Э. А. ДАНИЕЛЯН, Г. А. ПОПОВ

# О НЕОБХОДИМОМ И ДОСТАТОЧНОМ УСЛОВИЯХ СТАРЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

## Формулировка основного результата

Изучение стареющих и молодеющих случайных величин (СВ) начато в работах Р. Барлоу и Ф. Прошана (см., например, [1]). Введенные ими понятия стареющих и молодеющих СВ оказались весьма полезными не только в математической теории надежности, но и в других смежных областях.

Настоящая работа посвящена выводу необходимых и достаточных условий старения и молодения СВ.

Определение 1. СВ $\eta>0$ с функцией распределения (ФР) $F(t)$, $F(+0)=0$, называется стареющей (молодеющей), если при любом фиксированном $x>0$ на множестве $D=\{t:F(t)<1\}$ функция

$$\frac{F(t+x)-F(t)}{1-F(t)}$$

с ростом $t$, где $t\geqslant 0$, $t\in D$, не убывает (не возрастает).

Рассмотрим последовательность $\{\zeta_n\}_{n\geqslant 0}$ неотрицательных СВ с преобразованиями Лапласа-Стильтеса (ПЛС) $\varphi_n(s)=M\exp(-s\zeta_n)$ $(n\geqslant 0;$ $\operatorname{Re} s\geqslant 0)$.

Пусть существует такое $\alpha$ $(0<\alpha\leqslant 1)$, что для всех целых неотрицательных $n$, определяемые из равенства $\varphi_{n+1}(s)\,(\varphi_n(s))^{-1}=$ $=1-s^\alpha\lambda_n(s)$ функции $\lambda_n(s)$ удовлетворяют условию

$$\sup_n \lambda_n((s/n)^{-1/\alpha})<+\infty. \tag{1}$$

Определение 2. Последовательность $\{\zeta_n\}_{n\geqslant 0}$, для которой выполнено (1), называется $\alpha$-последовательностью, если:

1) существует предел $(s\geqslant 0)$

$$l(s)=\lim_{n\to\infty}\lambda_n((s/n)^{-1/\alpha}); \tag{2}$$

2) $l(s)\neq 0$ и $l(s)$ непрерывна для почти всех $s>0$;

3) для любых $a$ и $b$ ($0<a\leqslant b<+\infty$ существует константа $K_{a,b}$ $(0<K_{a,b}<+\infty)$ такая, что $|l(s)|\leqslant K_{a,b}$ $(s\in[a,b])$.

Основной результат работы содержится в следующей теореме

Теорема. 1) Пусть даны $\alpha$-последовательность $\{\zeta_n\}_{n\geq 0}$, СВ $\xi$ с ФР $F(t)$, $F(+0)=0$, и независящая от $\xi$ СВ $\zeta\geq 0$ с ПЛС

$$M\exp\{-s\zeta\}=\exp\left\{-\int_0^{s^\alpha} l(z)dz\right\}.$$

Если существуют последовательность неотрицательных чисел $\{s_m\}_{m\geq 0}$ и последовательности целых положительных чисел $\{n(m)\}_{m\geq 0}$ и $\{N(m)\}_{m\geq 0}$ такие, что а) $\lim\limits_{m\to\infty} s_m=0$; б) $\lim\limits_{m\to\infty} s_m^\alpha n(m)=\delta$ $(0\leq\delta<+\infty)$; в) $\lim\limits_{m\to\infty} s_m^\alpha N(m)=\Delta$ $(0<\Delta\leq+\infty)$; г) $\lim\limits_{m\to\infty}(N(m)=n(m)=+\infty$, и для любого $m\geq 0$ отношение

$$\frac{P(s_m\zeta_{n+1}<\xi)}{P(s_m\zeta_n<\xi)}$$

не превосходит при $n\in[n(m),\ N(m)]$ единицы, не возрастает (не убывает) с ростом $n\in[n(m),\ N(m)]$, то СВ $(\xi\zeta^{-1})^\alpha\chi((\xi\zeta^{-1})^\alpha\in(\delta,\ \Delta))$ является стареющей (молодеющей).

Здесь $\chi(x\in A)=1$, если $x\in A$, и $\chi(x\in A)=0$, если $x\notin A$.

