

А. Е. МЕЛКОНЯН, С. М. МАНУЧАРЯН

ДЕТЕРМИНИРОВАННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ВОДОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА ОРОШЕНИЕ В РЕГИОНЕ

В условиях острого недостатка воды обычно хозяйственная практика идет по пути либо прекращения полива отдельных культур, либо сокращения оросительной нормы. Первый путь приводит к тому, что отдельные сельскохозяйственные культуры исключаются из производства, хотя потребность населения в них сильно ощущается. В настоящее время, в условиях ограниченного водоснабжения сельского хозяйства, второй путь более приемлем для районов аридной зоны Советского Союза, одним из которых является Армянская ССР, для которой обеспечение водой является важнейшим условием дальнейшего развития экономики. Однако такой прямолинейный подход к решению вышеизложенной задачи орошаемого земледелия не может удовлетворить испытываемого недостатка в сельскохозяйственных продуктах.

В связи с этим возникает прямая экономико-математическая задача определения рациональных оросительных норм сельскохозяйственных культур в пределах отдельно взятого хозяйства, располагающего ограниченным оросительным фондом воды, при условии обязательного выполнения плана государственных закупок. Перераспределение оросительного фонда воды между культурами, возделываемыми в данном хозяйстве, должно производиться таким образом, чтобы обеспечить максимум валовой продукции хозяйства от реализации продукции орошаемого земледелия.

Рассмотрим хозяйство, выращивающее n культур на общей орошаемой площади R (га) и располагающее годовым оросительным фондом воды W_0 (тыс. м³), ограниченным сверху, т. е.

$$W_0 \leq \bar{W}_0, \quad (1)$$

где $\bar{W}_0$ — оптимальное значение годового водопотребления хозяйства для получения максимальных урожаев от каждой культуры в отдельности.

Для описания математической модели введем следующие обозначения i -ой культуры, $i = 1, 2, \dots, n$:

- y_i — урожай (в центнерах с 1 га),
- R_i — площадь орошаемой культуры (в га),
- m_i — оросительная норма (в м³ на 1 га),
- c_i — закупочная или сдаточная цена (в руб. за 1 ц),

- k_i — плановый показатель нижней границы объема производимой продукции в размере госзакупок (в ц),
 q_i — расход воды на полив культуры в течение вегетационного периода, т. е. водопотребление культуры (в тыс. м³),
 s_i — частичный доход хозяйства от реализации собранного урожая культуры по соответствующей закупочной (сдаточной) цене (в руб.).

Таким образом, урожайность i -ой культуры рассматривается только в зависимости от оросительной нормы, т. е.

$$y_i = f_i(m_i). \quad (2)$$

В действительности же урожайность зависит от целого ряда агроклиматических, производственных, хозяйственных и прочих условий и факторов. Однако будем полагать, что все вышеуказанные факторы учитываются оптимальным образом (или их влияние сохраняется на одном и том же уровне) при средних погодных условиях, характерных для рассматриваемого хозяйства. Запишем некоторые очевидные соотношения, существенные для нашей модели.

Суммарная стоимость произведенной сельскохозяйственной продукции хозяйства складывается из частичных доходов хозяйства по отдельным культурам

$$S = \sum_{i=1}^n s_i = \sum_{i=1}^n c_i R_i y_i. \quad (3)$$

В (3) предполагается, что суммарная стоимость валовой продукции хозяйства от реализации сельскохозяйственной продукции с орошаемых площадей пропорциональна ее количеству, т. е. не зависит от качества продукции. Однако эту зависимость легко можно учесть, если считать, что $y_i, i=1, 2, \dots, n$ — задает не урожайность, а непосредственный доход хозяйства с единицы посевной площади. В этом случае надо брать $c_i = 1, i=1, 2, \dots, n$.

Аналогичным образом можно учесть и влияние сезонных колебаний закупочных цен.

