А. Е. МЕЛКОНЯН

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ВОДОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ В СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ОБЪЕКТАХ ВОДОХОЗЯЙСТВЕННОГО КОМПЛЕКСА

В экономико-математической модели [3] не рассматривалось влияние на урожайность сельскохозяйственных культур режимов орошения, т. е. совокупности сроков и норм полива, обеспечивающих при данных климатических и агротехнических условиях необходимый для данной культуры водный режим почвы. В вышеуказанной модели урожайность культур определялась только в зависимости от оросительных норм m_i, $i \in I_n$, т. е. от общего количества оросительной воды, необходимой для 1 га определенной культуры за весь вегетационный период $[t_{ni}, t_{ci}]$, где t_{ni}—дата посева, t_{ci}—дата сбора урожая i—ой культуры.

Таким образом, для нижеследующих задач мы вводим понятие поливных режимов сельскохозяйственных культур $m_i(t)$, $i \in I_n$, определяющих нормы полива $\forall t \in [t_{ni}, t_{ci}]$ и соответственно вводится понятие оптимальных режимов орошения $\omega_i(t)$, $i \in I_n$, обеспечивающих максимально возможные урожаи сельскохозяйственных культур при оптимальном уровне агротехнических работ и усредненных климатических условиях, характерных для рассматриваемого хозяйства. Последние являются известными функциями и обычно задаются в виде план-графиков вегетационных поливов.

Введем понятие некоторой производственной функции $E_i(t, m_i(t))$, характеризующей условное приращение урожайности i- ой культуры в момент времени $t \in [t_{ni}, t_{ci}]$ при ее поливе водой в количестве $m_i(t)$. Будем считать, что для i—ой культуры определена такая непрерывная и дифференцируемая относительно своих аргументов производственная функция, что имеет место

$$y_i(t) = \int_{t_{ni}}^{t} E_i(t, m_i(t))\, dt, \ \forall t \in [t_{ni}, t_{ci}]. \tag{1}$$

Введем следующие обозначения:

$$t_n = \min_i \{t_{ni}\};\ t_c = \max_i \{t_{ci}\};\ i \in I_n, \tag{2}$$

где t_n и t_c—соответственно общие даты посева и сбора урожая орошаемых культур растениеводства для хозяйства в целом.

С учетом введенных понятий урожайность i—ой культуры будет задаваться следующим соотношением:

$$y_i(t)=\int\limits_{t_n}^{t}\bar{E}_i\Big((t), m_i(t)\Big)dt, \ \forall\, t\in[t_n, t_c], \tag{3}$$

$$\text{где } \bar{E}_i(t,m_i(t))=\begin{cases} E_i(t, m_i(t)), \text{ при } t_{ni}\leqslant t\leqslant t_{ci}. \\ 0, \text{ при } t<t_{ni}, \ t>t_{ci}. \end{cases} \tag{4}$$

Тогда выражение (3) для собранного урожая примет вид:

$$y_i(t_c)=\int\limits_{t_n}^{t_c}\bar{E}_i(t,m_i(t))\,dt, \ i\in I_n. \tag{5}$$

Заметим, что (4) в соотношениях (3) и (5) учитывает тот факт, что даты посева и сбора урожая различных культур хозяйства неодинаковы.

Таким же образом, как и в [3], зависимости урожая сельскохозяйственных культур от оросительных норм рассматриваем в виде параболы второго порядка

$$y_i(t_c)=\xi_i^2 z_i^2+\xi_i^1 z_i+\xi_i^0, \ i\in I_n, \tag{6}$$

$$\text{где } \xi_i^2=-d_i, \ \xi_i^1=2\,d_i\,\tilde{z}_i. \ \xi_i^0=y_i^0; \ i\in I_n \tag{7}$$

являются известными величинами. Здесь z_i и $\tilde{z}_i$ полностью соответствуют m_i и $\tilde{m}^i$ в [3], что и отображено на рис. 1.

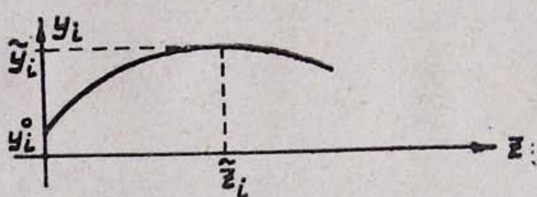


Рис. 1

С учетом вышеизложенного очевидно, что

$$z_i=\int\limits_{t_n}^{t_c} m_i(t)\,dt, \ i\in I_n; \tag{8}$$

$$\tilde{z}_i=\int\limits_{t_n}^{t_c}\omega_i(t)\,dt, \ i\in I_n. \tag{9}$$

Помимо производственной функции введем в рассмотрение еще одну вспомогательную функцию $\mu_i(t)$, $i \in I_n$, представляющую собой количество воды, израсходованной на полив 1га посевной площади культуры от начала вегетационного периода до момента времени $t \in [t_n, t_c]$, или иначе, она фактически представляет собой условное значение оросительной нормы культуры от начала общего поливного сезона хозяйства до момента $t \in [t_n, t_c]$, т. е.

