ЧАСТЬ I

Д. О. АВЕТИСЯН

О ВЕРОЯТНОСТНОМ ПОДХОДЕ К ПОСТРОЕНИЮ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Часть I, теория

Важнейшим компонентом интеллектуальных систем является память. Важность памяти в процессах обучения, приобретения опыта животными одним из первых отметил гениальный мыслитель древности, основоположник материалистической психологии Аристотель. В знаменитой „Метафизике" он пишет: „Способностью к чувственным восприятиям животные наделены от природы, а на почве чувственного восприятия у одних не возникает память, а у других возникает. И поэтому животные, обладающие памятью, более сообразительны и более понятливы, нежели те, у которых нет способности помнить; причем сообразительны, но не могут научиться все, кто не в состоянии слышать звуки..."

Далее он пишет: „Появляется опыт у людей благодаря памяти; а именно многие воспоминания об одном и том же предмете приобретают значение одного опыта".

Приобретение опыта в современной психологии объясняется наличием у животных условных рефлексов, которые приобретаются отдельными индивидуумами в процессе своего существования и служат механизмом индивидуального приспособления к изменчивым условиям внешней среды. Безусловные же рефлексы, одинаковые у особей данного вида, отождествляются с инстинктами—врожденными ответными реакциями организмов к стабильным условиям жизни. Чем выше интеллектуальный уровень данного индивидуума, тем значительнее в его деятельности роль условных рефлексов.

Несмотря на сложность внутренней структуры и технических средств реализации, подавляющее большинство современных информационно-поисковых систем следует отнести к инстинктивным, так как они лишены возможности приобрести опыт в процессе своего функционирования. Детерминированный принцип построения этих систем придает процессу их функционирования характер жесткой предрешенности, инстинктивности. Авторы этих систем нередко заблуждаются, относя свои разработки к классу интеллектуальных. На самом же деле в упомянутых разработках поведение систем диктуется лишь тем программно-алгоритмическим комплексом, который вводится в ЭВМ человеком. Обучение же систем, приобретение опыта в процессе их функционирования не имеет места.

Отличительным признаком интеллектуальных систем является их способность к обучению: многократные наблюдения за одними и теми же или схожими (с точки зрения данной системы) предметами, объектами приводит к выявлению и регистрации в памяти тех или иных сигналов, статистически устойчиво сопровождающих рассматриваемые предметы, объекты. Таким образом, совокупность наблюдений за единичными случаями „приобретает значение одного опыта" — статистического эксперимента. В контексте приведенной выше цитаты Аристотель процесс обучения связывает с наличием у животных кроме зрения также и слуха. Естественно, что для приобретения опыта вовсе не обязательно присутствие именно данной пары чувственных восприятий. Главным здесь является то, что Аристотель впервые обратил внимание на необходимость для обучения двух и более независимых друг от друга чувственных восприятий. Если одни из этих восприятий функционируют на уровне ощущений, то другие выступают в качестве сопровождающих сигналов, регистрируемых в памяти как своего рода результат статистического эксперимента—обобщенный образ данной группы предметов, объектов. В последующем наличие лишь этих или схожих с ними сигналов является достаточным для суждения о том, что имеют место соответствующие им или схожие группы предметов, объектов.

Руководствуясь соображениями, изложенными выше, при построении систем искусственного интеллекта феноменологических моделей животных, способных к обучению, будем исходить из следующего:

—принцип построения интеллектуальных систем неминуемо должен быть статистическим. Системы, построенные по детерминированному принципу, полностью лишены каких-либо интеллектуальных возможностей;

—интеллектуальные системы должны оперировать группой из нескольких языков, минимально допустимое число которых равно двум;

—механизм функционирования интеллектуальных систем должен располагать возможностью установления транзитивных связей между группами объектов типа „А" и „Б" по следующей схеме:

(группа объектов типа „А") → (образ группы объектов типа „А") ⇄ ⇄ (образ группы объектов типа „Б") ← (группа объектов типа „Б"). Такая схема позволит оценить степень близости, схожести с точки зрения данной системы, объектов типа „А" с объектами типа „Б" путем сопоставления лишь их образов.

В первой части настоящей работы приведены формулировка и доказательство ряда теорем, служащих отправной точкой при построении интеллектуальных систем различного назначения [1, 2]. Примеры построения таких систем, доведенных до практической реализации, приведены во второй части. Материал первой части представляет также самостоятельный интерес в плане возможности его использования при необходимости вычисления ряда интегралов или кратных сумм, обладающих специфическими свойствами симметричности.

Векторное представление размытых подмножеств

Рассмотрим универсальное множество $U=\{u_1 u_2 \ldots u_n\}$, на котором определены размытые (нечеткие) подмножества X_i, характеризующиеся функциями принадлежности μ_i. Последние каждому элементу u_t множества U ставят в соответствие число $\mu_i(u_t)$—степень принадлежности этого элемента размытому подмножеству X_i. Для количественной оценки степени линейного подобия двух размытых подмножеств X_i и X_j будем пользоваться значениями критерия $r(X_i X_j)$, определяемого как:

$$r(X_i X_j)=\frac{\sum_{t=1}^{n}[\mu_i(u_t)-m_i][\mu_j(u_t)-m_j]}{\sqrt{\left\{\sum_{t=1}^{n}[\mu_i(u_t)-m_i]^2\right\}\left\{\sum_{t=1}^{n}[\mu_j(u_t)-m_j]^2\right\}}}, \tag{1}$$

где $m_i=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\mu_i(u_t)$ среднее значение функции принадлежности μ_i [1—5].

Линейными преобразованиями размытого подмножества X_i будем называть подмножества X_j, для которых имеют место

$$\mu_j(u_t)=\beta_{ij}+\alpha_{ij}\mu_i(u_t). \qquad (\alpha_{ij}\neq 0) \tag{2}$$

В зависимости от того, больше или меньше нуля коэффициент α_{ij}, линейное преобразование размытого подмножества X_i будем называть его линейным повторением или линейным дополнением. В первом случае имеет место $r(X_i X_j)=1$, а во втором — $r(X_i X_j)=-1$. Во всех остальных случаях, т. е. когда X_i и X_j не связаны соотношением (2), имеет место $|r(X_i X_j)|<1$.

