С. Г. ИНДЖЕЯН

О БИХРОМАТИЧНОСТИ ПЛОСКИХ ГИПЕРГРАФОВ

В настоящей работе доказываются некоторые достаточные условия для бихроматичности плоских гиперграфов.

Пусть $H=(X, E)$ произвольный гиперграф, где X—произвольное множество, называемое множеством вершин, а E—произвольное семейство подмножеств из X, называемое множеством ребер. Везде будем считать, что $|e|\geqslant 2$ для любого $e\in E$. Ребро e назовем графским, если $|e|=2$, в случае $|e|\geqslant 3$ — гиперграфским.

Гиперграф $H=(X, E)$ называется плоским, если его можно вложить в 2-сферу S^2 так, чтобы каждой вершине соответствовала точка, а каждому ребру $e\in E$ — область, содержащая все инцидентные (и только такие) вершины из S^2, причем, если $e_1\neq e_2$ $(e_1, e_2\in E)$, то области соответствующие ребрам e_1 и e_2 пересекаются только в точках, соответствующих общим инцидентным вершинам.

Ребро гиперграфа H назовем ребром степени i, если $|e|=i$. Через H' обозначим граф, состоящий из ребер степени 2 гиперграфа H и им инцидентных вершин, а через $m_i(H)$—число ребер степени i гиперграфа H. Через $m(H)$ обозначим число ребер гиперграфа H.

В работе [1] было показано, что каждый плоский гиперграф с не более чем 2 графскими ребрами бихроматичен. В работе [2] показано, что плоский гиперграф $H=(X, E)$ бихроматичен, если $H'=(X', E')$ бихроматичен и для любого гиперграфского ребра $e\in H$, для которого $e\cap X'\neq\varnothing$, имеет место

$$|e|\geqslant m_2(H)+1,$$

кроме, быть может, тех ребер, которые содержат хотя бы две вершины x_i, x_j, для которых $d_{H'}(x_i, x_j)$ нечетное число.

Здесь $d_{H'}(x_i, x_j)$ обозначает расстояние между вершинами x_i и x_j в графе H'.

В этой же работе показано, что плоский гиперграф H бихроматичен, если H' бихроматичен и для любого гиперграфского ребра $e\in H$ имеет место $|e|\geqslant|e\cap X'|+3$, кроме, быть может, тех ребер, которые содержат хотя бы две вершины x_i и x_j, для которых $d_{H'}(x_i,x_j)$ нечетное число.

Легко заметить, что первый упомянутый результат из [2] является обобщением вышеупомянутого результата из [1]. Здесь мы приведем некоторые достаточные условия бихроматичности плоских гиперграфов при определенной структуре их графовой части.

2—599

Плоский граф $G=(X, U)$ без 2-граней и с некоторыми помеченными ребрами назовем (n, t)-квазираскрашиваемым, если его вершины можно окрасить n цветами так, чтобы концы помеченных ребер были окрашены различно и все грани содержали хотя бы две вершины разного цвета, кроме, быть может, тех граней Г, для которых $X(\Gamma)\cap X_n\neq\varnothing$ и $|X(\Gamma)|<t$.

Здесь $X(\Gamma)$ обозначает множество вершин, лежащих на краю грани Г, а $X_n=X(G_n)$—множество вершин, инцидентных помеченным ребрам. Через $G_n=(X_n, U_n)$ обозначим граф, порожденный помеченными ребрами графа G и им инцидентными вершинами.

Каждый простой цикл C, уложенного на плоскости графа $G=(X, U)$, разбивает плоскость на две части: внутреннюю, ограниченную циклом C, и внешнюю—неограниченную. Через X^C_{in} (соответственно X^C_{ex}) обозначим множество вершин графа G, находящихся во внутренней (соответственно внешней) части цикла C. Цикл C плоского графа G называется разделяющим, если $X^C_{\text{in}}\neq\varnothing$ и $X^C_{\text{ex}}\neq\varnothing$.

Через P_n (соответственно C_n) обозначим простую цепь (соответственно простой цикл) длины n, через $\varkappa=\varkappa(G)$—вершинную связность графа G, а $\rho(x)$—число ребер, инцидентных вершине x. Все остальные понятия и обозначения, не определяемые здесь, можно найти в [3].

