. $s^1(x)s^1(y) \notin X(G)$ для любых $x, y \in N(w)$.

Множество $s^1(N(w))$ по предположению является $\geqslant\delta$-вершинным независимым множеством. Если $s^1(x) \in N(w)$ для некоторого $x \in N(w)$, то это очевидно противоречит либо определению множеств Ω^+, либо множества W^2. Если же $s^1(x) \notin N(w)$ для любого $x \in N(w)$, то множеств $s^1(N(w)) \cup \{w\}$ является $\geqslant(\delta+1)$-вершинным независимым множеством, что невозможно.

Случай 2.2.2. $S \setminus V(C) = \varnothing$.

Из соотношений $S \setminus V(C) = \varnothing$, $V(H^+) \setminus V(L^+) = \varnothing$ (случай 2.2) и $V(H^-) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} V(L_i^-)$ (см. (35)) следует, что C есть гамильтонов цикл графа G.

Таким образом, описан эффективный (полиномиально-ограниченный) алгоритм, который в случае $k(G) \geqslant 3$, $\delta(G) \geqslant (v(G)+2k(G))/4$ либо строит гамильтонов цикл графа G, либо строит $\geqslant(\delta(G)+1)$-вершинное независимое множество вершин (вычисление вершинной связности можно найти в [8]). Теорема доказана.

Пусть 2-связный граф G^1 удалением двух вершин разлагается на три $(\delta-1)$-вершинные полные графы $(\delta\geqslant3)$. Очевидно, что G^1—негамильтонов и $\delta=\delta(G^1)=(v(G^1)+1)/3\geqslant(v(G^1)+2k(G^1))/4$, $\delta(G^1)\geqslant\geqslant\alpha(G^1)$, $k(G^1)=2$. Пример графа G^1 показывает, что утверждение теоремы для 2-связных графов неверно.

Рассмотрим гравы $G_1=K_{\delta-k}$, $G_2=\overline{K}_\delta$, $G_3=K_k$, $G_4=K_{2\delta-2k}$ попарно без общих вершин $(k\geqslant3)$. Граф, полученный из $(G_1+G_2)\cup(G_3+G_4)$ посредством добавления всевозможных ребер xy, где $x\in V(G_2)$, $y\in\in V(G_3)$, обозначим G^2. Так как удаление δ-вершинного множества $V(G_1\cup G_3)$ из G^2 порождает $\delta+1$ компонент связности, то G^2—негамильтонов. Очевидно, что $\delta=\delta(G^2)=((v(G^2)+2k(G^2))/4=\alpha(G^2)-1$. Пример графа G^2 показывает, что в формулировке теоремы замена неравенства $\delta(G)\geqslant\alpha(G)$ через $\delta(G)\geqslant\alpha(G)-1$ приводит к неверному утверждению.

Пусть 3-связный граф G^3 удалением трех вершин разлагается на четыре $(\delta-2)$-вершинные полные графы $(\delta\geqslant4)$. Очевидно, что G^3—негамильтонов и $\delta=\delta(G^3)=(v(G^3)+2k(G^3)-1)/4$, $\delta(G^3)\geqslant\alpha(G^3)$. Пример графа G^3 показывает, что теорема неулучшаема также в том смысле, что при $k(G)=3$, $\delta(G)\geqslant(v(G)+2k(G)-1)/4$, $\delta(G)\geqslant\alpha(G)$ граф G не всегда гамильтонов.

Ժ. Գ. ՆԻԿՈՂՈՍՅԱՆ

ԳՐԱՖԻ ՀԱՄԻԼՏՈՆՅԱՆՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ԲԱՎԱՐԱՐ ՊԱՅՄԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում բերվում է գրաֆի համիլտոնյանության մի նոր բավարար պայման, որը զգալիորեն ընդլայնում է համիլտոնյան գրաֆների նախկինում հայտնի դասը։

Դիցուք v-ն G գրաֆի գագաթների քանակն է, δ-ն՝ գագաթների մինիմալ աստիճանը, k-ն գագաթային կապակցվածությունը և α-ն՝ գագաթային անկախության թիվը։

Թեորեմ։ Եթե $k\geqslant3$ և

$$\delta\geqslant\max\left(\frac{v+2k}{4},\ \alpha\right),$$

ապա G-ն համիլտոնյան է։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Харари Ф.* Теория графов. М., Мир, 1973.
2. *Dirac G. A.* Some theorems on abstract graphs. Proc. London Math. 1952, (3) 2, 69—81.
3. *Häggkvist R., Nicoghossian G. G.* A remark on hamiltonian cycles, J. Combin. Theory, 1981, 30, 118—120.
4. *Никогосян Ж. Г.* О максимальном цикле графа. ДАН АрмССР, 1981, LXXII, № 2, 82—87.
5. *Nash-Williams C. St. J. A.* Edge-disjoint hamiltonian circuits in graphs with vertices of large valency, in „Studies in Pure Mathematics", papers presented to Richard Rado, Academic Press, London/N. Y., 1971, 157—183.
6. *Оре О.* Теория графов. М., Мир, 1973.
7. *Холл М.* Комбинаторика. М., Мир, 1970, с. 65.
8. *Форд Л. Р., Фалкерсон Д. Р.* Потоки в сетях. М., Мир, 1966.