2) Даны СВ $\xi_1$, $\xi_2$, $\zeta\geq 0$ и стареющая (молодеющая) СВ $\eta$, причем все введенные СВ, за исключением, возможно, $\xi_1$ и $\xi_2$, независимы. Предположим, что $t_0\in[-\infty,\ 0]$ таково, что $P(\xi_i<t_0)=0$ $(i=1,2)$, а СВ $\xi_i$ имеет плотность распределения $f_i(t)$.

Если при любых $x$ и $y$ $(x>y)$ выполнено неравенство

$$f_1(x)f_2(y)-f_2(x)f_1(y)\geq 0 \quad (\leq 0), \tag{3}$$

то для любой выпуклой вверх (вниз) на $(t_0, \infty)$ неубывающей функции имеет место неравенство

$$P\{\varphi(\xi_1+\zeta)<\eta/\varphi(\xi_1)<\eta\}\underset{(\geq 0)}{\leq} P\{\varphi(\xi_2+\zeta)<\eta/\varphi(\xi_2)<\eta\}.$$

Здесь $P\{A/B\}$—условная вероятность события $A$ при условии осуществления события $B$.

## 2. Вспомогательная лемма

В процессе доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма. Пустя дана $\alpha$-последовательность $\{\zeta_n\}_{n\geq 0}$, СВ $\zeta$ и последовательности $\{s_m\}_{m\geq 0}$, $\{n(m)\}_{m\geq 0}$, $\{N(m)\}_{m\geq 0}$, введенные в пункте 1) теоремы. Тогда для любого $t>0$ существуют пределы

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=n(m)}^{N(m)}[P\{s_m\zeta_n<t\}-P\{s_m\zeta_{n+1}<t\}]e^{-s_m^\alpha\lambda n}=\int_{(1/\Delta)t^\alpha}^{(1/\delta)t^\alpha} e^{-\lambda t^\alpha y^{-1}}\,d_yP\{\zeta^\alpha<y\}, \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\{\zeta_n n^{-1/\alpha} < t\} = P\{\zeta < t\}. \tag{5}$$

Доказательство. Из (1), на основе формулы Тейлора, получаем ($n \geqslant 0$):

$$\varphi_n(s) = \varphi_0(s) \prod_{k=1}^{n} (\varphi_k(s) | \varphi_{k-1}(s)) = \varphi_0(s) \exp\left\{ \sum_{k=1}^{n} \ln(1 - s^\alpha \lambda_k(s)) \right\} =$$

$$= \varphi_0(s) \exp\left\{ -s^\alpha \left[ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(s) + \frac{s^\alpha}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^2(s)}{1-\theta_k(s)} \right] \right\}, \tag{6}$$

где $0 < \theta_k(s) < s^\alpha \lambda_k(s)$ $(k \geqslant 1)$.

Изучим ПЛС по $t$ допредельного выражения в левой части (4). Имеем

$$I(s, \mu) \overset{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-\mu t} d_t \left\{ \sum_{n=n(m)}^{N(m)} [P(s\zeta_n < t) - P(s\zeta_{n+1} < t)] \exp\{-s^\alpha \lambda n\} \right\} =$$

$$= \sum_{n=n(m)}^{N(m)} \varphi_n(s\mu) e^{-s^\alpha \lambda n} - \sum_{n=n(m)}^{N(m)} \varphi_{n+1}(s\mu) e^{-s^\alpha \lambda n},$$

откуда, в силу (6) и определения функции $\lambda_n(s)$, получаем

$$I(s, \mu) = \sum_{n=n(m)}^{N(m)} \exp\left\{ -s^\alpha \lambda n - (s\mu)^\alpha \left[ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(s\mu) + \frac{(s\mu)^\alpha}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^2(s\mu)}{1-\theta_k(s\mu)} \right] \right\} \times$$

$$\times \varphi_0(s)(s\mu)^2 \lambda_n(s\mu) \tag{7}$$

На основе (7) произведем оценки выражения $I(s, \mu)$ сверху и снизу.