Теорема 1. *Плоский гиперграф $H=(X, E)$ бихроматичен, если $H'\cong P_t$ и для любого гиперграфского ребра $e\in H$, удовлетворяющего условию $e\cap X(H')\neq\varnothing$, имеет место*

$$|e|\geqslant]t/2[+2,$$

кроме, быть может, тех ребер, которые содержат хотя бы две вершины x_i и x_j с нечетным $d_{H'}(x_i, x_j)$.

Как видно из определения плоскости гиперграфа, для доказательства теоремы достаточно показать справедливость следующей леммы.

Лемма 1. *Любой плоский граф G, для которого $G_n\cong P_t$ является $(2,]t/2[+2)$-квазираскрашиваемым.*

Доказательство леммы проведем индукцией по числу t. При $t=2$ и $t=3$ справедливость леммы следует из первой вышеупомянутой теоремы работы [2]. Пусть лемма верна для всех $t\leqslant m$ и докажем ее для $t=m+1$. Рассмотрим вершины x и y цепи $P_{m+1}=xu_1yu_2\ \dots\ u_{m+1}z$, где u_i $(i=\overline{1,\ m+1})$ — помеченные ребра.

Пусть $\rho(x)=p$ и $\rho(y)=q$, а $x_1, x_2, \dots, x_p$ и $y_1, y_2, \dots, y_q$—вершины, смежные соответственно вершинам x и y. Пусть $\Gamma_i(x)$, где $i\in[1; p-2]$, и $\Gamma_j(y)$, где $j\in[1; q-2]$, грани, содержащие соответственно вершины x и y (рис. 1).

Без потери общности можно предположить, что

$$|X(\Gamma_i(x))|\geqslant](m+1)/2[+2,\quad \text{при } i\in[1;\ p-2],$$

и

$$|X(\Gamma_j(y))|\geqslant](m+1)/2[+2,\quad \text{при } j\in[1;\ q-2].$$

Достаточно рассмотреть тот случай, когда для всех граней $\Gamma_i(x)$ (соответственно $\Gamma_j(y)$) вершины x_i, x_{i+1} (соответственно y_j, y_{j+1}) различны. Следует заметить, что какие-то грани $\Gamma_i(x)$ и $\Gamma_j(y)$ могут совпасть.

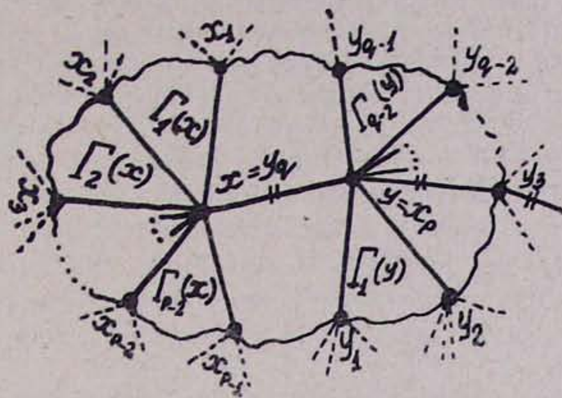

Рис. 1

Рассмотрим граф G', получающийся из G добавлением ребер (x_1, x_2), (x_2, x_3), ..., (x_{p-2}, x_{p-1}) и (y_1, y_2), (y_2, y_3), ..., (y_{q-2}, y_{q-1}) соответственно в гранях $\Gamma_1(x)$, $\Gamma_2(x)$, ..., $\Gamma_{p-2}(x)$ и $\Gamma_1(y)$, $\Gamma_2(y)$, ..., $\Gamma_{q-2}(y)$.

Для новых полученных граней $\Gamma'_i(x)$ и $\Gamma'_j(y)$, где $i\in[1; p-2]$, а $j\in[1; q-2]$, удовлетворяются неравенства

$$|X(\Gamma'_i(x))| \geqslant \left]\frac{m+1}{2}\right[+2-1=\left]\frac{m-1}{2}\right[+2,$$

$$|X(\Gamma'_j(y))| \geqslant \left]\frac{m+1}{2}\right[+2-1=\left]\frac{m-1}{2}\right[+2.$$

В графе G' ребра (x, y) и (y, y_3) будем считать непомеченными. Так как помеченные ребра графа G' составляют цепь P_{m-1}, то, по предположению индукции, G' является $(2,](m-1)/2[+2)$-квазираскрашиваемым. После раскраски G' восстановим G, оставляя цвета всех вершин без изменения. Так как грани $\Gamma'_i(x)$ и $\Gamma'_j(y)$ не были одноцветными в графе G', то после любой перекраски вершин x и y грани $\Gamma_i(x)$ и $\Gamma_j(y)$ не будут одноцветными в G. Перекрасим вершины x и y так, чтобы концы помеченных ребер (x, y) и (y, y_3) были окрашены в графе G различно. Очевидно полученная раскраска является $(2,](m+1)/2[+2)$-квазираскраской для G. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1 непосредственно следует из леммы 1.

