Э. А. ДАНИЕЛЯН, В. Г. СААКЯН

ОБ ОДНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ В ПРИОРИТЕТНЫХ МОДЕЛЯХ $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ ПРИ ДИСЦИПЛИНЕ СЛУЧАЙНОГО ВЫБОРА

При организации процесса прохождения программ нескольких типов на ЭВМ возникают интересные математические задачи, для решения которых часто используются методы математической теории массового обслуживания. Прежде всего строится математическая модель упомянутого процесса, при построении которой руководствуются следующими двумя принципами:

1) модель должна „достаточно адекватно" отражать реальный процесс;

2) структурная сложность модели должна соответствовать возможностям математической теории на современном этапе ее развития.

В случае однопроцессорной ЭВМ данным принципам удовлетворяет математическая модель $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$, которая описывается следующим образом (см. [1]).

В одноканальную модель массового обслуживания с ожиданием поступают независимые пуассоновские потоки 1-вызовов, . . ., r—вызовов с параметрами $a_1, \ldots, a_r$ соответственно. Длительности обслуживаний вызовов независимы в совокупности, не зависят от процесса поступления и для i-вызовов $(i=\overline{1, r})$ имеют функцию распределения $B_i(t)$, $B_i(+0)=0$.

В такой модели вызовы соответствуют программам, канал— или прибор-процессору, наличие неограниченного числа мест для ожидания — практически „большому" объему памяти ЭВМ, длительность обслуживания — времени счета на процессоре.

Оптимальное прохождение программ на ЭВМ предполагает выбор дисциплины обслуживания, доставляющей минимум некоторой „функции потерь", например, линейной функции потерь L.

Известно, что в широком классе дисциплин обслуживания без прерывания (см. [2]) $\min L$ достигается на дисциплине относительного приоритета (схема А).

Схема А. При $1\leqslant i<j\leqslant r$ i-вызов в очереди становится впереди j-вызова.

При допущении прерываний обслуживания, иногда, дисциплина абсолютного приоритета (схемы В) в смыслее минимизации L лучше схемы А.

Схемы В. То же, что и выше, но при поступлении i-вызова в модель и наличия на приборе j-вызов $(1 \leqslant i < j \leqslant r)$. j-вызов на приборе замещается i-вызовом.

Разновидности схем B: B1-дообслуживание прерванного вызова; B2-потеря; B3-обслуживание заново.

Этим можно объяснить неослабевающее до сих пор внимание исследователей к дисциплинам относительного и абсолютного приоритета в модели.

К числу важнейших характеристик модели $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ относится $W_k(t)$ $(k=\overline{1, r})$ виртуальное время ожидания k-вызова в момент t. Эта характеристика зависит не только от дисциплин, регулирующих связи между потоками, но и от дисциплин, принятых внутри потока k-вызовов. За таковые обычно принимают наиболее распространенные дисциплины *FIFO* (первым пришел — первым обслужен) и *LIFO* (последним пришел — первым обслужен).

В последние годы возродился интерес также и к не менее интересной, чем *FIFO* и *LIFO* дисциплине *RS*-случайного выбора на обслуживание [3—5].

Отсутствие публикаций по дисциплине *RS* за период между [6, 7] и [3, 4], по-видимому, было вызвано тем, что не находился адекватный аппарат изучения этой, более сложной по структуре, чем дисциплины *FIFO* и *LIFO*, дисциплины.

Опишем дисциплину *RS* для потока k-вызовов $(k=\overline{1, r})$.

Пусть в некоторый момент T, в соответствие с приоритетной дисциплиной, на прибор должен поступить k-вызов. Предположим, что в данный момент в модели находятся $N (N \geqslant 1)$ k-вызовов. Фиксированный k-вызов в момент T поступает на прибор с вероятностью $1/N$ и не поступает с вероятностью $(N-1)/N$.

В плане постановок задач работе предшествуют публикации [8, 9].

В [8] для модели $M|G|1|\infty$ при дисциплине *FIFO* получена аналогичная нашей предельная теорема. Ее обобщение для схем A и B модели $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ при дисциплине *FIFO* (при менее ограничительных, чем в [8], предположениях) содержится в [9].

2. При анализе схем A и B в модели $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ важную роль играют величины ρ_{k1}, выражения для которых выписаны, например, в [1].

Величина ρ_{k1} $(k=\overline{1, r})$ представляет собой среднее время, необходимое для обслуживания поступающих за единицу времени 1-вызовов, ..., k-вызовов ($\overline{1, k}$-вызовов). ρ_{k1} называют загрузкой модели $\overline{1, k}$-вызовами, ρ_{r1}—загрузка модели.