Если рассматривать значения $\mu_i(u_1)$, $\mu_i(u_2) \ldots \mu_i(u_n)$ как координаты соответствующей точки n-мерного евклидова пространства, то между этой точкой и размытым подмножеством X_i будет иметь место взаимно однозначное соответствие. В дальнейшем как эту точку, так и ее радиус-вектор также будем обозначать через X_i. Все координаты вектора X_{iE}—геометрической проекции вектора X_i на направление вектора $E(11 \ldots 1)$ равны m_i. Легко заметить также, что имеет место

$$r(X_i X_j)=\cos(X_i^* X_j^*), \tag{3}$$

где $X_i^*=X_i-X_{iE}$

Геометрическим местом точек-вершин радиус-векторов типа

$$x_i = \frac{X_i^*}{|X_i^*|} \tag{4}$$

является единичная сфера с центром в начале координат, все радиус-векторы которой перпендикулярны вектору $E(11\ \ldots\ 1)$. Фактическая размерность этой сферы равна $n-1$. Преобразование (4) осуществляет однозначное отображение произвольного размытого подмножества X_i в соответствующую точку x_i этой сферы. Обратное отображение не является однозначным, так как при прямом отображении в одну и ту же точку x_i отображаются все элементы множества размытых подмножеств—линейных повторений размытого подмножества X_i. Элементы же множества размытых подмножеств линейных дополнений размытого подмножества X_i отображаются в точку x_i.

Теоремы транзитивности и синонимии (случай n-мерной сферы)

Теорема 1

Пусть x случайная точка, имеющая равномерное распределение на n-мерной единичной сфере с центром в начале координат, а y_0— произвольная фиксированная точка. Покажем, что при этом

а) $M[\cos(x\,y_0)]=0;$ (5)

б) $M[\cos^2(x\,y_0)]=D[\cos(x\,y_0)]=\frac{1}{n}.$ (6)

Справедливость (5) непосредственно следует из симметричности распределения случайной величины $\cos(x\,y_0)$. Из условия принадлежности точки x рассматриваемой сфере имеем $\sum_{i=1}^{n} x_i^2=1$, т. е. $\sum_{i=1}^{n} M(x_i^2)=1$. Отсюда из соображений симметрии получим $M(x_i^2)=\frac{1}{n}$, т. е. $M[\cos^2(x\,y_0)]=\frac{1}{n}$. С учетом (5) отсюда следует (6).

В частном случае, когда $n=2$, формулировка пункта б) теоремы 1 приводит к известному соотношению

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = \pi.$$

Замечание к теореме 1

Из соображений симметрии легко убедиться, что теорема 1 остается в силе при замене фиксированной точки y_0 случайной точкой y, имеющей произвольное независимое от x распределение.

Теорема 2

Пусть x и y независимые случайные точки, имеющие равномерные распределения на соответствующих множествах точек рассматриваемой сферы, определенных фиксированными значениями $\cos(xz_0)$ и $\cos(yz_0)$, где $z_0(z_{01}\, z_{02} \ldots z_{0n})$ произвольная фиксированная точка. Покажем, что при этом

а) $M[\cos(xy)] = \cos(xz_0)\cos(yz_0);$ (7)

б) $D[\cos(xy)] = \dfrac{1}{n-1}\sin^2(xz_0)\sin^2(yz_0);$ (8)

в) в области $\cos^2(xz_0)+\cos^2(yz_0)<1$ величина $\left\{P[\cos(xy)>0]-\dfrac{1}{2}\right\}$ является монотонно возрастающей нечетной функцией аргумента $\cos(xz_0)\cos(yz_0)$;

г) в области $\cos^2(xz_0)+\cos^2(yz_0)\geqslant 1$ имеет место

$$\left\{P[\cos(xy)>0]-\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}\operatorname{sgn}[\cos(xz_0)\cos(yz_0)].$$

Действительно, приняв в качестве базы n-мерного евклидова пространства систему векторов, один из которых (например, с индексом 1) проходит через точку z_0, получим:

$$\cos(xy) = \cos(xz_0)\cos(yz_0) + \sum_{i=2}^{n} x_i y_i.$$

Легко показать, что закон распределения случайной величины $\sum_{i=2}^{n} x_i y_i$ совпадает с законом распределения случайной величины $R_1 R_2 \cos(uv)$, где $R_1=\sqrt{1-\cos^2(xz_0)}$, $R_2=\sqrt{1-\cos^2(yz_0)}$, а $u=(u_1\, u_2 \ldots u_{n-1})$ и $v=(v_1\, v_2 \ldots v_{n-1})$ радиус-векторы независимых случайных точек, имеющих равномерные распределения на $(n-1)$-мерной единичной сфере с центром в начале координат. Отсюда с учетом (5), (6) и замечания к теореме 1 легко убедиться в справедливости всех пунктов теоремы 2. Из (7), (8) легко получить выражение для $M[\cos^2(xy)]$:

$$M[\cos^2(xy)] = \frac{1}{n-1}\sin^2(xz_0)\sin^2(yz_0)+\cos^2(xz_0)\cos^2(yz_0). \quad (9)$$

Заметим, что пункт г) настоящей теоремы остается в силе при произвольных законах распределений случайных точек x и y на упомянутых выше множествах точек сферы.

В частном случае, когда $n=2$, формулировки пунктов а) и б) теоремы 2 приводят к известным соотношениям:

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cdot\cos\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta.$$

З а м е ч а н и е к т е о р е м е 2

Теорема 2 остается справедливой при замене случайной точки y произвольной фиксированной точкой $y_0\,(y_{01}\, y_{02} \ldots y_{0n})$ с заданным значением $\cos(y_0 z_0)$. Действительно, при этом в выражении $R_1 R_2 \cos(uv)$

вместо случайной точки $v(v_1 v_2 \dots v_{n-1})$ приходится рассматривать фиксированную точку $v_0(v_{01} v_{02} \dots v_{0(n-1)})$ $(n-1)$-мерной единичной сферы, что не сказывается на распределении случайной величины $R_1R_2\cos(uv)$ (см. замечание к теореме 1).