Нетрудно убедиться, что условия, налагаемые на мощности ребер, не улучшаемы, т. е. при $|e|\geqslant]t/2[+1$ утверждение теоремы неверно.

Теорема 2. *Плоский гиперграф $H=(X, E)$ бихроматичен, если $H'\cong C_{2k}$ и для любого гиперграфского ребра $e\in H$ удовлетво-*

ряющего условию $e \cap X(H') \neq \varnothing$, имеет место $|e| \geqslant k+1$ кроме, быть может, тех ребер, которые содержат хотя бы две вершины x_i и x_j с нечетным $d_{H'}(x_i, x_j)$

Доказательство. Как уже отмечалось, достаточно показать, что любой плоский граф с $2k$ помеченными ребрами, которые составляют цикл, является $(2, k+1)$-квазираскрашиваемым.

Предположим обратное. Пусть $\mathcal{G}$—класс плоских графов с минимальным числом вершин, содержащих $2k$ помеченных ребер, которые составляют цикл, но не являющихся $(2, k+1)$-квазираскрашиваемыми.

Пусть граф $G \in \mathcal{G}$ содержит минимальное число ребер. Без потери общности можно предположить, что цикл $C_{2k} \cong G_n$ не является разделяющим, т. е. либо $X_{\text{in}}^{C_{2k}} = \varnothing$ либо $X_{\text{ex}}^{C_{2k}} = \varnothing$. Действительно, в противном случае мы бы разделили граф G на две части G_1 и G_2 по этому циклу (ребра цикла C считаются принадлежащими обоим графам). После раскраски графов G_1 и G_2 мы бы получили $(2, k+1)$-квазираскраску для G.

Пусть $X_{\text{ex}}^{C_{2k}} = \varnothing$. Во внешней части не существует ребра, соединяющего две вершины цикла. В самом деле, если бы существовали такие, то удаление любого из них привело бы к графу G', содержащего на одно ребро меньше, чем G, причем каждая $(2, k+1)$-квазираскраска G' была бы такой же и для G.

Добавим к графу G непомеченные ребра (x_3, x_5), (x_5, x_7), ..., (x_{2k}, x_1), а ребра (x_1, x_2) и (x_2, x_3) тоже будем считать непомеченными. Новый полученный плоский граф G' содержит $2k-2$ помеченных ребер, которые составляют цепь P_{2k-2} (рис. 2). Из теоремы 1 следует, что G' является $(2, k+1)$-квазираскрашиваемым. Окрасим G' в два цвета. Так как $|X(\Gamma)| = k+1$, где Γ—внешняя грань графа G', то грань Γ тоже окрашена в два цвета. Но вершины $x_3, x_5, \ldots$ $\ldots, x_{2k-1}$, x_1 окрашены в один и тот же цвет, следовательно, x_2 должна быть окрашена в цвет, отличный от цвета вершины x_3. А это значит, что полученная раскраска является $(2, k+1)$-квазираскраской для G. Теорема 2 доказана.

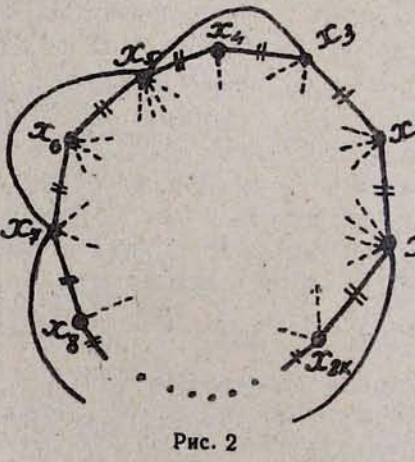

Рис. 2

Введем обозначение

$$\zeta(H)=\min \max_{\Gamma} |X(\Gamma)|,$$

где максимум берется по всем граням Г уложенного на S^2 графа H', а минимум — по всем вложениям гиперграфа H в S^2.

Теорема 3. *Плоский гиперграф $H=(X, E)$ бихроматичен, если H' — 2-связный бихроматичный граф и для любого гиперграфского ребра $e \in H$, удовлетворяющего условию $e \cap X' \neq \varnothing$, имеет место*

$$|e| \geqslant \zeta(H)/2+1,$$

кроме, быть может, тех ребер, которые содержат хотя бы две вершины x_i и x_j с нечетным $d_{H'}(x_i, x_j)$.