$$\mu_i(t) = \int_{t_n}^{t} m_i(t)\,dt, \; i \in I_n. \tag{10}$$

Из сравнения (8) с (10) видно, что при $t = t_c$ имеет место

$$\mu_i(t_c) = z_i, \; i \in I_n. \tag{11}$$

Для орошения всех культур хозяйства $\forall t \in [t_n, t_c]$ отводится оросительный фонд воды $M(t)$, равный

$$M(t) = \sum_{i=1}^{n} R_i m_i(t). \tag{12}$$

Аналогичным образом в каждый момент времени $t \in [t_n, t_c]$ величина оптимального оросительного фонда воды хозяйства, обеспечивающего всем культурам оптимальные режимы орошения, определится из нижеследующего соотношения:

$$\Omega(t) = \sum_{i=1}^{n} R_i \omega_i(t). \tag{13}$$

С учетом (12) годовой оросительный фонд воды хозяйства определится как

$$M = \sum_{i=1}^{n} R_i z_i = \int_{t_n}^{t_c} M(t)\,dt. \tag{14}$$

Аналогичным образом оптимальный годовой фонд воды хозяйства, обеспечивающий получение максимальных урожаев по всем культурам хозяйства, с учетом соотношений (13) и (9) определится как

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} R_i Z_i = \int_{t_n}^{t_c} \Omega(t)\,dt, \tag{15}$$

Хозяйство реализует собранный урожай по всем орошаемым культурам в соответствии с закупочными (колхозы) или сдаточными (совхозы) ценами C_i, $i \in In$ и получает валовую продукцию орошаемого растениеводства в стоимостном выражении в размере

$$S = \sum_{i=1}^{n} C_i R_i y_i(t_c), \tag{16}$$

или с учетом (5) имеем

$$S=\sum_{i=1}^{n} c_i R_i \int_{t_n}^{t_c} \overline{E}_i(t, m_i(t))\, dt. \tag{17}$$

Сформулируем задачу определения рациональных режимов орошения сельскохозяйственных культур в условиях ограниченного годового оросительного фонда воды хозяйства, т. е. при

$$M<\Omega \tag{18}$$

Задача хозяйства заключается в максимизации вырожденного функционала (17), т. е. валовой продукции растениеводства хозяйства в целом

$$S \to \max \tag{19}$$

при ограничениях и связях (18), (3—16) на управляюшие параметры $m_i(t)$, $i\in I_n$ при условии их неотрицательности

$$m_i(t) \geqslant 0, \ i \in I_n. \tag{20}$$

Требование неотрицательности управляющих параметров вытекает из их физического смысла.

В анализируемой модели предполагается, что в наиболее напряженный период водоиспользования пропускная способность внутрихозяйственной оросительной сети допускает желаемые перераспределения оросительной воды между культурами хозяйства с учетом рациональных режимов орошения.

За критерий оптимальности в рассматриваемой модели принят максимум валовой продукции орошаемого растениеводства хозяйства, так как нашей целью является лишь определение наиболее эффективных (рациональных) поливных режимов, что не требует никаких дополнительных затрат, а только лишь позволяет облегчить и оптимизировать процесс принятия решений по эффективному водораспределению в хозяйстве.

Вообще говоря, наряду с производственной функцией необходимо рассматривать и соответствующие функции минимально допустимых режимов орошения $\omega_i^*(t), i \in I_n$, характеризующих текущие значения водоподачи, ниже которой растения погибают. Однако, во-первых, в балансе водопотребления растений мы здесь рассматриваем только оросительную норму без учета осадков, грунтовых вод и пр. и, во-вторых, для большинства районов Армянской ССР производство основных сельскохозяйственных культур в условиях богарного земледелия возможно, что позволяет нам в дальнейшем указанные функции не рассматривать.

Для решения подобных задач требуются определенные исходные данные в виде тех или иных зависимостей урожая различных сельскохозяйственных культур от режимов орошения. Такой функцией в рассматриваемой модели является производственная функция, для определения которой принимаем ее в виде параболы второго порядка с учетом логической и физической связи с кривыми урожайности, т. е. имеем:

$$E_i(t, m_i(t)) = -a_i(t)\, m_i^2(t) + b_i(t)\, m_i(t) + P_i(t), \tag{21}$$

$$a_i(t) > 0, \ \forall t \in [t_n, t_c], \ i \in I_n.$$

Неизвестные коэффициенты производственной функции определим в ходе решения исходной оптимизационной задачи.

Сформулированная экономико-математическая модель оптимального водораспределения с учетом реальных режимов орошения является сложной вариационной задачей оптимизации вырожденного функционала (17).