Теорема 3 (основная теорема транзитивности, обобщение пунктов а) и б) теоремы 2)

Пусть x и y независимые случайные точки, имеющие равномерные распределения на соответствующих множествах точек рассматриваемой сферы, определенных фиксированными значениями $\cos(xz_0)$ и $\cos(yq_0)$, где z_0 и q_0 произвольные фиксированные точки. Покажем, что при этом

$$\text{а)}\quad M[\cos(xy)] = \cos(xz_0)\cos(yq_0)\cos(z_0q_0); \tag{10}$$

$$\text{б)}\quad D[\cos(xy)] = \frac{n-2}{(n-1)^2} + \frac{1}{(n-1)^2}[\cos^2(xz_0) + \cos^2(yq_0) + \cos^2(z_0q_0)] -$$

$$-\frac{n}{(n-1)^2}[\cos^2(xz_0)\cos^2(yq_0) + \cos^2(xz_0)\cos^2(z_0q_0) + \cos^2(yq_0)\cos^2(z_0q_0)] +$$

$$+\frac{2n-1}{(n-1)^2}\cos^2(xz_0)\cos^2(yq_0)\cos^2(z_0q_0). \tag{11}$$

Действительно, приняв в качестве базы n-мерного пространства систему векторов, один из которых (например, с индексом 1) проходит через точку z_0, получим:

$$x_1 = \cos(xz_0), \quad y_1 = \cos(yz_0), \quad M(x_2) = M(x_3) = \dots = M(x_n) = 0.$$

Отсюда, в силу независимости случайных точек x и y, а также с учетом (7) и замечания к теореме 2 получим:

$$M[\cos(xy)] = \sum_{i=1}^{n} M(x_i)M(y_i) = \cos(xz_0)M[\cos(yz_0)] =$$

$$= \cos(xz_0)\cos(yq_0)\cos(z_0q_0).$$

Из соотношения $\cos(xy) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ имеем:

$$\cos^2(xy) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^2 + 2\sum_{\substack{i=1\\(n\geqslant e>i)}}^{n-1} (x_i y_i)(x_e y_e),$$

или

$$M[\cos^2(xy)] = M\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\, y_i^2\right) + 2M\left[\sum_{\substack{i=1\\(n\geqslant e>i)}}^{n-1} (x_i y_i)\,(x_e y_e)\right]. \tag{12}$$

В силу независимости случайных точек x и y с учетом симметрии получим:

$$M\left[\sum_{\substack{i=1\\n\geqslant e>i)}}^{n-1} (x_i y_i)\,(x_e y_e)\right] = \sum_{\substack{i=1\\(n\geqslant e>i)}}^{n-1} M(x_i x_e)\, M(y_i y_e) = 0.$$

Пользуясь соотношениями $x_1=\cos(xz_0)$, $\sum_{i=1}^{n} M(x_i^2)=1$, $\sum_{i=1}^{n} M(y_i^2)=1$, выражением (9), замечанием к теореме 2 и с учетом симметрии из (12) получим:

$$M[\cos^2(xy)]=\sum_{i=1}^{n} M(x_i^2)M(y_i^2)=\cos^2(xz_0)\left[\frac{1}{n-1}\sin^2(yq_0)\sin^2(z_0q_0)+\right.$$

$$\left.+\cos^2(yq_0)\cos^2(z_0q_0)\right]+\frac{1}{n-1}\sin^2(xz_0)\left[1-\frac{1}{n-1}\sin^2(yq_0)\sin^2(z_0q_0)-\right.$$

$$\left.-\cos^2(yq_0)\cos^2(z_0q_0)\right]=\frac{n-2}{(n-1)^2}+\frac{1}{(n-1)^2}[\cos^2(yq_0)+\cos^2(xz_0)+$$

$$+\cos^2(z_0q_0)]-\frac{n}{(n-1)^2}[\cos^2(xz_0)\cos^2(yq_0)+\cos^2(xz_0)\cos^2(z_0q_0)+$$

$$+\cos^2(yq_0)\cos^2(z_0q_0)]+\frac{n^2}{(n-1)^2}\cos^2(xz_0)\cos^2(yq_0)\cos^2(z_0q_0). \tag{13}$$

Отсюда с учетом (10) легко получить (11).

В частном случае, когда векторы z_0 и q_0 совпадают, т. е. $\cos(z_0q_0)=1$, выражения (10), (11) и (13) совпадают соответственно с выражениями (7), (8) и (9).

Теорема 4 (основная теорема синонимии, обобщение пункта б) теоремы 1).

Пусть x случайная точка, имеющая равномерное распределение на n-мерной единичной сфере с центром в начале координат, а z_0 и q_0 произвольные фиксированные точки. Покажем, что при этом

$$M[\cos(xz_0)\cos(xq_0)]=\frac{1}{n}\cos(z_0q_0). \tag{14}$$

Действительно, приняв в качестве базы n-мерного пространства систему векторов, один из которых (например, с индексом 1) проходит через точку z_0, а другой (например, с индексом 2) принадлежит плоскости, содержащей радиус-векторы точек z_0 и q_0, получим $\cos(xz_0)=x_1$, $\cos(z_0q_0)=q_{01}$, $q_{03}=q_{04}=\ldots=q_{0n}=0$, $\cos(xq_0)=x_1q_{01}+x_2q_{02}$, $\cos(xz_0)\cos(xq_0)=q_{01}x_1^2+q_{02}x_1x_2$,

$$M[\cos(xz_0)\cos(xq_0)]=\cos(z_0q_0)M(x_1^2)+q_{02}M(x_1x_2).$$

В силу симметрии и с учетом (6) имеем $M(x_1x_2)=0$, $M(x_1^2)=\frac{1}{n}$

т. е. $M[\cos(xz_0)\cos(xq_0)]=\frac{1}{n}\cos(z_0q_0)$.

В частном случае, когда векторы z_0 и q_0 совпадают, т. е. $\cos(z_0q_0)=1$, выражение (14) совпадает с выражением (6).