Доказательство. Достаточно показать, что всякий плоский граф, помеченные ребра которого составляют 2-связный бихроматичный плоский граф, максимальная грань которого содержит $2k$ вершин, является $(2, k+1)$-квазираскрашиваемым. Предположим это неверно и G — класс плоских графов с минимальным числом вершин, удовлетворяющих вышеперечисленным условиям, но не являющихся $(2, k+1)$-квазираскрашиваемыми.

Пусть $G \in G$ — граф с минимальным числом ребер. Рассмотрим внешнюю грань Г графа G_n, порожденного помеченными ребрами графа G и им инцидентными вершинами. Очевидно, $G_n \not\cong C_{2n}$, так как в противном случае по теореме 2 граф G являлся бы $(2, n+1)$-квазираскрашиваемым.

Так как связность $\varkappa(G_n) \geqslant 2$, то край грани Г является простым циклом C_{2n}. Без потери общности можно предположить, что этот цикл не является разделяющим, так как в противном случае мы бы разбили G по этому циклу на две части G_1 и G_2 и после раскраски графов G_1 и G_2 получили бы $(2, k+1)$-квазираскраску для G. Из последней очевидно, что вообще G не должен содержать разделяющих циклов.

А это значит, что остальные помеченные ребра, не лежащие на краю грани Г, должны соединять вершины цикла C. В самом деле, если это не так, то существует вершина $x \in G_n$, лежащая внутри цикла C. Так как граф G кроме вершин G_n содержит еще вершины, то непременно образуется разделяющий цикл с помеченными ребрами.

Пусть u — одно из ребер соединяющий вершины цикла C. Очевидно, помеченные ребра в графе G' получающийся из G удалением ребра u, образуют плоский граф со связностью $\geqslant 2$, на максимальной грани которого лежит опять-таки $2k$ вершин. Но G' содержит на одно ребро меньше, чем G, следовательно, является $(2, k+1)$-квазираскрашиваемым. Нетрудно убедиться, что каждая $(2, k+1)$-квазираскраска графа G' является также $(2, k+1)$ квазираскраской для G. Полученное противоречие доказывает справедливость теоремы 3.

Следствие 1. (М. И. Бурштейн [4]). *Каждый плоский гиперграф H, для которого H' — максимальный плоский бихроматичный граф, является бихроматичным.*

В самом деле, если H—максимальный плоский бихроматичный граф, то $\zeta(H)=4$, и условие теоремы 3 превратится в $|e|\geqslant 3$, а это значит, что любой плоский гиперграф, помеченные ребра которого образуют максимальный плоский бихроматичный граф, является бихроматичным.

Заметим, что условия теоремы в определенном смысле не улучшаемы. При нарушении условия 2-связности графа H' утверждение теоремы неверно, т. е. существует плоский гиперграф H, удовлетворяющий всем остальным условиям теоремы, для которого H'—1-связный граф, не являющийся бихроматичным (рис. 3).

Нетрудно убедиться также, что утверждение теоремы неверно и при нарушении условия

$$|e|\geqslant\zeta(H)/2+1,$$

т. е. существует плоский гиперграф, удовлетворяющий всем остальным условиям, для любого ребра которого выполняется

$$|e|\geqslant\zeta(H)/2.$$

не являющийся бихроматичным.

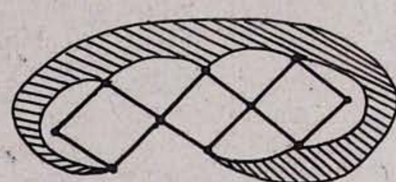

Рис.

Известно, что множество вершин каждого связного бихроматичного графа $G=(X, U)$ однозначно разбивается на два независимых множества: $X_1\cup X_2=X$, $X_1\cap X_2=\varnothing$. Множества $X_i=X_i(G)$ $(i=1;\ 2)$ назовем одноцветными классами.

Теорема 4. *Плоский гиперграф $H=(X, E)$ бихроматичен, если $H'=(X', E')$—связный бихроматичный граф и для любого гиперграфского ребра $e\in H$, удовлетворяющего условию $e\cap X'\neq\varnothing$, имеет место неравенство*

$$|e|\geqslant\max_{1\leqslant k\leqslant 2}|X'_k|+2,$$

кроме, быть может, тех ребер, которые содержат хотя бы две вершины x_i и x_j с нечетным $d_{H'}(x_i, x_j)$ (здесь X'_k—одноцветные классы графа H').