Мы предполагаем, что в наиболее напряженный период водопользования (обычно в Армянской ССР это в основном месяц июль) пропускная способность внутрихозяйственной оросительной сети допускает всевозможные перераспределения общего оросительного фонда воды хозяйства между его орошаемыми культурами с учетом их режимов орошения. В данной модели влияние поливных режимов на урожайность сельскохозяйственных культур не рассматривается.

Общий оросительный фонд воды хозяйства расходуется на водопотребление орошаемых культур в течение вегетационного периода, т. е. водопотребление культур ограничено величиной водоподачи

$$W_0 = \sum_{i=1}^n q_i = \sum_{i=1}^n m_i R_i. \quad (4)$$

Площади орошаемых культур в сумме задают общую орошаемую площадь хозяйства

$$R = \sum_{i=1}^n R_i. \quad (5)$$

Соотношения (4) и (5) соответственно отражают баланс воды и баланс орошаемых площадей.

Рассмотрим ограничения по производству обязательных объемов сельскохозяйственной продукции

$$R_i y_i \geq k_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

т. е. хозяйство стремится перевыполнить план, а в худшем случае — выполняет только план обязательных поставок в размере госзакупок.

Все переменные по своему физическому смыслу неотрицательны

$$m_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n: \quad (7)$$

В условиях, когда посевные площади под орошаемые площади культур уже отведены (значения R_i — зафиксированы, $i = 1, 2, \dots, n$), требуется найти такие рациональные оросительные нормы m_i , $i = 1, 2, \dots, n$, при которых выполняется установленный хозяйству обязательный план производства сельскохозяйственной продукции по ассортименту (6) с учетом ограничений (4) + (7), а суммарная стоимость валовой продукции хозяйства достигает своего максимума:

$$S \rightarrow \max. \quad (8)$$

Таким образом, мы приходим к постановке экономико-математической задачи на отыскание некоторого экстремального значения функционала (8) при наличии вышеприведенной системы ограничений и связей. Указанный функционал является нелинейной функцией своих переменных, что значительно затрудняет решение данной задачи классическими методами. Под указанной нелинейностью имеется в виду нелинейный характер функции (2), общий вид которой будет рассмотрен ниже.

Максимизация суммарной валовой продукции хозяйства при заданных ограничениях на производство сельскохозяйственной продукции, как правило, не может явиться единственным критерием оптимальности принятых решений. Однако очевидный интерес представляет вариант максимизации суммарной валовой продукции хозяйства хотя бы для сравнения его с другими возможными вариантами (как, например, максимизация валового, чистого дохода, и т. д.); кроме того, такие аспекты эффективного ведения социалистического хозяйства, как производительность труда, прибыль, чистый доход, рентабельность и пр. могут быть отражены в стоимостном выражении через суммарный валовой доход хозяйства и тем самым учтены в рамках рассматриваемой модели.

В данной модели мелиоративная сеть считается уже построенной и затраты, связанные с ее построением и эксплуатацией, здесь не учитываются. Эти затраты легко можно учесть, если вычитать из сум-

факторного валового дохода хозяйства стоимостью работ по мелиорации, отнесенную на 1 год с учетом принятых сроков окупаемости.

С учетом ограничения (6) несколько видоизменяется ограничение

$$W_0^* \leq W_0 < \bar{W}_0, \quad (9)$$

где W_0^* — минимальный предел общего оросительного фонда воды хозяйства, обеспечивающего выполнение плановых заданий по всем культурам хозяйства.

Аналогичным образом имеем:

$$m_i^* \leq \bar{m}_i \leq \tilde{m}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (10)$$

$$q_i^* \leq \bar{q}_i \leq \tilde{q}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (11)$$

$$q_i^* = m_i^* R_i, \quad \tilde{q}_i = \tilde{m}_i R_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

Здесь m_i^* и $\tilde{m}_i$ — оросительные нормы для получения соответственно плановой и оптимальной урожайности i -ой культуры, а q_i^* и $\tilde{q}_i$ — соответствующие им водопотребления. Эти обозначения хорошо интерпретируются на рис. 1. Соответствующие приведенным обозначениям урожайности орошаемых культур также отмечены на этом рисунке.