Введем обозначения $(k=\overline{1, r})$:

Π_k (k-период)—промежуток времени, начинающийся с поступления в свободную от вызовов модель $\overline{1, k}$-вызова и завершающийся первым после этого моментом освобождения модели от $\overline{1, k}$-вызовов;

π_{kk} (kk-период) — k-период, начавшийся с обслуживания k-вызова; h_k (k-цикл) — промежуток времени, начинающийся с поступления в свободную от вызовов модель k-вызова и завершающийся первым после этого моментом освобождения модели от данного k-вызова и всех $\overline{1, k-1}$-вызовов;

π_k^τ (k-период с задержкой τ)—промежуток времени, начинающийся с момента, когда в свободной от вызовов модели прибор время τ не будет обслуживать, а вызовы накапливаются в очереди, и завершающийся первым, после окончания времени τ, моментом освобождения модели от $\overline{1, k}$-вызовов.

Положим ($\mathrm{Re}\, s \geqslant 0,\ k=\overline{1, r}$)

$$\pi_k(s)=Me^{-s\pi_k},\ \pi_{kk}(s)=Me^{-s\pi_{kk}},\ h_k(s)=Me^{-sh_k},$$

$$\tau(s)=Me^{-s\tau},\ \mu_{k+1}(s)=s+\sigma_k-\sigma_k\pi_k(s),\ \sigma_k=a_1+\ldots+a_k,$$

где M—знак математического ожидания.

Отметим, что изучение функций $\pi_k(s)$, $\pi_{kk}(s)$, $h_k(s)$ произведено, например, в [10].

Пусть $W_k(t)$—виртуальное время ожидания k-вызова в момент t в описанных выше схемах.

В работе [3] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\rho_{k1}\leqslant 1$. Тогда ($\mathrm{Re}\, s\geqslant 0$, $\mathrm{Re}\, v > 0$) при дисциплине RS

$$W_k(s, v)\overset{\mathrm{def}}{=}\int\limits_0^\infty e^{-vt}M(e^{-sW_k(t)};\ \pi_k^\tau>t)dt=$$

$$=\frac{1}{v-s}\int\limits_{\pi_{kk}(s)}^{1}\frac{\tau(\mu_k(z+a_k-a_kx))-\tau(\mu_{k+1}(v))}{x-h_k(z+a_k-a_k)}\Bigg|_{z=v}^{s} R_k(x, s)dx, \qquad (1)$$

где $R_k(x, s)=\exp\{-\int\limits_x^1 [y-h_k(s+a_k-a_ky)]^{-1}dy\}$.

Используя теорему 1, можно изучать поведение условной вероятности $P(W_k(t)<x/\pi_k^\tau>t)$ при $t\to\infty$, когда $\rho_{k1}=1$.

Предположим выполнение следующей группы условий I_k ($k=\overline{1, r}$).

1. В схемах A и B1 для $\beta_i(s)=\int\limits_0^\infty e^{-st}dB_i(t)$ ($\mathrm{Re}\, s\geqslant 0$, $i=\overline{1, k}$) при $s\to 0$ имеет место разложение

$$\beta_i(s)=1-\beta_{i1}s+\alpha_i s^{\gamma(i)}(1+0(1)),$$

где $\beta_{i1}=\int\limits_0^\infty t dB_i(t)<\infty$, $1<\gamma(i)\leqslant 2$, α_i—некоторая положительная константа.

2. В схемах B2 и B3 то же, что и в первом пункте, разложение предполагаем выполненным лишь при $i=1$.

Положим

$\gamma_k = \min(\gamma_{(1)}, \ldots, \gamma_{(k)})$, $L_k = \{i : i \leqslant k,\ \gamma_{(i)} = \gamma_k\}$, $B_k = \sum_{i \in L_k} a_i \alpha_i \ldots$

Пусть $\tau_1 = M\tau < \infty$, $\rho_{k-1} = 1 - \rho_{k-11}$.

Лемма. При выполнении условия I_k, $\rho_{k1} = 1$, $\rho_{k-11} < 1$ справедливы следующие представления ($\operatorname{Re} s \geqslant 0$):

$$1 - \tau(s) = \tau_1 s(1 + \varphi_1(s)),\ \mu_k(s) = \rho_{k-1}^{-1} s(1 + \varphi_2(s)),\ \mu_{k+1}(s) = (B_k^{-1} s)^{1/\gamma_k} \cdot (1 + \varphi_3(s)),$$

$$a_k(1 - h_k(s)) = s - B_k(\rho_{k-1}^{-1} s)^{\gamma_k} \cdot (1 + \varphi_4(s)),\ a_k(1 - \pi_{kk}(s)) = \rho_{k-1}(B_k^{-1} s^{1/\gamma_k}(1 + \varphi_5(s)),$$

причем $\lim_{s \to 0} \varphi_i(s) = 0$ и $\varphi_i(s)$ $(i) = \overline{1, 5})$ ограничены при малых s. Доказательство леммы можно найти в [11].

При дисциплине *FIFO* для $W_k(t)$ в [9] получена предельная теорема. Приведем ее формулировку.