Верхняя оценка. Имеем:

$$I(s, \mu) \leqslant e^{s^\alpha \lambda} \varphi_0(s) \int_{n(m)}^{N(m)} \exp\left\{ -s^\alpha \lambda x - (s\mu)^\alpha \left[ \sum_{k \leqslant x} \lambda_k(s\mu) + \frac{(s\mu)^2}{2} \sum_{k \leqslant x} \frac{\lambda_k^2(s\mu)}{1-\theta(s\mu)} \right] \right\} \times$$

$$\times (s\mu)^\alpha \lambda_{[x]}(s\mu) dx = e^{s^\alpha \lambda} \mu^\alpha \varphi_0(s) \int_{n(m)s^\alpha}^{N(m)s^\alpha} \exp\left\{ -\lambda y - \mu^\alpha y \left[ \sum_{k \leqslant ys^{-\alpha}} \lambda_k(s\mu)(ys^{-\alpha})^{-1} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(s\mu)^\alpha}{2} \sum_{k \leqslant ys^{-\alpha}} \frac{\lambda_k^2(s\mu)}{1-\theta_k(s\mu)} \right] (ys^{-\alpha})^{-1} \right\} \lambda_{[ys^{-\alpha}]}(s\mu) dy, \tag{8}$$

где $[x]$ — целая часть числа $x$.

Если последовательность $\{\zeta_n\}_{n \geqslant 0}$ есть $\alpha$-последовательность, то при почти всех $s \in (0, \infty)$ имеет место следующее утверждение: при $s_n \to s$ $(n \to \infty)$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n((s_n/n)^{1/\alpha}) = l(s).$$

Утверждение вытекает из равномерной по $s$ на любом конечном интервале из $(0, \infty)$ сходимости в (2).

Поэтому

$$\lim_{s\downarrow 0} \lambda_{[ys^{-\alpha}]}(s\mu) = \lim_{z\to\infty} \left( \lambda_{[z]}\left(\left(y\frac{[z]}{z}[z]^{-1}\mu^{\alpha}\right)^{1/\alpha}\right)\right) = l(y\mu^{\alpha}). \tag{9}$$

Далее, в силу (1), (2) и (9) при $s\downarrow 0$ находим

$$(ys^{-\alpha})\sum_{k\leqslant ys^{-\alpha}} \lambda_k(s\mu) = s^{\alpha}y^{-1}\left\{\int_0^{ys^{-1}} \lambda_{[z]}(s\mu)dz - (ys^{-\alpha}-[ys^{-\alpha}])\lambda_{[ys^{-\alpha}]}(s\mu)\right\} =$$

$$= y^{-1}\int_0^y \lambda_{[zs^{-\alpha}]}(s\mu)dz + \left(\frac{[ys^{-\alpha}]}{ys^{-\alpha}} - 1\right)\lambda_{[ys^{-\alpha}]}(s\mu) \to y^{-1}\int_0^y l(z\mu^{\alpha})dz. \tag{10}$$

Аналогично при $s\downarrow 0$ получаем

$$(ys^{-\alpha})^{-1}\sum_{k\leqslant ys^{-\alpha}} \frac{\lambda_k^2(s\mu)}{1-\theta_k(s\mu)} \to y^{-1}\int_0^y l^2(z\mu^{\alpha})dz. \tag{11}$$

В неравенстве (8), с учетом соотношений

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda y}dy < +\infty, \quad \sup_{z\geqslant 0}(ze^{-z}) < +\infty,$$

при $s=s_m$ можно перейти к пределу под знаком интеграла, что, ввиду (9)—(11) и условий леммы, дает

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\, I(S_m, \mu) \leqslant \mu^{\alpha}\int_0^{\infty} \exp\left\{-\lambda y - \mu^{\alpha}\int_0^y l(z\mu^{\alpha})dz\right\} l(y\mu^{\alpha})dy.$$

Нижняя оценка. Как и в случае верхней оценки, на основе (7) $I(s, \mu)$ оценивается снизу. Предел получаемой при этом оценки при $s=s_m$ и $m\to\infty$ совпадает с пределом верхней оценки.