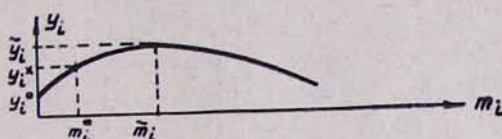


Рис. 1

Изображенная на рис. 1 кривая урожайности в виде параболы второго порядка вытекает из физического смысла процесса становления урожая орошаемых культур, а также подтверждается многочисленными статистическими данными по Армянской ССР.

Вполне естественно, что при отсутствии ограничения (9) максимальным пределом орошения следует считать тот, при котором получается максимальный урожай и от дальнейшего увеличения водоподачи следует отказаться, так как урожайность от этого повышения не увеличивается, а наоборот, даже уменьшается.

Если увеличить абсциссы и ординаты точек кривой урожайности соответственно в R_i и $c_i R_i$ раз, то полученную кривую можно рассматривать как кривую эффективности орошения данной культуры. Аналогичные действия подразумеваются и с другими культурами хозяйства. В итоге получаем кривую, изображенную на рис. 2.

Отмеченную кривую мы рассматриваем только лишь на интервале $[q_i^*, \tilde{q}_i]$, поскольку другие участки на оси абсцисс не удовлетворяют поставленной в задаче цели.

Из рис. 2 вытекают очевидные соотношения:

$$s_i^* = c_i R_i y_i^* = c_i k_i, \quad \tilde{s}_i = c_i R_i \tilde{y}_i, \quad i \in I_n, \quad (13)$$

где s_i^* и $\tilde{s}_i$ — соответственно плановая и максимальная стоимость валового урожая i -ой культуры, а I_n — перечень индексов всех орошаемых культур хозяйства.

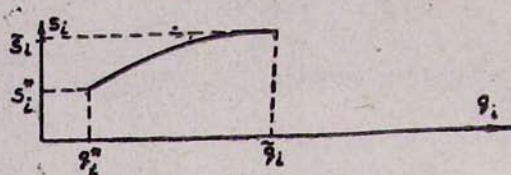


Рис. 2

Векторно суммируя кривые эффективности орошения всех культур хозяйства на одном графике (это относится и к граничным точкам кривых), получим зависимость суммарной стоимости валовой продукции хозяйства от водоподачи (см. рис. 3). Это и есть искомая кривая эффективного водопотребления хозяйства $S=S(W)$.

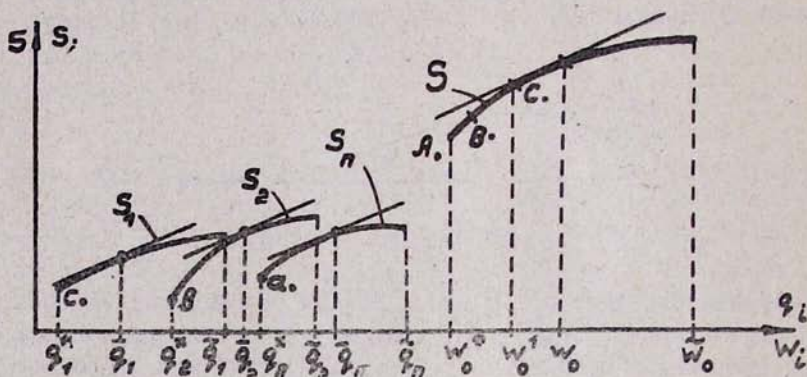


Рис. 3

Графическое решение поставленной задачи предполагает следующую процедуру: при заданном значении годового оросительного фонда воды хозяйства на кривой $S(W)$ из точки с абсциссой W_0 проводится касательная; параллельные касательные проводятся и на кривых эффективности орошения всех культур хозяйства, абсциссы точек которых представляют собой искомые значения водопотреблений культур хозяйства за весь вегетационный период, что и отображено на рис. 3. Причем, в связи с наличием ограничения (6), построение кривой эффективного водопотребления имеет свои специфические особенности, которые выявятся в ходе анализа возможных решений исходной задачи.