Доказательство. Докажем, что всякий плоский граф, помеченные ребра которого порождают связный бихроматичный граф, является $(2, \max\limits_{1\leqslant k\leqslant 2}|X_k(G_n)|+2)$-квазираскрашиваемым.

Предположим обратное, и пусть G—класс плоских графов с минимальным числом вершин, удовлетворяющих вышеуказанным условиям, но не допускающих $(2, \max\limits_{1\leqslant k\leqslant 2}|X_k(G_n)|+2)$-квазираскрасок.

Пусть $G\in\mathcal{G}$ содержит минимальное число ребер. Если G_n не содержит висячих вершин, то для любого ребра $u\in U(G_n)$ граф G_n-u является связным и, следовательно,

$$\max_{1\leqslant k\leqslant 2}|X_k(G_n)|=\max_{1\leqslant k\leqslant 2}|X_k(G_n-u)|.$$

Но граф $G-u$ содержит на одно ребро меньше, чем G, следовательно, по экстремальности G он является $(2, \max\limits_{1\leqslant k\leqslant 2}|X_k(G_n)|+2)$-квазираскрашиваемым. Очевидно, любая $(2, \max\limits_{1\leqslant k\leqslant 2} X_k(G_n)|+2)$-квазираскраска графа $G-u$ является такой же и для G, что является противоречием.

Очевидно G_n вообще не может содержать циклов. Пусть теперь G_n не содержит циклов. Возможны следующие два случая.

Случай 1: все висячие вершины входят в один и тот же одноцветный класс. Пусть это класс $X_1(G_n)$. Тогда, очевидно,

$$\max_{1\leqslant k\leqslant 2}|X_k(G_n)|=|X_1(G_n)|>|X_2(G_n)|.$$

Выберем произвольную вершину $x\in X_1(G_n)$. Предположим, что $\rho(x)=l$ и $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_{e-2}$ — грани, содержащие вершину x. Заметим, что какие-то грани Γ_i и Γ_j могут совпасть при $i\neq j$.

Без потери общности можно предположить, что

$$|X(\Gamma_i)|\geqslant\max_{1\leqslant k\leqslant 2}|X_k(G_n)|+2$$

для всех $i\in[1; l-2]$ и что для любой грани Γ_i вершины x_i и x_{i+1} не совпадают.

Удалим из G вершину x и добавим ребра (x_2, x_3) $(x_3, x_4), \ldots$ $\ldots, (x_{l-1}, x_l)$. Для полученного плоского графа G' имеет место

$$\max_{1\leqslant k\leqslant 2}|X_k(G'_n)|=|X_1(G_n)|-1=\max_{1\leqslant k\leqslant 2}|X_k(G_n)|-1.$$

С другой стороны, $|X(\Gamma'_i)|=|X(\Gamma_i)|-1$. Так как граф G' содержит на одну вершину меньше, чем G, то по экстремальности графа G он является $(2, \max\limits_{1\leqslant k\leqslant 2}|X_k(G'_n)|+2)$-квазираскрашиваемым. Окрасим G двумя цветами. Так как

$$|X(\Gamma'_i)|=|X(\Gamma_i)|-1\geqslant\max_{1\leqslant k\leqslant 2}|X_k(G_n)|+2-1=\max_{1\leqslant k\leqslant 2}|X_k(G'_n)|+2,$$

то вершины $X(\Gamma'_i)$ не одноцветны. Следовательно, после восстановления G вершину x можно окрасить в любой цвет. Окрасим ее в цвет, отличный от цвета вершины x_1. Очевидно, полученная раскраска является $(2, \max\limits_{1\leqslant k\leqslant 2}|X_k(G_n)|+2)$-квазираскраской для G. Полученное противоречие доказывает невозможность случая 1.

Случай 2: Существуют висячие вершины x и y из разных од-
ноцветных классов.

Пусть $\rho(x)=p$ и $\rho(y)=q$, а $\Gamma_i(x)$ $(i=\overline{1;p-2})$ и $\Gamma_j(y)$ $(j=\overline{1;q-2})$ — грани, содержащие соответственно вершины x и y. Пусть вершина x смежна с ребрами $(x, x_1), (x, x_2), \ldots, (x, x_p)$, из которых помечено (x, x_1), а y — с ребрами $(y, y_1), (y, y_2), \ldots, (y, y_q)$, из которых помечено (y, y_1). Рассмотрим грани $\Gamma_i(x)$ и $\Gamma_j(y)$ такие, что $\Gamma_i(x)\neq\Gamma_j(y)$. Без потери общности можно предположить, что

$$|X(\Gamma_i(x))|\geqslant\max_{1\leqslant k\leqslant 2}|X_k(G_n)|+2$$

и

$$|X(\Gamma_j(y))|\geqslant\max_{1\leqslant k\leqslant 2}|X_k(G_n)|+2.$$

Так же, как и в теореме 1, достаточно рассмотреть тот случай, когда для вершин x_l, x_{l+1} (соответственно y_l, y_{l+1}), лежащих на краю грани $\Gamma_i(x)$ (соответственно $\Gamma_j(y)$) выполняется условие $x_l\neq x_{l+1}$ $(y_l\neq y_{l+1})$.

Рассмотрим граф G', получающийся от G удалением вершин x и y и добавлением ребер (x_l, x_{l+1}) в гранях $\Gamma_i(x)$ (соответственно (y_l, y_{l+1}) — в $\Gamma_j(y)$).

Очевидно,

$$\max_{1\leqslant k\leqslant 2}|X_k(G'_n)|=\max_{1\leqslant k\leqslant 2}|X_k(G_n)|-1,$$

и для новых граней $\Gamma'_i(x)$, $\Gamma'_j(y)$ выполнены неравенства

$$|X(\Gamma'_i(x))|\geqslant\max_{1\leqslant k\leqslant 2}|X_k(G'_n)|+2,$$

$$|X(\Gamma'_i(y))|\geqslant\max_{1\leqslant k\leqslant 2}|X_k(G'_n)|+2.$$

Так как G' содержит меньше вершин, чем G, и G'_n — связный бихроматичный граф, то G' является $(2, \max_{1\leqslant k\leqslant 2}|X_k(G'_n)|+2)$-квазирас-
крашиваемым.

После раскраски G' восстановим G, оставляя цвета всех вершин x и y так, чтобы концы помеченных ребер были окрашены различно. Так как грани $\Gamma'_i(x)$ и $\Gamma'_j(y)$ не были одноцветными, то и соответ-

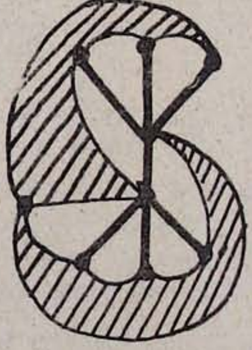

Рис. 4

ствующие им грани $\Gamma_i(x)$, $\Gamma_j(y)$ не одноцветны. А те грани $\Gamma_j(x)$ и $\Gamma_j(y)$, которые содержали одновременно и вершину x и —y, не одноцветны, так как x и y принадлежали разным одноцветным классам. Следовательно, полученная раскраска является $(2, \max\limits_{1\leqslant k\leqslant 2}|X_k(G_n)|+2)$-квазираскраской, что является противоречием. Теорема доказана.

Теорема 4 неулучшаема в известном смысле, что при условии $|e|\geqslant \max\limits_{1\leqslant k\leqslant 2}|X'_k|+1$ утверждение неверно. В этом можно убедиться на примере небихроматического плоского гиперграфа, приведенного на рис. 4. Утверждение теоремы неверно также, если H'—несвязный плоский бихроматический граф.

Ս. Գ. ԻՆՋԵՅԱՆ

ՀԱՐԹ ՀԻՊԵՐԳՐԱՖՆԵՐԻ ԲԻՔՐՈՄԱՏԻԿՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիցուք H'-ը H հիպերգրաֆի գրաֆային կողերով և նրանց ինցիդենտ գագաթներով ծնված գրաֆն է։

Հոդվածում բերվում են H հարթ հիպերգրաֆի բիքրոմատիկության բավարար պայմաններ, երբ H'-ը շղթա է, ցիկլ է։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бурштейн М. И.* О бихроматичности плоских гиперграфов, Сообщения АН ГССР, 1975, 78, № 2, 293—296.
2. *Инджеян С. Г.* Две теоремы о плоских бихроматических гиперграфах. Tanulmanyok, 1982, № 135, Будапешт, 145—152.
3. *Харари Ф.* Теория графов. М., Мир, 1973, с. 300.
4. *Бурштейн М. И.* О хроматическом числе плоских гиперграфов. Сообщения АН ГССР, 1976, 84, № 1, 45—48.