Теорема 2. Пусть $\rho_{k1} = 1$ и выполнено условие I_k $(k = \overline{1, r})$. Тогда при дисциплине *FIFO* существует предел

$$\lim_{t \to \infty} P\{\rho_{k-1}(B_k t)^{-1/\gamma_k} W_k(t) < x / \pi_k^\tau > t\} = F_k(x), \tag{2}$$

где $F_k(x)$ — собственная функция распределения с преобразованием Лапласа — Стилтьеса равным

$$\int_0^\infty e^{-sx} dF_k(x) = \frac{1}{\Gamma(1/\gamma_k)} \int_0^\infty \frac{z^{1/\gamma_k}}{z + s^{\gamma_k}} e^{-z} dz.$$

Основной результат работы заключается в следующем.

Теорема 3. Пусть $\rho_{k1} = 1$ и выполнено условие I_k $(k = \overline{1, r})$. Тогда при дисциплине *RS* существует предел

$$\lim_{t \to \infty} P\{\rho_{k-1}(B_k t)^{-1/\gamma_k} W_k(t) < x / \pi_k^\tau > t\} = F_k(x), \tag{3}$$

где $F_k(x)$ — собственная функция распределения с преобразованием Лапласа—Стилтьеса равным ($\operatorname{Re} s \geqslant 0$)

$$\int_0^\infty e^{-sx} dF_k(x) = \frac{1}{\Gamma(1/\gamma_k)} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y} \frac{y^{1/\gamma_k}}{y + (sx)^{\gamma_k}} dx dy. \tag{4}$$

Замечание. Интересно отметить, что в предельных теоремах 2 и 3 нормировка для $W_k(t)$ одна и та же (ср. (2) и (3)).

3. Обозначим $A_k(s, t) = M(e^{-sW_k(t)}; \pi_k^\tau > t)$; $s^* = st^{-1/\gamma_k}$, где $s > 0$ и фиксировано.

Докажем существование предела ($s > 0$)

$$\lim_{t \to \infty} A_k(s^*, t) / (1 - \Pi_k^\tau(t)) = \lim_{t \to \infty} M(e^{-s^* W_k(t)} / \pi_k^\tau > t), \tag{5}$$

где $\Pi_k^\tau(t) = P(\pi_k^\tau < t)$.

Применив формулу обращения к (1), получим ($\omega > 0$)

$$A_k(s, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega - i\infty}^{\omega + i\infty} e^{vt} W_k(s, v) dv.$$

Поскольку значение $A_k(s, t)$ не зависит от выбора ω, можно в дальнейшем считать $\omega = t^{-2}$.

Представим $A_k(s, t)$ в виде суммы

$$A_k(s, t) = \sum_{n=1}^{4} A_k^{(n)}(s, t), \tag{6}$$

где

$$A_k^{(1)}(s, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} e^{vt} \int_{\pi_{kk}(s)}^{1} \frac{\tau(\mu_{k+1}(s)) - \tau(\mu_{k+1}(v))}{v-s} \cdot \frac{R_k(x, s)}{x - h_k(s+a_k-a_k x)}\, dx dv,$$

$$A_k^{(2)}(s, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} \frac{e^{vt}}{v-s} \int_{\pi_{kk}(s)}^{1} [\tau(\mu_k(s+a_k-a_k x)) - \tau(\mu_{k+1}(s))]\, d_x R_k(x, s) dv,$$

$$A_k^{(3)}(s, t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega-iR}^{\omega+iR} \frac{e^{vt}}{v-s} \int_{\pi_{kk}(s)}^{1} \frac{\tau(\mu_k(v+a_k-a_k x)) - \tau(\mu_{k+1}(v))}{x - h_k(v+a_k-a_k x)} R_k(x, s)\, dx dv,$$

$$A_k^{(4)}(s, t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\substack{\mathrm{Re}\, v=\omega \\ |\mathrm{Im}\, v|>R}} \frac{e^{vt}}{v-s} \int_{\pi_{kk}(s)}^{1} \frac{\tau(\mu_k(v+a_k-a_k x)) - \tau(\mu_{k+1}(v))}{x - h_k(v+a_k-a_k x)} R_k(x, s)\, dx dv,$$

$$\lim_{t\to\infty} R = 0, \quad \lim_{t\to\infty} R t^{1/2\gamma_k} = \infty.$$

Изучим поведение при $t\to\infty$ функций $A_k^{(n)}(s^*, t)$ $(n=\overline{1, 4})$. Имеет место формула

$$A_k^{(1)}(s^*, t) = 1 - \Pi_k^{\tau}(t) - s^* \int_0^{\infty} e^{-s^* x}[1 - \Pi_k^{\tau}(x+t)]\, dx. \tag{7}$$

Убедиться в равенстве (7) нетрудно, если взять преобразование Лапласа от правой части (7) и учесть, что

$$\int_{\pi_{kk}(s)}^{1} d_x R_k(x, s) = 1.$$

Из (7) имеем

$$\lim_{t\to\infty} A_k^{(1)}(s^*, t)/[1 - \Pi_k^{\tau}(t)] = 1 - \lim_{t\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-y} \frac{1 - \Pi_{\underline{k}}^{\tau}(y/s^* + t)}{1 - \Pi_{\underline{k}}^{\tau}(t)}\, dy. \tag{8}$$

Так как

$$0 < \frac{1 - \Pi_{\underline{k}}^{\tau}(y/s^* + t)}{1 - \Pi_{\underline{k}}^{\tau}(t)} \leqslant 1,$$

$$0 < \int_0^{\infty} e^{-y} \frac{1 - \Pi_{\underline{k}}^{\tau}(y/s^* + t)}{1 - \Pi_{\underline{k}}^{\tau}(t)}\, dy \leqslant \int_0^{\infty} e^{-y} dy = 1,$$

то в правой части (8) можно поменять местами знаки предела и интеграла.

Для функции $1-\Pi_k^{\tau}(t)$ в [11] получено асимптотическое разложение при $\rho_{k1}=1$ и $t\to\infty$.

$$1-\Pi_k^{\tau}(t)=\tau_1[\Gamma(1-1/\gamma_k)]^{-1}(B_k t)^{-1/\gamma_k}(1+0(1)). \tag{9}$$

Используя (9), из (8) следует

$$\lim_{t\to\infty}\frac{A_k^{(1)}(s^*,t)}{1-\Pi_k^{\tau}(t)}=1-\int_0^{\infty}e^{-y}\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{t+ys^{-1}t^{1/\gamma_k}}\right)^{1/\gamma_k}dy=1-\int_0^{\infty}e^{-y}dy=0. \tag{10}$$

Из-за ограниченности подынтегрального выражения второго интеграла у функции $A_k^{(2)}(s^*,t)$ заключаем, что интеграл

$$\int_{\pi_{kk}(s^*)}^{1}[\tau(\mu_k(s^*+a_k-a_kx))-\tau(\mu_{k+1}(s^*))]d_xR_k(x,s^*) \tag{11}$$

ограничен

Рассмотрим функцию

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty}\frac{e^{vt}}{v-s^*}dv=\frac{e^{\omega t}}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itz}\frac{dz}{z+i(s^*-\omega)}.$$

Выписанный интеграл равен нулю при наличии условий: $t>0$ и $s^*-\omega>0$. Поскольку эти условия выполнены при достаточно больших t $(\omega=t^2)$, то

$$\lim_{t\to\infty}A_k^{(2)}(s^*,t)/[1-\Pi_k^{\tau}(t)]=0. \tag{12}$$

Изучим функцию $A_k^{(3)}(s^*,t)$. После замен переменных интегрирования в формуле для $A_k^{(3)}(s,t)$ получаем

$$A_k^{(3)}(s^*,t)=-\frac{s^*}{2\pi i}\int_{-iR}^{iR}\frac{e^{v+t^{-1}}}{v-s^*t+t^{-1}}\int_0^{a_k(1-\pi_{kk}(s^*))/s^*}\frac{\tau(\mu_k(vt^{-1}+t^{-2}+s^*))-\tau(\mu_{k+1}(vt^{-1}+t^{-2}))}{a_k(1-h_k(vt^{-1}+t^{-2}+s^*x))-s^*x};$$

$$\exp\left\{-\int_0^{x}s^*[a_k(1-h_k(s^*(1+y)))-s^*y]^{-1}dy\right\}dxdv. \tag{13}$$

Аргументы, входящие в подынтегральные выражения функций в правой части (13), стремятся к нулю при $t\to\infty$. Поэтому, воспользовавшись леммой, подставим в (13) представления функций $\tau(s)$, $\mu_i(s)$, $h_k(s)$, $\pi_{kk}(s)$. Заметим, что в получаемой формуле φ_i $(i=\overline{1,5})$ можно считать бесконечно малыми величинами, не влияющими на поведение $A_k^{(3)}(s^*,t)$ при $t\to\infty$, поскольку их аргументы равномерно относительно переменных интегрирования стремятся к нулю. Пренебрегая вкладом величин φ_i в выражение для $A_k^{(3)}(s^*,t)$ получаем

$$A_k^{(3)}(s^*, t)=-\frac{\rho_{k-1}\tau_1 s^*}{2\pi i}\int\limits_{-iRB_k^{-1}}^{iRB_k^{-1}}\frac{e^{B_k t v}}{B_k v-s^*}\int\limits_0^{(B_k^{-1}s^*)^{1/\tau_k}/s^*}\frac{v^{1/\tau_k}-s^*x}{v-(s^*x)^{\tau_k}}\,e^{-\rho_{k-1}x}\,dx\,dv(1+0(1)). \quad (14)$$

Поменяв в правой части (14) порядок интегрирования, что можно сделать в силу конечности пределов интегрирования, в качестве подынтегрального выражения для внешнего интеграла имеем функцию

$$J(x)=\int\limits_{-iR}^{iR}\frac{e^{B_k t v}}{B_k v-s^*}\cdot\frac{v^{1/\tau_k}-s^*x}{v-(s^*x)^{\tau_k}}\,dv. \quad (15)$$

В правой части (15) произведем замену переменной, положив $v=e^{-i\pi}\cdot y$. Тогда

$$J(x)=\int\limits_{-iR}^{iR}\frac{e^{-ytB_k}}{B_k y+s^*}\cdot\frac{y^{1/\tau_k}e^{-i\pi/\tau_k}-s^*x}{y+(s^*x)^{\tau_k}}\,dy=\int\limits_{-iR}^{iR}g(x, y)dy. \quad (16)$$

Для вычисления $J(x)$ воспользуемся контуром, изображенным

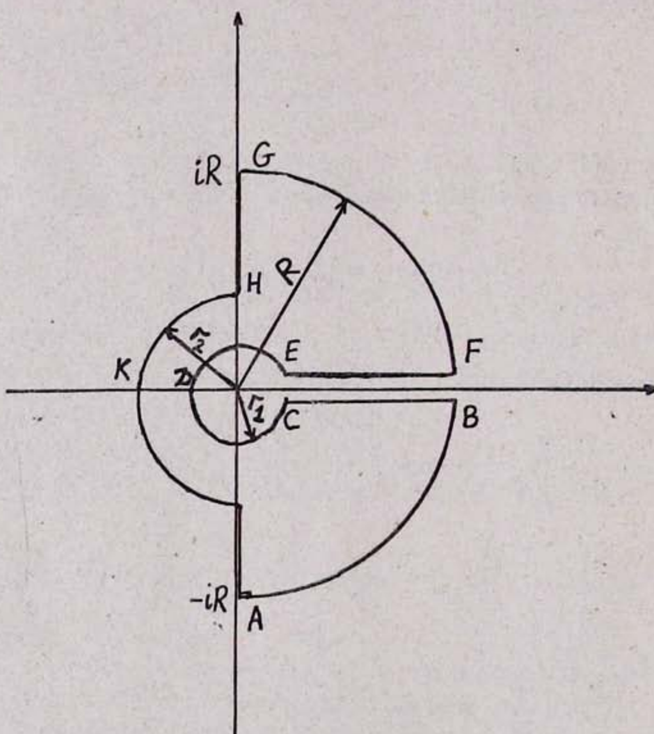

Рис. 1.

на рис. 1. Пусть $0<r_1<r_2<\min((s^*x)^{\tau_k}, s^*)$, $\Gamma_1=\{$контур $ABCDEFG\}$, $\Gamma_2=\{$контур $ALKHG\}$. Подынтегральная функция в (16) аналитична в области, ограниченной контуром $\Gamma_1\cup\Gamma_2$. Поэтому, по теореме Коши имеет место равенство

$$\int_{\Gamma_1} g(x, y)dy = \int_{\Gamma_2} g(x, y)dy. \qquad (17)$$

Устремляя r_1 и r_2 к нулю, можно показать, как это делается в [11], что

$$\lim_{r_2 \downarrow 0} \int_{\Gamma_2} g(x, y)dy = J(x),$$

$$\lim_{r_2 \downarrow 0} \int_{\Gamma_2} g(x, y)dy = -2i\sin(\pi\gamma_k^{-1}) \int_0^\infty \frac{e^{-B_k t y}}{B_k y + s^*} \cdot \frac{y^{1/\gamma_k}}{y + (s^* x)^{\gamma_k}} dy. \qquad (18)$$

Следовательно, в силу (17) и (18), выводим

$$A_k^{(3)}(s^*, t) = \frac{\rho_{k-1}\tau_1 s^*}{\pi} \sin(\pi\gamma_k^{-1}) \int_0^\infty \frac{e^{-B_k y t}}{B_k y + s^*} y^{1/\gamma_k} \int_0^{(B_k^{-1} s^*)^{1/\gamma_k}/s^*} e^{-\rho_{k-1} x} \frac{dx}{y + (s^* x)^{\gamma_k}} dy (1 + 0(1))$$

откуда получаем

$$\lim_{t \to \infty} \frac{A_k^{(3)}(s^*, t)}{1 - \Pi_k^\tau(t)} =$$

$$= \frac{s\rho_{k-1} B_b^{1/\gamma_k} \Gamma(1 - \gamma_k^{-1}) \sin \pi\gamma_k^{-1})}{\pi} \lim_{t \to \infty} t^{1-\gamma_k^{-1}} \int_0^\infty \frac{e^{-B_k y}}{B_k y + s^*} y^{1/\gamma_k} \int_0^{(B_k^{-1} s^*)^{1/\gamma_k}/s^*} \frac{e^{-\rho_{k-1} x}}{y + (s^* x)^{\gamma_k}} dx dy \qquad (19)$$