На рис. 3 изображен один из возможных вариантов решения задачи, когда хозяйство перевыполняет плановые задания по всем орошаемым культурам. При попадании искомой точки с абсциссой W_0 на отрезок кривой S между точками В. и С. хозяйство перевыполняет

план обязательных поставок по второй и n -ой культурам, а по первой культуре лишь выполняет плановое задание в размере k_1 . При попадании же искомой точки на отрезок кривой S между точками А. и В. хозяйство перевыполняет план только по n -ой культуре, а по первой и второй культурам—выполняет лишь плановые задания. При $W=W_0^*$ хозяйство по всем своим культурам лишь выполняет план обязательных поставок, а при $W=\bar{W}_0$ дает максимально возможную суммарную продукцию. В случае же, когда хозяйство по одной или нескольким культурам выполняет только лишь плановые задания, поступают следующим образом: из значений W_0 , W_0^* , $\bar{W}_0$ и R соответственно исключаются доли этих культур; строится новая кривая эффективного водопотребления хозяйства; по вышеприведенной методике определяются оптимальные оросительные нормы только в том случае, когда в рассмотрении остаются только те культуры, по которым хозяйство перевыполняет плановые задания. На этом этапе определяются оптимальные водопотребления отмеченных культур, а соответствующие им оптимальные оросительные нормы определяются из выражения (4)

$$\bar{m}_i = \frac{q_i}{R_i}, \quad i \in I_n. \quad (14)$$

Причем отмеченная итерационная процедура не превышает $n-1$ шагов.

Вполне очевидно, что подобные кривые эффективного водопотребления необходимо строить не только для отдельных хозяйств, но и для группы хозяйств, обслуживаемых оросительной системой, каналом для различных орошаемых массивов, регионов, водохозяйственных комплексов и на более высоких уровнях.

В качестве предпочтительного критерия оптимальности сформулированной задачи был выбран максимум суммарной стоимости валовой продукции хозяйства, поскольку предлагаемая методика оптимального водораспределения не требует каких-либо дополнительных затрат и капиталовложений по сравнению с существующей системой планирования и управления водораспределением. Рекомендательный критерий оптимальности примечателен и тем, что предусматривает по существу изложенной задачи одновременный поиск оптимальных значений двух важнейших показателей—валовой продукции и объема расходуемой оросительной воды.

Рассмотрим соответствующий аналитический метод решения этой же задачи. Фактически мы должны приравнять друг другу соответствующие производные кривых эффективности орошения всех культур хозяйства и кривой эффективного водопотребления хозяйства. Причем, для упрощения и наглядности этой процедуры и дальнейших выкладок, мы аппроксимируем кривые урожайности орошаемых культур хозяйства в виде парабол второго порядка:

$$y_i(m_i) = \tilde{y}_i - d_i(m_i - \tilde{m}_i)^2, \quad i \in I_n, \quad (15)$$

где

$$d_i = \frac{\tilde{y}_i - y_i^0}{\tilde{m}_i^2}, \quad i \in I_n. \quad (16)$$

Имеем:

$$s'_i = 2c_i R_i d_i (\tilde{m}_i - m_i) = \lambda, \quad i \in I_n; \quad (17)$$

$$S' = 2 \cdot \sum_{i=1}^n c_i d_i (\tilde{q}_i - q_i) = \lambda, \quad (18)$$

где $\lambda = \lambda(W)$ — некоторая функция от годового оросительного фонда воды. Из (17) имеем:

$$m_i = \tilde{m}_i - \frac{\lambda}{2c_i R_i d_i}, \quad \forall i \in I_n. \quad (19)$$

Подставив (19) в (4), получим:

$$\lambda = \frac{2(\tilde{W}_0 - W_0)}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i d_i}}. \quad (20)$$

Причем, для культур, по которым хозяйство выполняет лишь плановые задания, оросительные нормы можно определить из уравнения $R_i y_i^* = k_i$, откуда следует:

$$m_i^* = \tilde{m}_i - \frac{\lambda}{2c_i d_i R_i}, \quad i \in I_n, \quad (21)$$

где I_n — перечень „нерентабельных“ культур хозяйства, по которым лишь выполняются плановые задания.