Проанализируем основное ограничение исходной задачи (18) на располагаемый годовой лимит воды хозяйства. С учетом (12—15) указанное основное ограничение разбивается на три частных ограничения:

$$z_i \leqslant \tilde{z}_i; \ i \in I_n, \tag{22}$$

$$M(t) < \Omega(t); \ \forall t \in [t_n, t_c], \tag{23}$$

$$m_i(t) < \omega_i(t); \ \forall t \in [t_n, t_c]; \ i \in I_n. \tag{24}$$

Причем, последнее ограничение (24) логически дополняет ограничение (20) в виде окончательного ограничения на управляющие параметры

$$0 \leqslant m_i(t) \leqslant \omega_i(t), \ i \in I_n, \ \forall \ t \in [t_n, t_c] \tag{25}$$

Согласно ограничениям (22) и (23) исходную оптимизационную задачу мы разобъем на две частные задачи, учитывающие указанные ограничения в отдельности. С учетом ограничения (22) исходная задача сводится к максимизации величин урожая каждой орошаемой культуры хозяйства в отдельности (локальная задача), т. е. к оптимальному распределению заданных оросительных норм $z_i, i \in I_n$, в виде рациональных режимов орошения в течение вегетационного периода культуры. В этом случае оптимизируемый функционал представит собой максимум собранного урожая по каждой культуре хозяйства в отдельности.

Однако такая постановка исходной задачи не учитывает, что в каждый момент времени $t \in [t_n, t_c]$ величина $M(t)$ ограничена сверху согласно ограничению (23). С учетом указанного ограничения исходная задача приобретает полноту охвата основных ограничений задачи и уже учитывает также общую ограниченность располагаемого фонда воды хозяйства в каждый момент времени общего вегетационного периода.

Сформулированные оптимизационные задачи мы решим в указанном порядке, а затем решим вторую задачу с учетом плановых заданий по выходу сельхозпродукции.

Рассмотрим исходную оптимизационную задачу с учетом ограничения (22). С целью упрощения дальнейших выкладок рассмотрим только одну, условно взятую культуру, подразумевая те же действия и с остальными орошаемыми культурами хозяйства.

Таким образом, поставленную задачу можно представить как простейшую задачу оптимального управления (задача Майера [4], с. 70) следующим образом: максимизировать вырожденный функционал

$$F = y(t_c) = \int_{t_n}^{t_c} \bar{E}(t, m,(t))\, dt \to \max. \tag{26}$$

т. е. найти элемент максимума $m(t), t \in [t_n, t_c]$ при следующих ограничениях и связях на управляющий параметр $m(t)$ и фазовые координаты $y(t)$ и $\mu(t), t \in [t_n, t_c]$:

$$0 \leqslant m(t) \leqslant \omega(t), \qquad (27)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \overline{E}(t, m(t)), \qquad (28)$$

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = m(t); \qquad (29)$$

с граничными значениями фазовых координат

$$y(t_n) = 0, \ \mu(t_n) = 0, \ \mu(t_c) = z, \qquad (30)$$

где фазовые координаты: $y(t)$ — непрерывная и дифференцируемая функция $\forall t \in [t_n, t_c]$, $\mu(t)$ — кусочно-дифференцируемая функция $\forall t \in [t_n t_c]$, а управление $m(t)$ — кусочно-непрерывная функция $\forall t \in [t_n, t_c]$.

Используя принцип максимума Л. С. Понтрягина [1] (необходимое условие оптимальности), составим гамильтониан $H(\psi, t, m)$, для которого имеет место минимум по управлению $m(t)$,

$$H(\psi, t, m) = \psi_y(t)\, \overline{E(t, m(t))} + \psi_\mu(t).m(t); \qquad (31)$$

$$\text{т. е. } H(\psi, t, \overline{m}) = \min_{m(t)} H(\psi. t, m), \qquad (32)$$

где $\psi_y(t)$ и $\psi_\mu(t)$ — функции, удовлетворяющие сопряженной системе уравнений

$$\dot{\psi}_y(t) = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0, \quad \dot{\psi}_\mu(t) = -\frac{\partial H}{\partial \mu} = 0, \qquad (33)$$

откуда следует, что $\psi_y = \text{Const}$, $\psi_\mu = \text{Const}$, (34)
так как минимизируемый гамильтониан от y и μ не зависит.

Из необходимого условия минимума гамильтониана (31) вытекает уравнение, связывающее оптимальное значение $\overline{m}(t)$ с неизвестными постоянными ψ_y и ψ_μ: $Hm = \frac{\partial H}{\partial m} \psi_y \frac{\partial \overline{E}(t, \overline{m}(t))}{\partial m} + \psi_\mu = 0$ или с учетом (21) $H_m = \psi_y(-2a(t)\overline{m}(t) + b(t)) + \psi_\mu = 0$. (35)

Исходная задача является задачей оптимального управления с незакрепленным правым концом (см. [30]) для фазовой координаты $y(t)$, так как нам неизвестно ее конечное значение при $t = t_c$. В таком частном виде принцип максимума уже не дает замкнутой системы уравнений для определения минимума гамильтониана.