В случае, когда $n=2$, формулировка теоремы 4 приводит к известному соотношению:

$$\int_0^{2\pi} \cos(\alpha-\varphi)\cos\varphi d\varphi=\pi\cos\alpha.$$

Выше мы убедились, что мера количественной оценки степени линейного подобия двух размытых подмножеств X_i и X_j—критерий $r(X_iX_j)$, численно равен величине $\cos(X_i^* X_j^*)$ или, что то же самое, $\cos(x_ix_j)$, где x_i и x_j отображения соответствующих размытых подмножеств на единичную сферу с центром в начале координат, все радиус-векторы которой перпендикулярны вектору $E(11...1)$. В теоремах $1\div4$ рассматривались случаи, когда интересующие нас случайные точки имели непрерывные распределения на единичной сфере с центром в начале координат или на соответствующих множествах ее точек. При решении же ряда прикладных задач по построению систем, наделенных интеллектом, приходится иметь дело со множествами размытых подмножеств, соответствующие которым случайные точки имеют дискретные распределения на единичной сфере или на соответствующих подмножествах ее точек. В некоторых из этих случаев, имеющих важное прикладное значение, имеют место теоремы—дискретные аналоги теорем $1\div4$. В частности, такие теоремы имеют место при рассмотрении важнейшего класса размытых подмножеств—класса бинарных размытых подмножеств.

Класс бинарных размытых подмножеств

Бинарными будем называть размытые подмножества X_i, шкала возможных значений $\mu_i(u_t)$ которых состоит лишь из двух значений. В частном случае, когда шкала возможных значений содержит лишь значения „0" и „1", задание размытого подмножества X_i на универсальном множестве U выделяет обыкновенное его подмножество $X_i(1)$, состоящее из элементов с $\mu_i(u_t)=1$, и его дополнение $X_i(0)=\overline{X_i(1)}$, состоящее из элементов с $\mu_i(u_t)=0$. Исходя из этого ниже мы будем оперировать лишь обыкновенными подмножествами X_i универсального множества U, отождествляя их с $X_i(1)$. Каждому обыкновенному подмножеству X_i при этом ставится в соответствие n-мерный вектор $X_i(X_{i1}\,X_{i2}\,...\,X_{in})$, t-тая координата которого равна единице или нулю в зависимости от того, принадлежит или нет t-тый элемент универсального множества U данному подмножеству X_i. Число различных подмножеств, определенных на универсальном множестве U из n элементов, равно 2^n. Геометрическим местом точек X_i, радиус-векторы которых представляют эти подмножества, являются 2^n вершины n-мерного куба. Точки $\varnothing(00\,...\,0)$, $E(11\,...\,1)$ и соответствующие им подмножества--нулевое подмножество и его дополнение, совпадающее с универсальным множеством U, в дальнейшем не будем рассматривать, так как, во-первых, они не представляют практического интереса, а во-вторых, на них не определены значения критерия $r(X_iX_j)$. Из (1) легко убедиться, что для произвольных других из оставшихся 2^n-2 подмножеств имеют место

$$r(X_i X_j)=\frac{na_{x_ix_j}-a_{x_i}a_{x_j}}{\sqrt{a_{x_i}a_{x_j}(n-a_{x_i})(n-a_{x_j})}}, \tag{15}$$

где

a_{x_i}—число элементов подмножества X_i;

$a_{x_ix_j}$—число элементов подмножества $X_i\cap X_j$.

Легко убедиться также, что имеют место

$$r(X_iX_j)=r(X_jX_i)=-r(X_i\overline{X}_j),\ r(X_iX_i)=1, \tag{16}$$

т. е. $r(X_iX_j)$ является симметричной мерой совпадения подмножеств X_i и X_j. Заметим, что линейное повторенне произвольного обыкновенного подмножества X_i совпадает с самим этим подмножеством, а линейное дополнение — с обычным его дополнением $\overline{X}_i$. При этом наличие элемента x_i во множестве радиус-векторов типа x предопределяет наличие в этом же множестве радиус-вектора $-x_i$, соответствующего подмножеству $\overline{X}_i$.

Прежде чем приступить к формулировке и доказательству ряда теорем—дискретных аналогов теорем $1\div4$, приведем доказательство одного соотношения, являющегося обобщением теоремы сложения, которой, как и ее обобщением, будем пользоваться ниже.

Обобщение теоремы сложения

Известная в литературе теорема сложения гласит:

$$\sum_{q=0}^{\alpha} C_\alpha^q C_{n-\alpha}^{\beta-q}=C_n^\beta. \tag{17}$$

Покажем сначала, что имеет место

$$\sum_{q=0}^{\alpha} q^k C_\alpha^q C_{n-\alpha}^{\beta-q}=\sum_{i=1}^{k} C_\alpha^i C_{n-i}^{\beta-i} A_k(i), \tag{18}$$

где

$$A_k(i)=\sum_{t=1}^{i} C_i^t t^k(-1)^{i+t}.$$

Представим выражение q^k в виде суммы

$$q^k=\sum_{i=1}^{k} a_k(i)\prod_{j=0}^{i-1}(q-j). \tag{19}$$

Подставляя здесь поочередно $q=1, 2\ \dots\ k$, относительно $a_k(i)$, получим систему линейных уравнений, решение которой приводит к

$$a_k(i)=\frac{1}{i!}\sum_{t=1}^{i}(-1)^{i+t}C_i^t t^k. \tag{20}$$

Путем очевидных преобразований отсюда с учетом (19) получим:

$$q^k C_\alpha^q = \sum_{i=1}^{k} a_k(i) C_\alpha^q \prod_{j=0}^{i-1} (q-j) = \sum_{i=1}^{k} C_\alpha^i C_{\alpha-i}^{q-i} A_k(i), \tag{21}$$

где

$$A_k(i) = a^k(i) i! = \sum_{t=1}^{i} C_i^t t^k (-1)^{i+t}. \tag{22}$$

С учетом (21) имеем:

$$\sum_{q=0}^{\alpha} q^k C_\alpha^q C_{n-\alpha}^{\beta-q} = \sum_{q=0}^{\alpha} \sum_{i=1}^{k} C_\alpha^i C_{\alpha-i}^{q-i} C_{n-\alpha}^{\beta-q} A_k(i) = \sum_{i=1}^{k} C_\alpha^i A_k(i) \sum_{q=0}^{\alpha} C_{\alpha-i}^{q-i} C_{n-\alpha}^{\beta-q}. \tag{23}$$

Введя новую переменную $z = q - i$ и пользуясь теоремой сложения (17), получим:

$$\sum_{q=0}^{\alpha} C_{\alpha-i}^{q-i} C_{n-\alpha}^{\beta-q} = \sum_{z=-i}^{\alpha-i} C_{\alpha-i}^{z} C_{(n-i)-(\alpha-i)}^{(\beta-i)-z} = C_{n-i}^{\beta-i}. \tag{24}$$

Подставляя этот результат в (23), приходим к (18). Из (18), (19) и (22) легко получить соотношение

$$\sum_{q=i}^{\alpha} C_\alpha^q C_{n-\alpha}^{\beta-q} C_q^i = C_\alpha^i C_{n-i}^{\beta-i}, \tag{18a}$$

которое при $i=0$ совпадает с (17). Отсюда, как и впрочем из (18), легко получить:

$$\sum_{q=0}^{\alpha} q C_\alpha^q C_{n-\alpha}^{\beta-q} = \alpha C_{n-1}^{\beta-1}; \tag{25}$$

$$\sum_{q=0}^{\alpha} q^2 C_\alpha^q C_{n-\alpha}^{\beta-q} = \frac{\alpha(n-\alpha-\beta+\alpha\beta)}{\beta-1} \cdot C_{n-2}^{\beta-2}. \tag{26}$$

Дискретные аналоги теорем транзитивности и синонимии (случай n-мерного куба)

Будем рассматривать множество V, элементами которого служат 2^n-2 точки — все вершины n-мерного единичного куба за исключением точек $\varnothing(00\ldots0)$ и $E\ (11\ldots1)$. Напомним, что это точки — отображения в n-мерном евклидовом пространстве всех возможных обыкновенных подмножеств X универсального множества U за исключением нулевого подмножества и его дополнения, совпадающего со множеством U.

Теорема 5 (дискретный аналог теоремы 1)

Пусть X случайная точка, имеющая равномерное распределение на элементах множества V, а Y_0 произвольный фиксированный элемент этого множества. Покажем, что при этом

а) $M[r(XY_0)] = 0;$ (27)

б) $M[r^2(XY_0)] = D[r(XY_0)] = \dfrac{1}{n-1}.$ (28)

или для радиус-векторов $x = \dfrac{X^*}{|X^*|}$ и $y_0 = \dfrac{Y_0^*}{|Y_0^*|}$:

в) $M[\cos(xy_0)] = 0;$ (27а)

г) $M[\cos^2(xy_0)] = D[\cos(xy_0)] = \frac{1}{n-1}$. (28а)

Справедливость пункта а) или, что то же самое, пункта в) непосредственно следует из симметричности распределения случайной величины $r(XY_0) = \cos(xy_0)$, в чем легко убедиться из (16).

Для доказательства пункта б) или, что то же самое, пункта г) пользуемся соотношениями (17), (25) и (26). Покажем, что (28) имеет место при произвольном фиксированном значении a_x, что, очевидно, является достаточным условием для его утверждения в общем случае, т. е. при равномерном распределении случайной точки X на всех элементах множества V.

Из (15) с учетом (17), (25), (26) и (27) получим:

$$M[r^2(XY_0)] = D[r(XY_0)] = \frac{1}{C_n^{a_x}} \sum_{a_{xy_0}=0}^{a_{y_0}} \frac{(a_{xy_0}n - a_x a_{y_0})^2}{a_x a_{y_0}(n-a_x)(n-a_{y_0})} C_{a_{y_0}}^{a_{xy_0}} C_{n-a_{y_0}}^{a_x - a_{xy_0}} =$$

$$= \frac{1}{a_x a_{y_0}(n-a_x)(n-a_{y_0}) C_n^{a_x}} \left(n^2 \sum_{a_{xy_0}=0}^{a_{y_0}} a_{xy_0}^2 C_{a_{y_0}}^{a_{xy_0}} C_{n-a_{y_0}}^{a_x - a_{xy_0}} - \right.$$

$$\left. - 2n a_x a_{y_0} \sum_{a_{xy_0}=0}^{a_{y_0}} a_{xy_0} C_{a_{y_0}}^{a_{xy_0}} C_{n-a_{y_0}}^{a_x - a_{xy_0}} + a_x^2 a_{y_0}^2 \sum_{a_{xy_0}=0}^{a_{y_0}} C_{a_{y_0}}^{a_{xy_0}} C_{n-a_{y_0}}^{a_x - a_{xy_0}} \right) = \frac{1}{n-1}.$$

Замечание к теореме 5

Из соображений симметрии легко убедиться, что теорема 5 остается в силе при замене фиксированной точки Y_0 случайной точкой Y, имеющей произвольное, независимое от X распределение на элементах множества V.

Теорема 6

Пусть X случайная точка, имеющая равномерное распределение на элементах множества V, определенных заданным значением $r(XZ_0)$, где Z_0—произвольный фиксированный элемент множества V. Покажем, что при этом

$$M(x - \text{Пр}_{z_0} x) = 0. \tag{29}$$

Из (15) следует, что заданное значение $r(XZ_0)$ в общем случае может быть достигнуто при различных парах значений a_{xz_0} и a_x. Покажем, что для произвольной фиксированной пары значений a_{xz_0} и a_x имеет место $M(x - \text{Пр}_{z_0} x) = 0$, что, очевидно, является достаточным условием для утверждения $M(x - \text{Пр}_{z_0} x) = 0$ в общем случае. Для удобства изложения в дальнейшем координатные представления n-мерных векторов будем рассматривать как соответствующие n-разрядные коды.

Будем различать так называемые зоны нулей и единиц, включающие разряды, где код вектора Z_0 содержит соответственно нули и единицы. Значения каждого разряда кода вектора z_0 в этих зонах соответственно равны

$$-\frac{\sqrt{a_{z_0}}}{\sqrt{n(n-a_{z_0})}} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{n-a_{z_0}}}{\sqrt{n a_{z_0}}},$$

т. е. соответствующие разряды кода вектора $\text{Пр}_{z_0}x$ равны

$$-\frac{\sqrt{a_{z_0}}\,r(XZ_0)}{\sqrt{n(n-a_{z_0})}} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{n-a_{z_0}}\,r(XZ_0)}{\sqrt{na_{z_0}}}. \tag{30}$$

Легко показать, что при фиксированных значениях a_{xz_0} и a_x средние значения каждого разряда кода вектора x в зонах нулей и единиц соответственно равны:

$$\frac{a_x a_{z_0}-na_{xz_0}}{(n-a_{z_0})\sqrt{na_x(n-a_x)}} \quad \text{и} \quad \frac{na_{xz_0}-a_x a_{z_0}}{a_{z_0}\sqrt{na_x(n-a_x)}},$$

откуда с учетом (15) и (30) непосредственно следует справедливость (29).

Теорема 7 (дискретный аналог теоремы 2)

Пусть X и Y независимые случайные точки, имеющие равномерные распределения на соответствующих элементах множества V, определенных заданными значениями $r(XZ_0)$ и $r(YZ_0)$, где Z_0—произвольный фиксированный элемент множества V. Покажем, что при этом имеет место дискретный аналог пункта а) теоремы 2:

а) $M[r(XY)]=r(XZ_0)\,r(YZ_0)$, (31)

или для радиус-векторов x, y и z_0:

б) $M[\cos(xy)]=\cos(xz_0)\cos(yz_0)$. (31а)

Из уравнения

$$\cos(xy)=\cos(xz_0)\cos(yz_0)+(x-\text{Пр}_{z_0}x)(y-\text{Пр}_{z_0}y)$$

с учетом независимости случайных точек X и Y имеем

$$M[\cos(xy)]=\cos(xz_0)\cos(yz_0)+M(x-\text{Пр}_{z_0}x)M(y-\text{Пр}_{z_0}y).$$

Здесь в силу теоремы 6 как $M(x-\text{Пр}_{z_0}x)$, так и $M(y-\text{Пр}_{z_0}y)$ равны нулю, что свидетельствует о справедливости (31а) или, что то же самое, (31).

Дискретный аналог пункта б) теоремы 2, а именно:

в) $D[r(XY)]=\dfrac{1}{n-2}[1-r^2(XZ_0)][1-r^2(YZ_0)]$ (32)

или для радиус-векторов x, y и z_0:

г) $D[\cos(xy)]=\dfrac{1}{n-2}\sin^2(xz_0)\sin^2(yz_0)$ (32а)

в общем случае не имеет место. Эти соотношения имеют место лишь в отдельных частных случаях, например, в тривиальных случаях, когда имеет место какое-либо одно из следующих условий:

$$r(XY)=\pm 1,\ r(XY)=\pm r(XZ_0),\quad r(XY)=\pm r(YZ_0).$$

Во всех этих случаях имеет место $[1-r^2(XZ_0)][1-r^2(YZ_0)]=0$, т. е. левая и правая части (32) одновременно равны нулю.

Пользуясь (17), (25) и (26) можно показать, что (32) имеет место также в ряде нетривиальных случаев, например, когда $a_{z_0}=1$ или $a_{z_0}=n-1$. Пусть, например, $a_{z_0}=1$. Легко убедиться, что при этом задание пары значений $r(XZ_0)$ и $r(YZ_0)$ фиксирует единственную четверку значений a_{xz_0}, a_{yz_0}, a_x и a_y. Число разрядов, где коды векторов X и Y одновременно содержат единицы, обозначим через $q+a_{xz_0}a_{yz_0}$. Тогда из (15) с учетом (17), (25), (26) и (31) получим:

$$D[r(XY)]=M[r^2(XY)]-M^2[r(XY)]=$$

$$=\frac{1}{C_{n-1}^{a_y-a_{yz_0}}}\sum_{q=0}^{a_x-a_{xz_0}}\left[\frac{n(q+a_{xz_0}a_{yz_0})-a_xa_y}{\sqrt{a_xa_y(n-a_x)(n-a_y)}}\right]^2 C_{a_x-a_{xz_0}}^{q}\,C_{(n-1)-(a_x-a_{xz_0})}^{(a_y-a_{yz_0})-q}-$$

$$-r^2(XZ_0)\,r^2(YZ_0)=\frac{1}{a_xa_y(n-a_x)(n-a_y)}\left[\frac{n^2}{C_{n-1}^{a_y-a_{yz_0}}}\sum_{q=0}^{a_x-a_{xz_0}}q^2C_{a_x-a_{xz_0}}^{q}\times\right.$$

$$\times C_{(n-1)-(a_x-a_{xz_0})}^{(a_y-a_{yz_0})-q}+\frac{2n(na_{xz_0}a_{yz_0}-a_xa_y)}{C_{n-1}^{a_y-a_{yz_0}}}\sum_{q=0}^{a_x-a_{xz_0}}qC_{a_x-a_{xz_0}}^{q}\,C_{(n-1)-(a_x-a_{xz_0})}^{(a_y-a_{yz_0})-q}+$$

$$\left.+\frac{(na_{xz_0}a_{yz_0}-a_xa_y)^2}{C_{n-1}^{a_y-a_{yz_0}}}\sum_{q=0}^{a_x-a_{xz_0}}C_{a_x-a_{xz_0}}^{q}\,C_{(n-1)-(a_x-a_{xz_0})}^{(a_y-a_{yz_0})-q}\right]-r^2(XZ_0)r^2(YZ_0)=$$

$$=\frac{1}{n-2}[1-r^2(XZ_0)][1-r^2(YZ_0)].$$

Из факта соблюдения при $a_{z_0}=1$ соотношения (32) или, что то же самое, (32а) непосредственно следует их справедливость также при $a_{z_0}=n-1$. Действительно, пусть рассматривается произвольный вектор Z_0, код которого содержит $n-1$ единиц. Считаются заданными значения $r(XZ_0)$ и $r(YZ_0)$. Рассматривая вместо вектора Z_0 вектор $\overline{Z}_0$, согласно (16) имеем $r(X\overline{Z}_0)=-r(XZ_0)$, $r(Y\overline{Z}_0)=-r(YZ_0)$. Очевидно, в коде вектора $\overline{Z}_0$ содержится лишь одна единица, т. е. имеет место

$$D[r(XY)]=\frac{1}{n-2}[1-r^2(X\overline{Z}_0)][1-r^2(Y\overline{Z}_0)]=$$

$$=\frac{1}{n-2}[1-r^2(XZ_0)][1-r^2(YZ_0)].$$

Замечание к теореме 7

Легко заметить, что (31) и (31а) остаются в силе при замене случайной точки Y произвольным фиксированным элементом Y_0, удовлетворяющим заданному значению $r(Y_0Z_0)$.

Действительно, при этом

$$M[\cos(xy)]=\cos(xz_0)\cos(yz_0)+(y_0-\text{Пр}_{z_0}y_0)M(x-\text{Пр}_{z_0}x),$$

где в силу теоремы 6 имеет место $M(x-\text{Пр}_{z_0}x)=0$.

Легко заметить, что по крайней мере для рассмотренных нами случаев $a_{z_0}=1$ и $a_{z_0}=n-1$ при такой замене остаются в силе также (32) и (32а).

Теорема 8 (дискретный аналог основной теоремы транзитивности, обобщение теоремы 7)

Пусть X и Y независимые случайные точки, имеющие равномерные распределения на соответствующих элементах множества V, определенных заданными значениями $r(XZ_0)$ и $r(YQ_0)$, где Z_0 и Q_0 произвольные фиксированные элементы множества V. Покажем, что при этом имеет место дискретный аналог пункта а) теоремы 3;

$$\text{а)}\ M[r(XY)] = r(XZ_0)r(YQ_0)r(Z_0Q_0), \tag{33}$$

или для радиус-векторов x, y, z_0 и q_0:

$$\text{б)}\ M[\cos(xy)] = \cos(xz_0)\cos(yq_0)\cos(z_0q_0). \tag{33а}$$

Действительно, из уравнения

$$\cos(xy) = \cos(xz_0)\cos(yz_0) + (x - \text{Пр}_{z_0}x)(y - \text{Пр}_{z_0}y)$$

в силу независимости случайных точек X и Y получим:

$$M[\cos(xy)] = \cos(xz_0)M[\cos(yz_0)] + M(x - \text{Пр}_{z_0}x)M(y - \text{Пр}_{z_0}y),$$

где в силу теоремы 6 имеет место $M(x - \text{Пр}_{z_0}x) = 0$, а в силу замечания к теореме 7 $M[\cos(yz_0)] = \cos(yq_0)\cos(q_0z_0)$, т. е. имеем

$$M[\cos(xy)] = \cos(xz_0)\cos(yq_0)\cos(q_0z_0),$$

или, что то же самое,

$$M[r(XY)] = r(XZ_0)r(YQ_0)r(Q_0Z_0).$$

В частном случае, когда векторы Z_0 и Q_0 совпадают, т. е. $r(Z_0Q_0) = 1$, выражение (33) совпадает с (31).

Дискретный аналог пункта б) теоремы 3, а именно:

$$\text{в)}\ D[r(XY)] = \frac{n-3}{(n-2)^2} + \frac{1}{(n-2)^2}[r^2(XZ_0) + r^2(YQ_0) + r^2(Z_0Q_0)] -$$

$$- \frac{(n-1)}{(n-2)^2}[r^2(XZ_0)r^2(YQ_0) + r^2(XZ_0)r^2(Z_0Q_0) + r^2(YQ_0)r^2(Z_0Q_0)] +$$

$$+ \frac{2(n-1)-1}{(n-2)^2} \cdot r^2(XZ_0)r^2(YQ_0)r^2(Z_0Q_0), \tag{34}$$

или для радиус-векторов x, y, z_0 и q_0:

$$\text{г)}\ D[\cos(xy)] = \frac{n-3}{(n-2)^2} + \frac{1}{(n-2)^2}[\cos^2(xz_0) + \cos^2(yq_0) +$$

$$+ \cos^2(z_0q_0)] - \frac{n-1}{(n-2)^2}[\cos^2(xz_0)\cos^2(yq_0) + \cos^2(xz_0)\cos^2(z_0q_0) +$$

$$+ \cos^2(yq_0)\cos^2(z_0q_0)] + \frac{2(n-1)-1}{(n-2)^2}\cos^2(xz_0)\cos^2(yq_0)\cos^2(z_0q_0) \tag{34а}$$

в общем случае не имеет место. Эти соотношения имеют место лишь в отдельных частных случаях. Докажем, например, их справедливость для случаев, когда $a_{z_0} = a_{q_0} = 1$, т. е. когда коды векторов Z_0 и Q_0

содержат по одной единице. При этом будем рассматривать лишь случаи, когда разряды i и j, занятые в кодах векторов соответственно Z_0 и Q_0 единицами, не совпадают. В случае же совпадения этих разрядов имеет место $Z_0=Q_0$ и (34) вырождается в (32), в справедливости которого при $a_{z_0}=1$ мы уже убедились выше.

Примем, что $r(YQ_0)<0$, т. е. в j-тых разрядах кодов всех возможных вариантов вектора Y содержатся нули. Легко показать, что группа векторов Y, i-тые разряды которых заняты единицами, характеризуются значением $r(YZ_0)=-\frac{1}{(n-1)\,r(YQ_0)}$. Для другой группы векторов Y, i-тые разряды которых заняты нулями, имеет место $r(YZ_0)=r(YQ_0)$. Отношение числа вариантов второй группы векторов к числу вариантов первой группы равно $\gamma=\frac{n-1-a_y}{a_y}=\frac{1-r^2(YQ_0)}{nr^2(YQ_0)}$. Заметим также, что в рассматриваемом нами случае, когда $a_{z_0}=a_{q_0}=1$, имеет место $r(Z_0Q_0)=-\frac{1}{n-1}$.

Исходя из вышеизложенного с учетом (31), (32), (33) и замечания к теореме 7 получим:

$$D[r(XY)]=\frac{nr^2(YQ_0)}{1+(n-1)r^2(YQ_0)}\left\{\frac{1}{n-2}\left[1-r^2(XZ_0)\right]\left[1-\frac{1}{(n-1)^2r^2(YQ_0)}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{r^2(XZ_0)}{(n-1)^2\,r^2(YQ_0)}\right\}+\frac{1-r^2(YQ_0)}{1+(n-1)\,r^2(YQ_0)}\left\{\frac{1}{n-2}[1-r^2(XZ_0)][1-r^2(YQ)]+\right.$$
$$\left.+\,r^2(XZ_0)r^2(YQ_0)\right\}-\frac{r^2(XZ_0)r^2(YQ_0)}{(n-1)^2},$$

в эквивалентности которого с (34) легко убедиться путем несложных преобразований.

Исходя из четности рассматриваемых нами функций $D[r(XY)]$, $M[r^2(XY)]$ и $M^2[r(XY)]$ от аргументов $r(XY)$, $r(XZ_0)$, $r(Q_0Z_0)$, $r(YQ_0)$ с учетом (16) легко обобщать приведенное доказательство справедливости (34) или, что то же самое, (34а) на случаи, когда $r(YQ_0)>0$ и далее на случаи, когда при $a_{z_0}=1$ или $a_{z_0}=n-1$ имеет место $a_{q_0}=n-1$.

Теорема 9 (дискретный аналог основной теоремы синонимии, обобщение пункта б) теоремы 5),

Пусть X случайная точка, имеющая равномерное распределение на элементах множества V, а Z_0 и Q_0 произвольные фиксированные элементы этого множества. Покажем, что при этом

$$\text{а)}\ M[r(XZ_0)r(XQ_0)]=\frac{1}{n-1}\,r(Z_0Q_0), \qquad (35)$$

или для радиус-векторов x, q_0 и z_0:

$$\text{б)}\ M[\cos(xz_0)\cos(xq_0)]=\frac{1}{n-1}\cos(z_0q_0). \qquad (35а)$$

Приняв в качестве базы $(n-1)$-мерного пространства систему векторов, один из которых (например, с индексом 1) проходит через точку z_0, а другой (например, с индексом 2) принадлежит плоскости, проходящей через радиус-векторы точек z_0 и q_0, получим:

$$\begin{aligned} &\cos(xz_0) = x_1, \ \cos(z_0q_0) = q_{01}, \ \cos(xq_0) = x_1q_{01} + x_2q_{02}, \\ &\cos(xz_0)\cos(xq_0) = q_{01}x_1^2 + q_{02}x_1x_2, \\ &M[\cos(xz_0)\cos(xq_0)] = q_{01}M(x_1^2) + q_{02}M(x_1x_2). \end{aligned} \tag{36}$$

В силу (28а) имеет место $M(x_1^2) = M[\cos^2(xz_0)] = \frac{1}{n-1}$. Величина $M(x_1x_2)$ равна нулю, в чем легко убедиться, рассматривая группы векторов X, характеризующиеся постоянством значений $x_1 = r(XZ_0)$. Для каждой из этих групп в силу теоремы 6 имеет место $M(x_2)=0$, т. е. $M(x_1x_2)=0$.

Подставляя значения $M(x_1^2)=\frac{1}{n-1}$ и $M(x_1x_2)=0$ в (36), получим (35а) или, что то же самое, (35).

В частном случае, когда векторы Z_0 и Q_0 совпадают, т. е. $r(Z_0Q_0)=1$, выражение (35) совпадает с (28).

В заключение заметим еще раз, что путем преобразования $x = \frac{X^*}{|X^*|}$ задачи, связанные с равномерным распределением случайной точки X на элементах множества вершин n-мерного куба, приводятся к задачам равномерного, но, в отличие от теорем $1 \div 4$, дискретного распределения случайной точки x на элементах единичной сферы, фактическая размерность которой равна $n-1$. Свойства симметричности, присущие большинству получаемых при этом распределений, приводят к аналитическому сходству теорем $1 \div 4$ с их дискретными аналогами, с той лишь разницей, что в последних вместо числа n фигурирует число $(n-1)$—фактическая размерность сферы.

Отметим также возможность использования полученных результатов для вычисления ряда кратных сумм и интегралов, обладающих соответствующими свойствами симметричности.

Դ. Հ. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

ԻՆՏԵԼԵԿՏՈՒԱԼ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ՀԱՎԱՆԱԿԱՆԱԿԱՆ ՄՈՏԵՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Մաս I Տեսություն

Ամփոփում

Հոդվածում դիտարկվում են ինտելեկտուալ համակարգերի՝ վարժեցվելուն ընդունակ կենդանիների վարքագծի ֆենոմենոլոգիական մոդելների կա-

ուցման հավանականական մոտեցումները։ Ցույց է տրված ասոցիատիվ այն կապերի վերհանման հնարավորությունը, որոնք ստեղծվում են անցումայնորեն՝ ուղղակի դիտարկման արդյունքների վիճակագրական ամփոփման ճանապարհով։ Բերված են անցումայնության և հոմանիշության թեորեմների ձևակերպումներն ու ապացույցները։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Д. О. Аветисян.* Введение в теорию бинарных систем опосредствованного поиска.— Прикладная информатика, вып. 2, 1982.
2. *Д. О. Аветисян.* О четырех теоремах, связанных со статистической теорией информатики.—ДАН АрмССР, т. 72, 1981, № 3.
3. *Д. О. Аветисян.* К оценке функциональной эффективности систем распознавания.— ДАН АрмССР, т. 64, 1971, № 3.
4. *Д. О. Аветисян.* Проблемы информационного поиска.—М., Финансы и статистика, 1981.
5. *Д. О. Аветисян.* Функциональная эффективность и поисковый потенциал документальных систем.—НТИ, серия 2, 1978, № 12.