Таким образом, существует предел

$$\lim_{m\to\infty} I(s_m, \mu) = \int_0^{\Delta} e^{-\lambda y}\, dy\left\{-\exp\left(-\int_0^{y\mu^{\alpha}} l(z)dz\right)\right\}. \tag{12}$$

Положив в (10) и (11) $y=1$, $s^{-\alpha}=n$, получаем при $n\to\infty$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k((\mu n^{-1})^{1/\alpha}) \to \int_0^1 l(z\mu^{\alpha})dz, \tag{13}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^2((\mu n^{-1})^{1/\alpha})}{1-\theta_k((\mu n^{-1})^{1/\alpha})} \to \int_0^1 l^2(z\mu^{\alpha})dz. \tag{14}$$

Из (6), с учетом (13) и (14), получаем:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n((sn^{-1})^{1/\alpha}) = \exp\left\{-s^\alpha \int_0^1 l(zs^\alpha)dz\right\} = \exp\left\{-\int_0^{s^\alpha} l(z)\,dz\right\},$$

что влечет (5).

Пусть $\theta$—СВ с плотностью распределения равной 0 при $y\leqslant\delta$ и $y\geqslant\Delta$ и $\lambda e^{-\lambda y}\{e^{-\lambda\delta}-e^{-\lambda\Delta}\}^{-1}$ при $y\in(\delta,\Delta)$.

Тогда из (12) и вида ПЛС от СВ $\zeta$ после интегрирования по частям правой части (12) выводим

$$\lim_{m\to\infty} I(s_{m,}\mu) = e^{-\lambda\delta}Me^{-\delta^{1/\alpha}\zeta\mu} - e^{-\lambda\Delta}Me^{-\Delta^{1/\alpha}\zeta\mu} - Me^{-\theta^{1/\alpha}\zeta\mu}(e^{-\lambda\delta}-e^{-\lambda\Delta}) =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\mu t}d_t\{P\{\delta^{1/\alpha}\zeta<t\}e^{-\lambda\delta} - P\{\Delta^{1/\alpha}\zeta<t\}e^{-\lambda\Delta} - (e^{-\lambda\delta}-{}^{-\lambda\Delta})P\{\theta^{1/\alpha}\zeta<t\},$$

откуда следует

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=n(m)}^{N(m)} [P\{s_m\zeta_n<t\} - P\{s_m\zeta_{n+1}<t\}]e^{-\lambda s_m^\alpha n} =$$

$$= e^{-\lambda\delta}P\{\zeta<t\delta^{-1/\alpha}\} - e^{-\lambda\Delta}P\{\zeta<t\Delta^{-1/\alpha}\} + \int_\delta^\Delta P\{y^{1/\alpha}\zeta<t\}de^{-\lambda y} =$$

$$= \int_\delta^\Delta e^{-\lambda y}d_yP\{y\zeta^\alpha<t^\alpha = \int_{t^\alpha\Delta^{-1}}^{t^\alpha\delta^{-1}} \exp\{-\lambda t^\alpha v^{-1}\}d_vP\{\zeta^\alpha<v\},$$

что доказывает (4). Лемма доказана.

## 3. Приложение

Приступим к доказательству теоремы в случае стареющих СВ. Случай молодеющих СВ рассматривается аналогично.

1. Положим $m\geqslant0$, $n\geqslant0$, $0\leqslant z\leqslant1$):

$$a_{n,m} = P\{s_m\zeta_{n(m)+n}<\xi\}\cdot\chi(0\leqslant n\leqslant N(m)-n(m)),$$

$$p_{nm} = (a_{n(m),m})^{-1}(a_{n,m}-a_{n+1,\,m}),\quad P_m(z) = \sum_{n\geqslant0} p_{nm}z^n.$$

Покажем, что $P_m(z)$ при фиксированном $m$ по $z$ представляет собой вероятностную производящую функцию. В силу условий теоремы

$$(a_{n+1,\,m}/a_{n,m}) \leqslant 1 \quad (0\leqslant n\leqslant N(m)-n(m)),$$

и, значит, $p_{nm}\geqslant0$. Очевидно, $P_m(1)=1$.

Выведем соотношение

$$\lim_{m\to\infty} P_m(e^{-s_m^\alpha\lambda}) = M\{\exp\{-\lambda \max(\Delta, (\xi\zeta^{-1})^\alpha\}/(\xi\zeta^{-1})^\alpha > \delta\}, \tag{15}$$

где $M\{\xi/A\}$ — условное математическое ожидание СВ $\xi$ при условии осуществления события $A$.

Из условий теоремы следует, что условия леммы выполнены. В силу (5),

$$\frac{\zeta_{N(m)+1}}{(N(m)+1)^{1/\alpha}} \to \zeta\Delta^{1/\alpha} \quad \text{почти всюду}$$

и, следовательно, $\lim\limits_{m\to\infty} P\{s_m\zeta_{N(m)+1} < t\} = P\{\zeta\cdot\Delta^{1/\alpha} < t\}$.

Аналогично показывается, что

$$\lim_{m\to\infty} a_{n(m),m} = P\{\zeta\delta^{1/\alpha} < \xi\} = P\{\zeta < \delta^{-1/\alpha}\xi\}.$$

На основе последнего соотношения и утверждения леммы получаем

$$\lim_{m\to\infty} P_m(e^{-s_m^\alpha\lambda}) = [P\{\zeta < \delta^{-1/\alpha}\xi\}]^{-1}\times$$

$$\times\left\{\lim_{m\to\infty}\int_0^\infty \sum_{n=n(m)}^{N(m)} [P\{s_m\zeta_n < t\} - P\{s_m\zeta_{n+1} < t\}]e^{-s_m^\alpha\lambda n} dP\{\xi < t\} + \right.$$

$$\left. + e^{-\Delta\lambda}\int_0^\infty P\{\Delta^{1/\alpha}\zeta < t\} dP\{\xi < t\}\right\}. \tag{16}$$

Так как

$$0 \leqslant \sum_{n=n(m)}^{N(m)} [P s_m\zeta_n < t\} - P\{s_m\zeta_{n+1} < t\}]e^{-s_m^\alpha\lambda n} \leqslant$$

$$\leqslant 1 - \sum_{n=n(m)}^{N(m)} P\{s_m\zeta_n < t\}e^{-s_m^\alpha\lambda n}(1 - e^{-s_m^\alpha\lambda}) \leqslant 1,$$

то при $m\to\infty$ в правой части (16) знаки предела и интеграла можно поменять местами. В силу леммы имеем

$$\lim_{m\to\infty} P_m(e^{-s_m^\alpha\lambda}) = [P\{\zeta < \delta^{-1/\alpha}\xi\}]^{-1}\cdot\{e^{-\Delta\lambda}P\{\zeta < \Delta^{-1/\alpha}\xi\} +$$

$$+ \int_0^\infty dP\{\xi < t\}\int_{t^\alpha\Delta^{-1}}^{t^\alpha\delta^{-1}} e^{-\lambda t^\alpha y^{-1}} d_y P\{\zeta^\alpha < y\} = [P\{\zeta < \delta^{-1/\alpha}\xi\}]^{-1}\times$$

$$\times\left\{M\int_0^\infty e^{-\lambda\xi^\alpha y^{-1}}\chi(\Delta^{-1}\xi^\alpha < y < \delta^{-1}\xi^\alpha) d_y P\{\zeta^\alpha < y\} + e^{-\Delta\lambda}P\{\zeta < \Delta^{-1/\alpha}\xi\}\right\}$$

и, значит,

$$\lim_{m\to\infty} P_m(e^{-s_m^\alpha\lambda}) = P\{(\xi\zeta^{-1})^\alpha > \delta\} M\{\exp\{-\lambda\max(\Delta, (\xi\zeta^{-1})^\alpha)\}\chi((\xi\zeta^{-1})^\alpha > \delta)\},$$

откуда следует (15).

Положим ($t>0$, $m\geqslant 0$):

$$\Phi^m(t)=\sum_{k<t} p_{km},\quad \tau_m(t)=\ln[1-\Phi_m(t)].$$

Тогда $\Phi_m(t)=1$ при $t>N(m)-n(m)$ и для целых $n$ ($0\leqslant n\leqslant N(m)-$ $-n(m)$) имеем

$$1-\Phi_m(n)=\sum_{k\geqslant n} p_{km}=\frac{a_{n+n(m),\,m}}{a_{n(m),\,m}}. \tag{17}$$