Используя условие трансверсальности в форме, предложенной В. Ф. Кротовым [2], определим недостающее граничное условие. Для ее нахождения запишем функционал, зависящий от начального и конечного значения фазовой координаты $y(t)$

$$\Phi(y(t_n), yt_c)) = F(y(t_n), y(t_c)) + \psi_y(t_c) y(t_c) - \psi_y(t_n)\, y(t_n), \qquad (36)$$

где $F = y(tc)$ — исходный максимизируемый функционал задачи, и решим задачу на условный минимум функционала Φ по переменной $y(tc)$ при условии $y(t_n) = 0$. Из необходимого условия этого минимума получим искомое условие трансверсальности. Из (36) при $y(t_n) = 0$ следует, что $\Phi = y(t_c)\ (I + \psi_y)$, откуда минимум функционала достигается при $\psi_y = -I$. (37)

С учетом (37) соотношение (35) примет вид:

$$H_m=2a(t)\overline{m}(t)-b(t)+\psi_\mu=0.$$

Проверка достаточного условия минимума гамильтониана

$$H_{mm}=2a(t)>0$$

позволяет убедиться в том, что $m(t)=\dfrac{b(t)}{2a(t)}-\dfrac{\psi_\mu}{2a(t)},\ \forall t\in[t_n, t_c]$

является элементом минимума гамильтониана (31.) (38)

Определим оптимальный поливной режим культуры $\omega(t)$ при отсутствии ограничения (22) на располагаемый водный ресурс (оросительная норма) культуры. Тогда задача максимизации вырожденного функционала (26) без учета ограничения (22), т. е. при $m(t)\geqslant 0$ по теореме о достаточном условии максимума дает следующую схему решения указанной задачи оптимального управления: $\omega(t)$ является элементом максимума вырожденного функционала (26), если ее значения $\forall t\in[t_n, t_c]$ доставляют максимум подинтегральной производственной функции рассматриваемой культуры, т. е.

$$\overline{E}(t,\omega(t))=\max_{m(t)} E(t,m(t)). \tag{39}$$

Точка относительного максимума производственной функции одна при $m(t)\geqslant 0$ и определяется из уравнения $\dfrac{\partial E}{\partial m}=-2a(t)\,\omega(t)+b(t)=0,$

откуда $\omega(t)=\dfrac{b(t)}{2a(t)},\ \forall t\in[t_n, t_c].$ (40)

Для упрощения дальнейших преобразований принимаем

$$a(t)=a=\text{Const},\ p(t)=p=\text{Const}. \tag{41}$$

С учетом краевого условия $\mu(t_c)=z$ согласно (8) и (9) определим значение неизвестной постоянной ψ_μ с использованием соотношения (38). Получим $\psi_\mu=\dfrac{2a(\bar{z}-z)}{\tau},$ (42)

где $\tau=t_c-t_n$ — общий вегетационный период орошаемых культур рассматриваемого хозяйства.

С учетом (42) и общего ограничения исходной задачи на управляющий параметр получим значения режима орошения (рационального, эффективного) рассматриваемой культуры $\forall t\in[t_n, t_c]$

$$\overline{m}(t)=\begin{cases}\omega(t)-\dfrac{\tilde{z}-z}{\tau}, \text{ при } \omega(t)>\dfrac{\tilde{z}-z}{\tau};\\[2ex] 0, \text{ при } \omega(t)\leqslant\dfrac{\tilde{z}-z}{\tau};\end{cases} \tag{43}$$

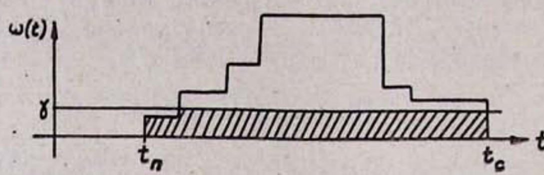
Обозначим $\gamma=\dfrac{\tilde{z}-z}{\tau},$ (44)

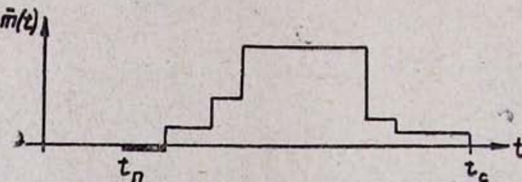
где γ — постоянная известная величина для каждой культуры хозяйства.

С учетом (44) соотношение (43) окончательно примет нижеследующий вид:

$$\overline{m}(t) = \begin{cases} \omega(t) - \gamma \text{ при } \omega(t) > \gamma; \\ 0, \text{ при } \omega(t) \leqslant \gamma; \ \forall t \in [t_n, t_c]. \end{cases} \tag{45}$$

Графическая интерпретация соотношения (45) показывает, что рациональные поливные графики орошаемых сельскохозяйственных культур строятся следующим образом: из оптимального режима орошения культуры $\omega(t)$ (см. рис. 2) вычитывается постоянное число γ для данной культуры, определяемое из выражения (44) и в полученном рациональном поливном режиме $m(t)$ участки с отрицательными значениями ординат заменяются нулевыми в силу ограничения (25), (см. рис. 3).





Заметим, что удалось получить оптимальное решение (45) исходной задачи в очень удобной форме, зависящей от коэффициентов $a(t)$ и $b(t)$ введенной нами производственной функции не непосредственно, а через функцию $\omega(t)$, имеющую очевидный физический смысл — оптимальный режим орошения культуры.