Принимая во внимание неравенство

$$t^{1-\gamma_k^{-1}} \int_0^\infty \frac{e^{-B_k y}}{B_k y + s^* t} y^{1/\gamma_k} \int_0^{(B_k^{-1} s^*)^{1/\gamma_k}/s^*} e^{-\rho_{k-1} x} \times$$

$$\times \frac{dx}{y + t(s^* x)^{\gamma_k}} dy \leq s^{-1} \int_0^\infty e^{-B_k y} \int_0^\infty e^{-\rho_{k-1} x} y^{1/\gamma_k - 1} dx dy < \infty,$$

в правой части (19) меняем местами знаки предела и интеграла, что дает

$$\lim_{t \to \infty} \frac{A_k^{(3)}(s^*, t)}{1 - \Pi_k^\tau(t)} \frac{\rho_{k-1} B^{\gamma_k^{-1}} \Gamma(1 - \gamma_k^{-1}) \sin(\pi\gamma_k^{-1})}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-B_k y - \rho_{k-1} x} \frac{y^{1/\gamma_k}}{y + (sx)^{\gamma_k}} dx dy.$$

Наконец используя тождество

$$\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \pi[\sin(\pi z)]^{-1},$$

приходим к окончательному виду предела

$$\lim_{t \to \infty} \frac{A_k^{(3)}(s^*, t)}{1 - \Pi_k^\tau(t)} = \frac{1}{\Gamma(\gamma_k^{-1})} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y} \frac{y^{1/\gamma_k}}{y + (\rho_{k-1} B^{1/\gamma_k} s x)^{\gamma_k}} dx dy. \qquad (20)$$

Изучим функцию $A_k^{(4)}(s^*, t)$.

Пусть в момент $T=0$ начался период занятости с задержкой в модели $M|G|1|\infty$. Интенсивность поступающего потока вызовов a_k. Функция распределения длительности обслуживания одного вызова $H_k(x)$ $(\int\limits_0^\infty e^{-sx}dH(x)=h_k(s))$, задержка случайна и равна π_{k-1}^τ.

Введем события:
$C_n(l, dx)=${в интервале $[x; x+dx)$ закончилось n-тое обслуживание, к моменту завершения которого в очереди имеется l штук вызовов $(l\geqslant 1)$; $\bigcap\limits_{n\geqslant 1} C_n(l, dx)=C(l, dx)$.

Обозначим период занятости рассматриваемой модели через π_k^τ (ср. с π_k^τ, введенным ранее). Положим:

$$\Phi_k(x, z)dx=\sum_{l\geqslant 1} P(C(l, dx);\ \pi_k^\tau>x)z^{l-1} \quad (0\leqslant z\leqslant 1;\ x>0).$$

Известно [12], что $(\operatorname{Re} v>0)$

$$\int\limits_0^\infty e^{-vx}\Phi_k(x, z)dx=\frac{\tau(\mu_k(v+a_k-a_kz))-\tau(\mu_{k+1}(v))}{z-h_k(v+a_k-a_kz)}, \tag{21}$$

где $\Phi_k(x, z)\leqslant 1-\Pi_k^\tau(x)$.

Переписав, с учетом (21), выражение для $A_k^{(4)}(s^*, t)$ получаем

$$A_k^{(4)}(s^*, t)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{\operatorname{Re} v=\omega\\ |\operatorname{Im} v|<R}} \frac{e^{vt}}{v-s^*}\int\limits_{\pi kh(s^*)}^{1}\int\limits_0^\infty e^{-vy}\Phi_k(y, x)dyR_k(x, s^*)dxdv. \tag{22}$$

Внутренний интеграл в правой части (22) сходится равномерно относительно x, а два других меняются в конечных пределах. Следовательно, можно поменять порядок интегрирования в (22). После чего, произведя замены переменных, имеем

$$A_k^{(4)}(s^*, t)=-\frac{t}{2\pi i}\int\limits_{\pi_{kh}(s^*)}^{1}\int\limits_0^\infty\int\limits_{\substack{\operatorname{Re} v=0\\ |\operatorname{Im} v|>R}} \frac{e^{(v+\omega)t(1-z)}}{v-(s^*-\omega)}dv\Phi_k(tz, x)dz\cdot R_k(x, s^*)dx. \tag{23}$$

Выпишем и исследуем внутренний интеграл в правой части (23)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{\operatorname{Re} v=0\\ |\operatorname{Im} v|>R}} \frac{e^{(v+\omega)t(1-z)}}{v-(s^*-\omega)}dv=\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{-i\infty}^{-i\infty}+\int\limits_{iR}^{iR}\right)\frac{e^{(v+\omega)t(1-z)}}{v-(s^*-\omega)}dv=$$

$$=(\pi i)^{-1}e^{(1-z)/t}\int\limits_R^\infty\frac{v\sin(vt(1-z))-(s^*-\omega)\cos(vt(1-z))}{v^2+(s^*-\omega)^2}dv.$$

Для интегралов $S(R, a, p)=\int\limits_{R}^{\infty}\frac{v\sin av}{v^2+p^2}dv$ и $C(R, a, p)=$ $=\int\limits_{R}^{\infty}\frac{p\cos av}{p^2+v^2}dv$ можно вывести оценки $(a, p, R\geqslant 0)$

$$|S(R, a, p)|\leqslant\frac{40}{1+aR+ap};\quad |C(R, a, p)|\leqslant\min\left(2;\ \frac{16p}{(R+p)^2a}\right).$$

С помощью этих неравенств получаем

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{\mathrm{Re}\,v=0\\ |\mathrm{Im}\,v|>R}}e^{(v+\omega)t(1-z)}\frac{dv}{v-(s^*-\omega)}\right|\leqslant\frac{e^{(1-z)/t}}{\pi}\left(\frac{40}{1+Rt|1-z|}+\right.$$

$$\left.+\min\left(2;\ \frac{16(s^*-\omega)}{(R+s^*-\omega)^2t|1-z|}\right)\right)\stackrel{\mathrm{def}}{=}L(R, t, z).$$

Оценим абсолютную величину функции $A_k^{(4)}(s^*, t)/[1-\Pi_k^{\tau}(t)]$, используя неравенство $0\leqslant\Phi_k(tz, x)\leqslant 1-\Pi_k^{\tau}(tz)$.

Имеем

$$\left|\frac{A_k^{(4)}(s^*, t)}{1-\Pi_k^{\tau}(t)}\right|\leqslant\frac{s^*t}{1-\Pi_k^{\tau}(t)}\int\limits_0^{\infty}[1-\Pi_k^{\tau}(tz)]K(R, t, z)dz\leqslant$$

$$\leqslant At\left(\int\limits_0^{1-\varepsilon}+\int\limits_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon}+\int\limits_{1+\varepsilon}^{\infty}\right)[1-\Pi_k^{\tau}(tz)]L(R, t, z)dz, \qquad (24)$$

где $A=\lim s^*/[1-\Pi_k^{\tau}(t)]<\infty$ и $0<\varepsilon<1$.

Покажем, что правая часть неравенства (24) стремится к нулю. Действительно,

$$At\int\limits_0^{1-\varepsilon}[1-\Pi_k^{\tau}(tz)]L(R, t, z)dz\leqslant At\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{Be^{\varepsilon/t}}{\pi(tz)^{1/\gamma_k}}\left(\frac{40}{Rt\varepsilon}+\frac{16}{R^2t\varepsilon}\right)dz\leqslant$$

$$\leqslant\frac{ABe^{\varepsilon/t}}{\pi}\cdot\frac{(1-\varepsilon)^{1-1/\gamma_k}}{1-1/\gamma_k}\left(\frac{40}{Rt^{1/\gamma_k}}+\frac{16}{R^2t^{1/\gamma_k}}\right)\underset{t\to\infty}{\to\infty}. \qquad (25)$$

Здесь принята во внимание следующая равномерная для $1-$ $-\Pi_k^{\tau}(x)$ при $0\leqslant x<\infty$ оценка: $0\leqslant 1<\Pi_k^{\tau}(x)\leqslant Bx^{-\gamma_k^{-1}}$ ($B>0$, B—фиксировано).

Далее,

$$At\int\limits_{1+\varepsilon}^{\infty}[1-\Pi_k^{\tau}(tz)]L(R, t, z)dz\leqslant At\int\limits_{1+\varepsilon}^{\infty}\frac{B}{(tz)^{1/\gamma_k}}\frac{e^{\varepsilon/t}}{\pi}\left(\frac{40}{Rt(z-1)}\frac{16}{R^2t(z-1)}\right)dz\leqslant$$

$$\leqslant \frac{56AB}{\pi R^2 t^{1/\gamma_k}} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dz}{z^{1+1/\gamma_k}} = \frac{56AB}{\pi R^2 t^{1/\gamma_k}} (\gamma_k \varepsilon^{1/\gamma_k})^{-1} \underset{t\to\infty}{\to} 0 \tag{26}$$

и

$$At \int\limits_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} [1-\Pi_k^{\tau}(tz)] L(R, t, z) dz \leqslant \frac{2At(1-\Pi_k^{\tau}(t(1-\varepsilon)))e^{\varepsilon/t}}{\pi} \int\limits_{1-\varepsilon}^{1} \Big(\frac{40}{1+Rt(1-z)} +$$

$$+ \min\Big(2;\ \frac{16}{R^2 t(1-z)}\Big)\Big) dz \leqslant \frac{2ABt^{1-1/\gamma_k}}{\pi(1-\varepsilon)^{1/\gamma_k}} \Big(\int\limits_{1-\varepsilon}^{1} \frac{40}{Rt(1-z)+1} dz + \tag{27}$$

$$+ \int\limits_{1-\varepsilon}^{1} \min\Big(2;\ \frac{16}{R^2 t(1-z)}\Big) dz.$$

Продолжим оценку каждого слагаемого правой части (27) в отдельности. Поскольку

$$t^{1-1/\gamma_k} \int\limits_{1-\varepsilon}^{1} \frac{40}{Rt(1-z)+1} dz = t^{1-1/\gamma_k} \int\limits_{0}^{\varepsilon} \frac{40}{(1+Rtx} dx = \frac{40 \ln(1-Rt\varepsilon)}{Rt^{1/\gamma_k}} \underset{t\to\infty}{\to} 0,$$

$$t^{1-1/\gamma_k} \int\limits_{1-\varepsilon}^{1} \min\Big(2;\ \frac{16}{R^2 t(1-z)}\Big) dz = t^{1-1/\gamma_k} \int\limits_{0}^{\varepsilon} \min\Big(2;\ \frac{16}{R^2 tx}\Big) dx = \tag{28}$$

$$= t^{1-1/\gamma_k} \Big(\int\limits_{0}^{1/t} 2dx + \int\limits_{1/t}^{\varepsilon} \frac{16}{R^2 tx} dx \Big) = \frac{2}{t^{1/\gamma_k}} + \frac{16 \ln \varepsilon t}{R^2 t^{1/\gamma_k}} \underset{t\to 0}{\to} 0,$$

то (см. (25)—(28) на основе (24) заключаем

$$\lim_{t\to\infty} A_k^{(4)}(s^*, t)/[1-\Pi_k^{\tau}(t)] = 0. \tag{29}$$

Объединяя предельные соотношения (10), (12), (20), (29) на базе (6), имеем

$$\lim_{t\to\infty} \frac{A_k(s^*, t)}{1-\Pi_k^{\tau}(t)} = \frac{1}{\Gamma(\gamma_k^{-1})} \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} e^{-x-y} \frac{y^{1/\gamma_k}}{y+(\rho_{k-1}^{-1} B_k^{1/\gamma_k} sx)^{\gamma_k}} dxdy. \tag{30}$$

Сравнивая формулы (30) и (5), приходим к предельному соотношению (3) и формуле (4). Теорема доказана.

Է. Ա. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ, Վ. Գ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ԸՆՏՐՈՒԹՅԱՆ ԴԻՍՑԻՊԼԻՆՈՎ $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ ՆԱԽԱՊԱՏՎԱՅԻՆ ՄՈԴԵԼՆԵՐՈՒՄ ԳՈՐԾՈՂ ՄԵԿ ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ԹԵՈՐԵՄԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում են $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ հարաբերական և բացարձակ նախապատվությամբ զանգվածային սպասարկման համակարգեր, երբ ընդունված է պահանջների պատահական ընտրման կարգ։

Դիցուք ρ_k-ն համակարգի ծանրաբեռնվածությունն է առաջին k հոսքերի պահանջներով $(k=\overline{1, r})$։ Աշխատանքում $\rho_{k1}=1$ և պահանջների սպասարկումների բաշխման ֆունկցիաների վրա դրված որոշ մոմենտային պահանջների դեպքում ստացված է սահմանային թեորեմ զբաղվածության պարբերության ներսում t պահին վիրտուալ սպասման ժամանակի համար, երբ $t\to\infty$։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Клейнрок.* Вычислительные системы с очередями. М., Мир, 1979.
2. *О. И. Бронштейн, И. М. Духовный.* Модели приоритетного обслуживания в информационно-вычислительных системах, М., Наука, 1976.
3. *E. A. Danielian.* On RS discipline in some $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ priority queues—Proc. of the Fifth Intern. Meeting on Cybernetics and System Research, Vienna, Austria, 1980.
4. *В. Г. Саакян.* Предельные теоремы в приоритетных моделях при дисциплине случайного выбора.—Молодой научный работник ЕГУ, № 2(36), 1982, с. 14—24.
5. *B. W. Conolly.* Lecture Notes in Queueing Theory, John Wiley and Sons, 1975.
6. *I. F. C. Kingman.* On queues in which customers are served in random order., Proceedings Cambridge Philosofical Society, 58, p. p. 79—91, 1962.
7. *Э. А. Даниелян.* Дисциплины FIFO, LIFO, RS в системах $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ с относительным и абсолютным приоритетом. *t*, Изв. АН УзбССР, сер. физ.-мат. н., 1980, № 5, с. 9—12.
8. *А. В. Печинкин, Х. М. Арипов.* Предельное распределение виртуального времени ожидания в системе GI/MI.—Известия АН УзбССР, серия физ.-мат. наук, 1975, № 1, с. 27—32.
9. *Э. А. Даниелян, Г. А. Попов.* Об одной предельной теореме для приоритетных систем при единичной загрузке.—ДАН АрмССР, 1980, XX, № 1, с. 11—15.
10. *Г. П. Климов.* Стохастические системы обслуживания. М., Наука, 1966.
11. *Г. А. Попов.* Асимптотический анализ некоторых систем с пуассоновскими поступлениями в условиях малой и единичной загрузках. Кандидатская диссертация. Ереван, 1981.
12. *Б. В. Гнеденко* и др. Приоритетные системы обслуживания. МГУ, 1973.