Поскольку при целых $n(0\leqslant n<N(m)-n(m))$, в силу условий теоремы и (17), выполнено неравенство

$$\tau_m(n+1)+\tau_m(n-1)-2\tau_m(n)=\ln\left[\frac{(a_{n+n(m)+1,\,m})/(a_{n+n(m),\,m})}{(a_{n+n(m),\,m})/(a_{n+n(m),\,m})}\right]\leqslant 0, \tag{18}$$

то можно построить выпуклую вверх функцию $\tau^*_m(t)$, обладающую следующими свойствами:

1) при целых $t$ ($0\leqslant t<N(m)-n(m)$, $\tau^*_m(t)=\tau_m(t)$;

2) $\tau^*_m(t)$ непрерывна при $t\geqslant 0$;

3) $\tau^*_m(t)$ линейна на отрезке $[n, n+1)$ ($0\leqslant n\leqslant N(m)-n(m)-2$);

4) $\tau^*_m(t)$ выпукла на отрезке $[N(m)-n(m)-2,\ N(m)-n(m))$;

5) существует предел $\lim\limits_{t\uparrow(N(m)-n(m))}\tau^*_m(t)=+\infty$.

Введем в рассмотрение функию

$$\Phi^*_m(t)=\begin{cases}1-\exp\{\tau^*_m(t)\}, & \text{если}\quad t<N(m)-n(m),\\ 1, & \text{если}\quad t\geqslant N(m)-n(m).\end{cases}$$

Так как в силу (18) $\tau^*_m(t)$ выпукла вверх и $\tau^*_m(\theta)=\tau_m(0)=0$, то по [1], с. 44, $\Phi^*_m(t)$—стареющая ФР.

Поскольку $\Phi^*_m(t)$ непрерывна при $t\geqslant 0$ и $\Phi_m(t)=\Phi^*_m(t)$ при целых $t$, то для всех $t\geqslant 0$ имеем $\Phi_m(t)\leqslant\Phi^*_m(t)\leqslant\Phi_m(t+1)$.

Последние соотношения позволяют выписать следующую цепочку неравенств

$$[1-P_m(e^{-s^\alpha_m\lambda})](\lambda s^\alpha_m)^{-1}=\int_0^\infty e^{-s^\alpha_m\lambda t}[1-\Phi_m(t)]dt\geqslant$$

$$\geqslant\int_0^\infty e^{-\lambda s^\alpha_m}[1-\Phi^*_m(t)]dt\geqslant\int_0^\infty e^{-\lambda s^\alpha_m t}[1-\Phi_m(t+1)]\,dt=$$

$$=e^{\lambda s^\alpha_m}\left\{(1-P_m(e^{-s^\alpha_m\lambda}))(\lambda s^\alpha_m)^{-1}-p_{0m}\int_0^\infty e^{-\lambda s^\alpha_m t}dt\right\}.$$

Замечая, что $\lim\limits_{m\to\infty} p_{0m}=0$ и $\lim\limits_{m\to\infty} e^{\lambda s^\alpha_m}=1$, заключаем

$$\lim_{m\to\infty}\left|\int_0^{\infty} e^{-\lambda s_m^{\alpha} t}\, d\Phi_m^*(t) - P_m\left(e^{-s_m^{\alpha}\lambda}\right)\right| = 0. \tag{19}$$

Из (15) и (19) следует

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^{\infty} e^{-\lambda s_m^{\alpha} t}\, d\Phi_m^*(t) = M\{e^{-\lambda \max(\Delta, (\xi\zeta^{-1})^{\alpha})} \mid (\xi\zeta^{-1})^{\alpha} > \delta\},$$

поскольку предел стареющих ФР является стареющей ФР, то из старения $\Phi_m^*(t)$ вытекает, что ФР

$$P\{\max(\Delta, (\xi\zeta^{-1})^{\alpha}) < t \mid (\xi\zeta^{-1})^{\alpha} > \delta\}$$

стареющая.

Утверждение пункта 1 теоремы доказано.

Утверждение пункта 2 теоремы выводится из неравенства

$$P\{\varphi(\xi_1+\zeta) < \eta\}\, P\{\varphi(\xi_2) < \eta\} - P\{\varphi(\xi_1) < \eta\}\, P\{\varphi(\xi_2+\zeta) < \eta\} \leqslant 0, \tag{20}$$

доказательством которого мы сейчас займемся.

Выпуклая вверх функция $\varphi(x)$ в каждой точке $x$ имеет правую и левую производные, которые являются по $x$ не возрастающими функциями (см. [2], с. 194). Пусть существует точка $x_0$ $(x_0 > t_0)$, в которой правая производная равна нулю. Тогда $\varphi(x) = \mathrm{const}$ при $x > x_0$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и точку $x_\varepsilon$ $(x_\varepsilon < x_0)$ такую, что $\varphi(x_0 - \varepsilon) \leqslant \varphi(x_\varepsilon) < \varphi(x_0)$. Ясно, что $\varphi'(x_\varepsilon + 0) \overset{\mathrm{def}}{=} K_\varepsilon > 0$.

Положим $x_{1\varepsilon} = K_\varepsilon^{-1}\varphi(x_0) + x_\varepsilon$ и введем в рассмотрение функцию

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon - \dfrac{\varepsilon}{1 + \varepsilon K_\varepsilon (x - x_{1\varepsilon})}, & \text{если } x \geqslant x_{1\varepsilon}, \\ K_\varepsilon (x - x_\varepsilon), & \text{если } x_\varepsilon \leqslant x < x_{1\varepsilon}, \\ 0 & \text{если } x \in (t_0, x_\varepsilon). \end{cases}$$

Функция $g_\varepsilon(x)$ на множестве $[x_1, \infty)$ выпукла вверх и удовлетворяет условиям: $|g_\varepsilon(x)| \leqslant \varepsilon$, $g_\varepsilon'(x_1 + 0) = K_1$. Следовательно, функция $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x) + g_\varepsilon(x)$ на множестве $[t_0, \infty)$ выпукла вверх, возрастает и при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $x \in [t_0, \infty)$ сходится к $\varphi(x)$. Очевидно, функция $\varphi_\varepsilon(x)$ на множестве $A$ имеет обратную функцию $\varphi_\varepsilon^{-1}$, выпуклую вниз и возрастающую.

Поскольку СВ $\eta$—стареющая, то функция $\ln(1 - F(t))$ выпукла вверх (см. [1], с. 44), и так как функция

$$\ln P\{\varphi_\varepsilon^{-1}(\eta) > t\} = \ln P\{\eta > \varphi_\varepsilon(t)\} = \ln(1 - F(\varphi_\varepsilon(t)))$$

также выпукла вверх, то СВ $\tau_\varepsilon = \varphi_\varepsilon^{-1}(\eta)$—стареющая.

Далее СВ $\varphi_\varepsilon(\xi_i + \zeta)$ и $\varphi_\varepsilon(\xi_i)$ $(i = 1, 2)$ с вероятностью единица сходятся соответственно к СВ $\varphi(\xi_i + \xi)$ и $\varphi(\xi_i)$ при $\varepsilon \to 0$. Значит,



9—689

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P\{\xi_i+\zeta<\tau_\varepsilon \mid \xi_i<\tau_\varepsilon\}=\lim_{\varepsilon\to 0} P\{\varphi_\varepsilon(\xi_i+\zeta)<\eta \mid \varphi(\xi_i)<\eta\}=$$

$$= P\{\varphi(\xi_i+\zeta)<\eta \mid \varphi(\xi_i)<\eta\}.$$

Таким образом, неравенство (20) достаточно доказать для случая $\varphi(x)=x$.

Имеем

$$P\{\xi_1+\zeta<\eta\}P\{\xi_2<\eta\}-P\{\xi_2+\zeta<\eta\}P\{\xi_1<\eta\}=$$

$$=\int_0^\infty dP\{\zeta<t\}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[P(x+t<\eta)P(y<\eta)-P(y+t<\eta)P(x<\eta)],$$

$$dP(\xi_1<x)\,dP(\xi_2<y)=\int_0^\infty dP\{\zeta<t\}\iint\limits_{-\infty<y<+\infty}[P(x+t<\eta)P(y<\eta)-$$

$$-P(y+t<\eta)P(x<\eta)](f_1(x)f_2(y)-f_2(x)f_1(y))\,dx\,dy. \tag{21}$$

Так как $\eta$—стареющая СВ, то при $x>y$

$$P(x+t<\eta)P(y<\eta)-P(y+t<\eta)P(x<\eta)=\left[\frac{P(\eta>x+t)}{P(\eta>x)}-\right.$$

$$\left.-\frac{P(\eta>y+t)}{P(\eta>y)}\right]P(\eta>x)P(\eta>y),$$

откуда вкупе с (3), (21) следует (20).

Теорема в случае стареющих СВ $\eta$ доказана.

Замечание. В случае молодеющих СВ $\eta$ доказательство полностью аналогично с заменой $g_\varepsilon(x)$ на функцию

$$g_\varepsilon(x)=\begin{cases}K_\varepsilon(x+\varepsilon-x_\varepsilon)\dfrac{x-x_\varepsilon}{x_0+\varepsilon-x}, & \text{если } x_0\leqslant x<x_0+\varepsilon,\\ +\infty, & \text{если } x\geqslant x_0+\varepsilon,\\ K_\varepsilon(x-x_\varepsilon), & \text{если } x_\varepsilon<x<x_0,\\ 0, & \text{если } x<x_\varepsilon.\end{cases}$$

Выше $x_0$ ($x_0\leqslant+\infty$) выбрано так, что $\varphi(x)=+\infty$ при $x>x_0$ и $x_\varepsilon$— любое число из промежутка $[x_0-\varepsilon,\ x_0)$.

Է. Ա. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ, Գ. Ա. ՊՈՊՈՎ

## ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԾԵՐՈՒԹՅԱՆ ԱՆՀՐԱԺԵՇՏ ԵՎ ԲԱՎԱՐԱՐ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

### Ամփոփում

*Աշխատանքում տրված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ ծերացող և երիտասարդացող պատահական մեծությունների (պ. մ.) համար։ Աշխատանքի հիմնական արդյունքը մասնավոր դեպքում ձևակերպվում է հետևյալ տեսքով։*

*Թեորեմ.—1) Դիցուք ξ-ն պ. մ. է* $F(t)$, $F(+0)=0$, *բաշխման օրենքով* $\{\zeta_n\}_{n\geqslant1}$— *պ. մ. հաջորդականություն է, որը անկախ է ξ-ից և բավարարում հետևյալ պայմանին. գոյություն ունի* $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n(s/n)$, *որը վերջավոր է և կախված չէ s-ից, որտեղ* $\lambda_n(s)=s^{-1}[1-Me^{-s\zeta_{n+1}}(Me^{-s\zeta_n})^{-1}]$,

*Եթե գոյություն ունի ոչ բացասական թվերի* $\{s_m\}_{m\geqslant1}$ *այնպիսի հաջորդականություն, որ ցանկացած* $m$*-ի համար* $|m\geqslant1|$

$$\frac{P(s_m\zeta_{n+1}<\xi)}{P(s_m\zeta_n<\xi)}$$

*հարաբերությունը չի գերազանցում 1-ից և չի աճում (չի նվազում) ըստ* $n$*-ի, ապա ξ-ին ծերացող (երիտասարդացող) պ. մ. է:*

*2) Դիցուք* $\xi_1$, $\xi_2$, $\zeta\geqslant0$ *և* $\eta$ *անկախ պ. մ. են, ընդ որում* $\eta$*-ն ծերացող (երիտասարդացող) է և* $\xi_i$ *պ. մ. ունի* $f_i(t)$ *բաշխման խտություն* $(i=1, 2)$: *Եթե ցանկացած* $x$*-ի և* $y$*-ի* $(x>y)$ *համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը*

$$f_1(x)f_2(y)-f_2(x)f_1(y)\leqslant0 \quad (\geqslant0),$$

*ապա*

$$P(\xi_1+\zeta<\eta\,|\,\xi_1<\eta)\underset{(\geqslant0)}{\leqslant}P(\xi_2+\zeta<\eta\,|\,\xi_2<\eta):$$

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Р. Барлоу, Ф. Прошан.* Математическая теория надежности. М.: Советское радио, 1969.
2. *В. Феллер.* Введение в теорию вероятностей и ее применения, т. 2. М.: Мир, 1967.