Оптимальное значение фазовой координаты $\overline{\mu}(t)$ с учетом (45) и соответствующего уравнения связи (10) определится $\forall t \in [t_n, t_c]$ как:

$$\overline{\mu}(t) = \begin{cases} \int\limits_{t_n}^{t} \omega(t)dt - \gamma(t - t_n), \text{ при } \omega(t) > \gamma; \\ 0, \text{ при } \omega(t) \leqslant \gamma. \end{cases} \tag{46}$$

Оптимальное значение фазовой координаты $y(t)$ определим после нахождения неизвестных коэффициентов производственной функции культуры. Подставляя (45) в (21) с учетом (40), получим:

$$\overline{E}(t, \overline{m}(t)) = \begin{cases} a\omega^2(t) - \gamma^2 a + p, \text{ при } \omega(t) > \gamma; \\ p, \text{ при } \omega(t) \leqslant \gamma, \end{cases} \tag{47}$$

Поскольку в известной литературе и научных трудах отсутствуют данные и результаты по Армянской ССР, позволяющие непосредственно определить производственные функции орошаемых сельскохозяйственных культур, нами разработана нижеследующая методика, позволяющая с известной степенью произвола (в зависимости от точности аппроксимации производственных функций и кривых урожайности) восстановить введенную нами производственную функцию по общепринятым данным об урожайности основных сельскохозяйственных культур на орошаемых землях Армении и соответствующих оптимальных режимах орошения. Неизвестные коэффициенты производственной функции должны быть найдены из условий их согласования с другими обобщенными данными насчет конкретной орошаемой культуры, а именно:

1) зависимость урожая культуры от оросительной нормы согласно соотношениям (6) и (7);

2) оптимальный поливной режим культуры.

Наша цель заключается в определении коэффициентов производственной функции из условия равенства фазовой координаты $y(t)$ при $t=t_c$ значению урожайности рассматриваемой культуры, определенной согласно выражению (6), т. е. с учетом рационального режима орошения.

Подставляя (47) в соотношение (5), получим значение неизвестного граничного условия для фазовой координаты $y(t)$:

$$y(t_c)=\begin{cases}\int\limits_{t_n}^{t_c}\omega^2(t)dt-\gamma^2a\tau+p\tau, \text{ при } \omega(t)>\gamma;\\ p\tau, \text{ при } \omega(t)\leqslant\gamma.\end{cases} \tag{48}$$

С учетом (44) имеем:

$$\bar{y}(t_c)=\begin{cases}-\frac{a}{\tau}z^2+\frac{2\tilde{z}a}{\tau}z+(p\tau-\frac{z^2a}{\tau}+a\int\limits_{t_n}^{t_c}\omega^2(t)dt), \text{ при } \omega(t)>\gamma.\\ p\tau, \text{ при } \omega(t)\leqslant\gamma\end{cases} \tag{49}$$

С другой стороны, согласно (6—7) $\bar{y}(t_c)=-dz^2+2dz\tilde{z}+y^0$. (50)

Приравнивая соответствующие коэффициенты при одинаковых степенях в соотношениях (49) и (50), получим:

при $\omega(t)\leqslant\gamma$, т. е. при ненулевых значениях рационального поливного режима $(\bar{m}(t)=\omega(t)-\gamma)$ соответственно

$$b(t)=2\tau d\omega(t);\quad p=\frac{y^0}{\tau}+\frac{\tilde{z}^2d}{\tau}-d\int\limits_{t_n}^{t_c}\omega^2(t)dt, \tag{51}$$

при $\omega(t)\leqslant\gamma$, т. е. при нулевых значениях рационального поливного режима $(m(t)=0)$, согласно (8) следует, что $z=0$, т. е. $p\tau=y^0$;

откуда $p=\frac{y^0}{\tau}$. (52)

Подставляя вышеполученные значения неизвестных коэффициентов производственной функции в (48), окончательно определим недостающее граничное условие исходной оптимизационной задачи

$$\bar{y}(t_c) = \begin{cases} y^0 + \tilde{z}^2 d - \gamma^2\tau^2 d, \text{ при } \omega(t) > \gamma. \\ y^0, \text{ при } \omega(t) \leqslant \gamma. \end{cases} \quad (53)$$

Согласно (3) с учетом полученных соотношений оптимальное значение фазовой координаты $y(t)$ определяется как:

$$\bar{y}(t) = \begin{cases} \tau d \int\limits_{t_n}^{t} \omega^2(t)dt + (t - t_n)\left(\frac{y}{\tau} + \frac{\tilde{z}^2 d}{\tau} - \gamma^2 d\tau - d\int\limits_{t_n}^{t_c} \omega^2(t)dt\right). \\ \frac{y^0}{\tau}(t - t_n), \text{ при } \omega(t) \leqslant \gamma;\ \forall t \in [t_n, t_c]. \end{cases}$$

$$\text{при } \omega(t) > \gamma; \quad (54)$$

Проверив для оптимальных фазовых координат достаточное условие оптимальности, убеждаемся, что согласно (46) и (54) выполняются граничные условия задачи, и что полученное решение (45, 46 и 54) — действительно есть элемент максимума исходного оптимизационного функционала.

Точность решения рассматриваемой задачи можно повысить, если отказаться от принятых допущений в виде (41). В зависимости от удобства (от вида и способа задания оптимального поливного режима) исходная задача может решаться аналитическим или графическим методами, являющимися полнейшими аналогами.

Перейдем теперь к рассмотрению этой же задачи, только уже с учетом более общего ограничения (23), т. е.

$$M(t) \leqslant \Omega(t),\ \forall t \in [t_n, t_c]. \quad (55)$$

В отличие от предыдущей оптимизационной модели, здесь уже необходимо совместное рассмотрение всех орошаемых культур хозяйства в целом с целью максимизации валовой продукции растениеводства в стоимостном выражении. Исходное ограничение данной задачи (55) означает, что $\forall t \in [t_n, t_c]$ полностью расходуется на орошение наличный фонд воды, если он не превосходит соответствующего оптимального фонда воды, или используется оптимальный оросительный фонд воды $\Omega(t)$, если это позволяет располагаемый ресурс воды.

Таким образом, в рассматриваемой задаче необходимость во введении вспомогательной функции $\mu(t)$, контролирующей состояние водопотребления культуры $\forall t \in [t_n, t_c]$ отпадает, поскольку в любой момент времени общего вегетационного периода τ хозяйства весь наличный ресурс оросительной воды полностью расходуется на орошение из-за его ограниченности.

В данной задаче хозяйство представляет собой динамическую систему (неавтономную), управляющие $m_i(t)$ и фазовые $y_i(t), i \in I_n$, параметры которой являются явными функциями времени. Вначале решим эту задачу без учета плановых заданий по выходу продукции растениеводства, а затем уже с учетом указанных заданий.

Сформулируем задачу в математических терминах. Исходная задача формулируется как задача оптимального управления [I] следующим образом: найти элемент максимума $\overline{m_i}(t) = (\overline{m}_1(t), \dots, \overline{m}_n(t))$ вырожденого функционала

$$F = \sum_{i=1}^{n} c_i R_i y(t_c) = \int\limits_{t_n}^{t_c} \sum_{i=1}^{n} c_i R_i E_i(t, m_i(t)dt,\ \forall t \in [t_n, t_c], \quad (56)$$

удовлетворяющих уравнениям связи

$$\frac{dy_i}{dt}=\overline{E}_i(t,m_i(t)),\ i\in I_n; \tag{57}$$

о ограничениям $0\leqslant m_i(t)\leqslant \omega_i(t), i\in I_n$; (58)

$$M(t)=\sum_{i=1}^{n} R_i m_i(t) \tag{59}$$

и краевым условиям $y_i(t_n)=0,\ i\in I_n$. (60)
Сформулированная задача оптимального управления с закрепленным временем $t_n\leqslant t\leqslant t_c$, закрепленным левым концом и свободным правым концом решается по принципу максимума Л. С. Понтрягина (см. [1]. с. 375):

Для того, чтобы процесс $(\overline{m}_1(t),\dots,\overline{m}_n(t))$ давал решение поставленной задачи динамической оптимизации вырожденного функционала (56) при условиях (57—60) необходимо, чтобы $\forall t\in[t_n,t_c]$ было выполнено условие минимума гамильтониана

$$H(\psi,t\overline{m})=\min_{m(t)} H(\psi,t,m), \tag{61}$$

где

$$H(\psi,t,m)=\sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)E_i(t,m_i(t)), \tag{62}$$

а вспомогательные переменные $(\psi_1(t),\dots,\psi_n(t))$—решение сопряженной системы уравнений

$$\dot{\psi}_i=-\frac{\partial H}{\partial y_i}=0,\ i\in I_n \tag{63}$$

с начальными условиями $\psi_i(t_n)=-c_iR_i,\ i\in I_n$. Тогда из (63) следует, что $\psi_i(t)=\mathrm{Const},\ i\in I_n$, т. е.

$$\psi_i=-c_iR_i,\ i\in I_n. \tag{64}$$

Последний результат есть не что иное, как условие трансверсальности для правого конца фазовой координаты.

Учет ограничения в виде равенства (59) проведем с помощью метода Лагранжа (см. [4], с. 73), для чего введем в рассмотрение функцию Лагранжа

$$H=\sum_{i=1}^{n}-c_iR_iE_i(t,m_i(t))+2\left(-M(t)+\sum_{i=1}^{n}R_im_i(t)\right), \tag{65}$$

для которой по необходимому условию оптимальности (минимум гамильтониана (62)) имеют место условия стационарности функции Лагранжа:

$$\frac{\partial H}{\partial m_i}=-c_iR_i\frac{\partial\overline{E}_i}{\partial m_i}+R_i\lambda=0;\ \frac{\partial H}{\partial\lambda}=0,\ i\in I_n, \tag{66}$$

где $\lambda=\lambda(t)$—неопределенный множитель лагранжа, играющий здесь роль дополнительного параметра управления.

С учетом (21) и (40) стационарная тока Лагранжиана (65) определяется из соотношения (66):

$$\hat{m}^i(t) = \omega_i(t) - \frac{\lambda(t)}{2a_ic_i},\ i \in I_n\ \forall t \in [t_n, t_c]. \tag{67}$$

Проверка достаточного условия минимума лагранжиана $\frac{\partial^2 H}{\partial m_i^2} = 2c_iR_ia_i > 0$ позволяет убедиться в том, что стационарная точка (67) отвечает минимуму гамильтониана (62).

С учетом ограничения (58) искомые рациональные режимы орошения культур хозяйства определяются из нижеследующего соотношения:

$$\overline{m}_i(t) = \begin{cases} \omega_i(t) - \frac{\lambda(t)}{2a_ic_i}, \text{ при } \omega(t) > \frac{\lambda(t)}{2a_ic_i};\ i \in I_n, \\ 0, \text{ при } \omega_i(t) \leqslant \frac{\lambda(t)}{2a_ic_i};\ \forall t \in [t_n, t_c]. \end{cases} \tag{68}$$

Подставляя (68) при $\omega_i(t) > \frac{\lambda(t)}{2a_ic_i}$ в ограничение (59,) определим неизвестный множитель Лагранжа: $\lambda(t) = \frac{\Omega(t) - M(t)}{\beta}$, (69)

где

$$\beta = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{a_ic_i} \tag{70}$$

постоянная величина для рассматриваемого хозяйства.

Тогда с учетом (51) (в данном случае $a_i = cd_i$, $i \in I_n$) окончательно получим:

$$\overline{m}_i(t) = \begin{cases} \omega_i(t) - \frac{\Omega(t) - M(t)}{2c_id_i \cdot \beta}, \text{ при } \omega_i(t) > \frac{\lambda(t)}{2a_ic_i},\ i \in I_n. \\ 0, \text{ при } \omega_i(t) \leqslant \frac{\lambda(t)}{2a_ic_i}\ \forall \in t[t_n, t_c]. \end{cases} \tag{71}$$

Производственные функции орошаемых культур хозяйства с учетом найденных значений режимов орошения определяется следующим образом:

$$E_i(t, m_i(t)) = \begin{cases} a_i\omega_i^2(t) - \frac{\lambda^2(t)}{4a_ic_i^2} + P_i, \text{ при } \omega_i(t) > \frac{\lambda(t)}{2a_ic_i}; \\ P_i, \text{ при } \omega_i(t) \leqslant \frac{\lambda(t)}{2a_ic_i};\ i \in I_n,\ \forall t \in [t_n, t_c]. \end{cases} \tag{72}$$

Согласно (3) с учетом (72) определяем оптимальные (рациональные) значения фазовых координат оптимизируемой системы

$$\overline{y}(t) = \begin{cases} a_i \int\limits_{t_n}^{t} \omega_i^2(t)\,dt - \frac{1}{4a_ic_i^2}\int\limits_{t_n}^{t} \lambda^2(t) + p_i(t - t_n) \text{ при } \omega_i(t) > \frac{\lambda(t)}{2a_ic_i}; \\ P_i(t - t_n), \text{ при } \omega_i(t) \leqslant \frac{\lambda(t)}{2a_ic_i},\ i \in I_n,\ \forall t \in [t_n, t_c]. \end{cases} \tag{73}$$

Тогда, согласно (8—9) с учетом (73), рациональные оросительные нормы культур хозяйства определяются как:

$$\bar{z}_i = \begin{cases} \tilde{z}_i - \dfrac{\Omega - M}{2\beta a_i c_i}, \text{ при } \omega_i(t) > \dfrac{\lambda(t)}{2a_i c_i} \\ 0, \text{ при } \omega_i(t) \leq \dfrac{\lambda(t)}{2a_i c_i};\ i \in I_n,\ \forall t \in [t_n, t_c]. \end{cases} \quad (74)$$

Полученное соотношение полностью совпадает с аналогичным результатом в [3], что подтверждает правомерность согласованного определения коэффициентов производственной функции и целесообразность ее рассмотрения.

Проверка для соотношений (71) и (73) достаточных условий оптимальности исходного максимизируемого функционала согласно (57—60) позволяет нам убедиться в том, что полученное решение (71) действительно является элементом максимума оптимизируемого функционала.

А теперь рассмотрим эту задачу с учетом плановых заданий по выходу сельхозпродукции с орошаемых массивов хозяйства, т. е. с учетом ограничения

$$y_i(t_c) = \int_{t_n}^{t_c} \bar{E}_i(t, m_i(t))\,dt \geqslant \frac{k_i}{R_i},\ iI_n. \quad (75)$$

Для упрощения рассматриваемой задачи разобъем изопериметрическое ограничение (75) на два нижеследующих:

$$y_i(t_c) = \frac{k_i}{R_i},\ i \in I_n; \quad (76)$$

$$\int_{t_n}^{t_c} \bar{E}_i(t, m_i(t))\,dt > \frac{k_i}{R_i},\ i \in I_p;\ I_p = I_n / I_h. \quad (77)$$

Фактически мы разделили весь набор орошаемых культур хозяйства на «нерентабельные» культуры с соответствующими ограничениями (76) в виде граничных условий для фазовых координат в правом конце и «рентабельные» культуры—с соответствующими интегральными ограничениями (77). Перечень вышеуказанных культур легко можно определить следующим образом: 1) решается аналогичная задача без учета ограничения (75) предыдущим методом; 2) из сравнения объемов произведенной сельхозпродукции по орошаемым культурам с соответствующими плановыми заданиями легко определяются искомые перечни культур.

Таким образом, рассматриваемая оптимизационная задача значительно упростилась ввиду того, что распалась на две упрощенные задачи оптимального управления: первая—аналогичная задача без учета ограничения (75), которая уже решена нами; вторая—аналогичная задача с учетом ограничения (76), т. е. задача оптимального управления с закрепленным временем и закрепленными концами.

Исходная задача для «нерентабельных» культур хозяйства совпадает с предыдущей задачей до момента определения соответствующих вспомогательных переменных ψ_i, $i \in I_H$, из-за различия между указанными задачами в краевом условии (76). Поэтому в данном случае вышеуказанные вспомогательные переменные мы уже будем искать не из условий трансверсальности, а из граничного условия (76).

Воспользуемся промежуточными результатами предыдущей оптимизационной задачи. Для нашего случая согласно (67) и 69) без учета значений вспомогательных переменных, следует:

$$\widehat{m}_i(t) = \omega_i(t) + \frac{\lambda(t) R_i}{2 a_i \psi_i}, \ \forall t \in [t_n, t_c], \ i \in I_n; \tag{78}$$

$$\lambda(t) = -\frac{2[\Omega(t) - M(t)]}{\sum_{i=1}^{n} R_i^2 / a_i \psi_i}, \ \forall t \in [t_n, t_c]. \tag{79}$$

Подставляя выражение (78) в (21), получим:

$$\overline{E}_i(t, \widehat{m}_i(t)) = a_i \omega_i^2(t) - \frac{\lambda^2(t) R_i^2}{4 a_i \psi_i^2} + P_i, \ i \in I_h. \tag{80}$$

Тогда согласно (5) с учетом (79), имеем:

$$y_i(t_c) = a_i \int_{t_n}^{t_c} \omega_i^2(t)\,dt - \frac{R_i^2}{a_i \left(\psi_i \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i^2}{a_i \psi_i}\right)^2} \int_{t_n}^{t_c} [\Omega(t) - M(t)]^2 dt + p_i \tau, i \in I_h. \tag{81}$$

Приравнивая соотношения (76) и (81), определяем неизвестные постоянные величины ψ_i, $i \in I_н$. Имеем:

$$\left(\psi_i \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i^2}{a_i \psi_i}\right)^2 = \frac{R_i^2}{a_i} \int_{t_n}^{t_c} [\Omega(t) - M(t)]\,dt \ \frac{1}{a_i \int_{t_n}^{t_c} \omega_i^2(t)\,dt + p\tau - \frac{k_i}{R_i}}, \ i \in I_н. \tag{82}$$

$$\text{Обозначим } \varphi_i = \psi_i \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i^2}{a_i \psi_i}, \ i \in I_н, \tag{83}$$

где φ_i, $i \in I_н$ — представляют собой известные величины (см. правая часть соотношения (82)).

$$\text{Обозначим } \alpha_i = \frac{1}{\psi_i}, \ i \in I_н. \tag{84}$$

Тогда с учетом (84), а также того, что $\psi_i = \text{Const}$, $\varphi_i = \text{const}$, $i \in I_н$ вытекает:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{R_i^2 \alpha_i}{a_i} = \text{Const}, \ i \in I_н \text{ или } \alpha_i \varphi_i = \text{Const}, \ i \in I_н. \tag{85}$$

Таким образом, одно из решений системы уравнений (85) можно принять, например, за единицу, т. е. $\alpha_1 = 1$, а оставшиеся неизвестные указанной системы определятся следующим образом:

$$\alpha_i = \frac{\varphi_1}{\varphi_i}, \ i \in I_н, \ i \neq I. \tag{86}$$

Окончательно получим: $\psi_1 = 1$, $\psi_i = \frac{\varphi_i}{\varphi_i}$, $i \in I_н$, $i \neq I$. (87)

Подставляя (87) и (78) с учетом ограничения (58), определяем искомые рациональные режимы орошения для «нерентабельных» культур хозяйства. Аналогично предыдущей оптимизационной задаче определяются соответствующие оптимальные фазовые координаты.

Ա. Ե. ՄԵԼՔՈՆՅԱՆ

ՋՐԱՏՆՏԵՍԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼԻՐՆԵՐԻ ԳՅՈՒՂԱՏՆՏԵՍԱԿԱՆ ՕԲԵԿՏՆԵՐՈՒՄ ՋՐԱԲԱՇԽՄԱՆ ՕՊՏԻՄԱԼԱՑՄԱՆ ԴԻՆԱՄԻԿ ԽՆԴՐԻ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՄՈԴԵԼ

Ամփոփում

Աշխատանքում ջրային ռեսուրսների սակավության պայմաններում դրված և լուծված են ջրատնտեսական համալիրների գյուղատնտեսական օբեկտներում օպտիմալ ոռոգման ռեժիմների որոշման դինամիկ խնդիրը։

Դրված խնդիրները բերված են օպտիմալ կառավարման մաթեմատիկական խնդիրների տեսքի։ Օպտիմալ լուծումների համար առաջարկված են առանձնահատուկ և արագ ալգորիթմներ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. Г. Болтянский.* Математические методы оптимального управления. М., Наука, 1969.
2. *В. Ф. Кротов, В. И. Гурман.* Методы и задачи оптимального управления. М., Наука, 1973.
3. *А. Е. Мелконян.* Детерминированная постановка задачи оптимизации процесса водораспределения на орошение в регионе.—В настоящем сборнике.
4. *Н. Н. Моисеев.* Элементы теории оптимальных систем. М., Наука, 1975.