При фиксированном (известном) значении годового оросительного фонда воды хозяйства, т. е. при $W = W_0$ следует, что $\lambda = \lambda_0$, $m_i = \tilde{m}_i$, а соотношение (19) примет окончательный вид для определения оптимальных оросительных норм всех культур хозяйства:

$$\bar{m}_i = \tilde{m}_i - \frac{\lambda_0}{2c_i d_i R_i}, \quad i \in I_n; \quad (22)$$

а выражение (20) соответственно перейдет в (23):

$$\lambda_0 = \frac{2(\tilde{W}_0 - W_0)}{\sum_n 1/c_i d_i}. \quad (23)$$

Опишем ход итерационной процедуры для аналитического метода решения поставленной задачи. Вначале рассчитываются значения λ_i^* согласно (17), подставляя туда $m_i = m_i^*$:

$$\lambda_i^* = 2c_i d_i R_i (\tilde{m}_i - m_i^*), \quad i \in I_n. \quad (24)$$

Полученные значения λ_i^* , $i \in I_n$ определяют собой границы изменения λ , за которыми при $\lambda_0 > \lambda_j$, $j \in I_n$ на культуры с индексом j отводятся лишь оросительные нормы m_j^* (при наличии на них плановых заданий) и нулевые оросительные нормы — при отсутствии плановых заданий на эти культуры. Причем рассчитанные значения λ_i^* , $i \in I_n$ упорядочи-

сравниваются по мере их возрастания в соответствующий ряд. Рассчитывается значение λ_0 , и если оно не превосходит значения первого члена отмеченного упорядоченного ряда, т. е. $\lambda_0 < \lambda_1^*$, то вычисления на этом заканчиваются определением соответствующих оптимальных поросительных норм для всех культур хозяйства. Если же значение λ_0 превышает значение одного или нескольких членов указанного ряда, то культуры с индексами этих членов ряда исключаются из полного набора культур как нерентабельные — хозяйство по ним либо выполняет всего лишь плановые задания, либо они вовсе исключаются из процесса производства).

Таким образом, из полного набора культур на первом шаге итерационной процедуры исключаются культуры, соответствующие по индексу тем членам упорядоченного ряда λ_j^* , $j \in I_{1n}$, для которых выполняется неравенство $\lambda_0 > \lambda_j$, где индекс „1“ указывает на номер шага итерационной процедуры. Значения $\tilde{W}_0$ и W_0 соответственно уменьшаются на $\sum_{I_{1n}} \tilde{q}_j$ и $\sum_{I_{1n}} q_j^*$. Далее рассчитывается уже новое значение λ_1 по следующей формуле:

$$\lambda_1 = \frac{2[(\tilde{W}_0 - \sum_{I_{1n}} \tilde{q}_j) - (W - \sum_{I_{1n}} q_j^*)]}{\sum_{I_{1n}} \frac{1}{c_j d_j}} \quad (25)$$

Затем проводится ее сравнение с оставшимися членами упорядоченного ряда за исключением нерентабельных культур, исключенных на первом шаге итерационной процедуры. При этом итерационная процедура продолжается до тех пор, пока одно из последующих значений λ не окажется меньше всех оставшихся членов ряда. На этом итерационная процедура заканчивается. Далее, для всех культур рассчитываются соответствующие значения урожайности: для рентабельных культур урожайность определяется по формуле (15) подстановкой $m_i = \bar{m}_i$

$$\bar{y}_i = \tilde{y}_i - d_i(\bar{m}_i - \tilde{m}_i)^2, \quad i \in I_p, \quad (26)$$

где $I_p \subset I_n$ — перечень индексов рентабельных культур, по которым хозяйство перевыполняет плановые задания; для нерентабельных культур

$$y_i^* = \frac{k_i}{R_i}, \quad i \in I_n \setminus I_p. \quad (27)$$

По известным соотношениям (3) и (13) с подстановкой для рентабельных культур $y_i = \bar{y}_i$, $i \in I_p$ определяются конечные показатели хозяйства по обеим классификациям культур:

$$\bar{s}_i = c_i R_i \bar{y}_i, \quad i \in I_p; \quad s_i^* = c_i k_i, \quad i \in I_n \quad (28)$$

и в конечном итоге определяется суммарная стоимость валовой продукции хозяйства

$$\bar{S} = \sum_p s_i + \sum_n s_i^* \quad (29)$$

В зависимости от удобства может применяться любой из разработанных методов решения исходной задачи. Первый метод отличается большей точностью, так как непосредственно используются экспериментальные графики урожайности культур, но он в тоже время является сравнительно трудоемким. Аналитический же способ, наоборот, позволит соответствующим работникам сельского хозяйства с невысокой математической подготовкой сравнительно быстро решать задачи оптимального водораспределения. Однако этот метод менее точен по сравнению с графическим из-за проведенной аппроксимации.

Основное достоинство графического метода решения задачи заключается в том, что он позволяет без каких-либо промежуточных вычислений определять не только соответствующие водопотребления и оросительные нормы, но и валовые урожаи, а также долю каждой культуры в суммарной стоимости валовой продукции хозяйства. Еще одно преимущество этого метода в том, что с изменением условий водообеспеченности в течение года он позволяет в любой момент времени провести нетрудоемкую корректировку поливного графика, что очень часто требуется в практике орошаемого земледелия.

Полностью аналогично решается задача оптимального водораспределения ограниченного фонда оросительной системы между обслуживаемыми хозяйствами. Она в точности совпадает с предыдущей, если принять $c_i = R_i = 1$, $i \in I_n$, т. е. если вместо орошаемых культур рассматривать хозяйства-водопользователи, а вместо кривых урожайности — кривые эффективного водопотребления хозяйств.

Решения обеих задач позволяют сопоставить с возможностями действующих внутри- и межхозяйственных сетей, оросительных каналов и систем. Если они обеспечивают необходимую пропускную способность и всевозможные перераспределения оросительной воды, то никакой реконструкции, естественно, не требуется. В противном случае решения отмеченных задач отчетливо показывают и диктуют конкретные направления, масштабы и параметры требуемой реконструкции или соответствующих строительных работ.

Ա. Ե. ՄԵԼՔՈՆՅԱՆ, Ս. Մ. ՄԱՆՈՒՋԱՐՅԱՆ

ՈՒՈԳՄԱՆ ՋՐԱԲԱՇԽՄԱՆ ՊՐՈՑԵՍԻ ՕՊՏԻՄԱԼԱՑՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ԴԵՏԵՐՄԻՆԱՑՄԱՆ ԴՐՎԱԾԲ

Ամփոփում

Հոդվածում դիտարկվում են ջրային պաշարների սակավության պայմաններում ոռոգման ջրաբաշխման օպտիմալացման հարցերը: Դրված և լուծված են ինչպես առանձին տնտեսության, այնպես էլ ոռոգման համակարգերով սպասարկվող մի խումբ տնտեսությունների ջրաբաշխման օպտիմալացման խնդիրները: Նշված խնդիրները լուծված են գրաֆիկ և անալիտիկ մեթոդներով:

Բացահայտված է այդ խնդիրների լուծման տնտեսական նշանակությունը գյուղատնտեսության համար: