А. Г. САРУХАНЯН

О ПОСТРОЕНИИ ОБОБЩЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ С НУЛЕВЫМИ АВТОКОРРЕЛЯЦИОННЫМИ ФУНКЦИЯМИ И МАТРИЦ АДАМАРА

§ 1. Введение и постановка задач

Хотя задача построения (существования) матриц Адамара до сих пор не решена, тем не менее в последнее время начались интенсивные применения матриц Адамара в различных областях науки и техники.

Существует ряд интересных методов построения некоторых классов и отдельных порядков матриц Адамара. Один из этих, малоисследованных, методов опирается на дополнительные последовательности Голея.

Определение 1.1 [1]. Последовательности $A = \{a_i\}_{i=1}^n$ и $B = \{b_i\}_{i=1}^n$, где $a_i, b_i \in \{-1, +1\}$ называются дополнительными последовательностями Голея длины n, если выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{n-j} (a_i a_{i+j} + b_i b_{i+j}) = 0, \qquad j = 1, 2, \dots, n-1. \tag{1.1}$$

Используя обозначения $V_i = (a_i, b_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, соотношение (1.1) можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^{n-j} V_i V_{i+j} = 0, \qquad j = 1, 2, \dots, n-1, \tag{1.2}$$

где $V_i V_{i+j}$ — скалярное произведение векторов V_i и V_{i+j}.

Первым обобщением последовательности Голея было введение дополнительных m-последовательностей длины n. Обозначим через X следующее семейство последовательностей длины n

$$X = \{\{a_{1,i}\}_{i=1}^n, \{a_{2,i}\}_{i=1}^n, \dots, \{a_{m,i}\}_{i=1}^n\}.$$

где $a_{i,j}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ — некоторые действительные числа. Пусть

$$N_X(j) = \sum_{i=1}^{n-j} (a_{1,i} a_{1,i+j} + a_{2,i} a_{2,i+j} + \dots + a_{m,i} a_{m,i+j}) \tag{1.3}$$
$$j = 1, 2, \dots, n-1$$

$$P_X(j)=\sum_{i=1}^{j}(a_{1,i}a_{1,n+i-j}+a_{2,i}a_{2,n+i-j}+\dots+a_{m,i}a_{m,n+i-j})+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-j}(a_{1,i}a_{1,i+j}+a_{1,i}a_{2,i+j}+\dots+a_{m,i}a_{m,i+j}). \qquad (1.4)$$

$$j=1,\ 2,\dots,\ n-1$$

Определение 1.2 [1, 2]. Функция $P_X(j)$ ($N_X(j)$) называется периодической (непериодической) автокорреляционной функцией семейства X.

Определение 1.3 [1, 2]. Множества $\{a_{1,i}\}_{i=1}^{n}$, $\{a_{2,i}\}_{i=1}^{n}$, ..., $\{a_{m,i}\}_{i=1}^{n}$ называются дополнительными последовательностями длины n, если выполняется условие

$$N_X(j)=0, \qquad j=1,\ 2,\ \dots,\ n-1. \qquad (1.5)$$

Второе обобщение дополнительных последовательностей принадлежит Турину [3], Пусть $V=\{V_i\}_{i=1}^{m}$ — множество ненулевых k-мерных векторов, координаты которых принимают значения -1 или $+1$. Если максимальное число взаимно ортогональных векторов из V в точности равно n ($n\leqslant m$), то V назовем множеством n-ортогональных векторов [3, 4].

Определение 1.4 [3]. Множество $V=\{V_i\}_{i=1}^{m}$ n-ортогональных векторов называется n-символьным δ-кодом длины m, если выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{m-j}V_iV_{i+j}=0, \qquad j=1,\ 2,\ \dots,\ n-1.$$

Ниже n-символьный δ-код длины m будем называть $\delta(n,\ m)$-последовательностью.

В работе [3] с помощью дополнительных последовательностей Голея длины 2, 10 и 26 были получены трехсимвольные δ-коды длины $2^a10^b26^c+1$, где a, b, c — целые неотрицательные числа. Из полученных δ-кодов были построены циклические T-матрицы порядка $2^a10^b26^c+1$ и массивы Бомер—Холла порядка $4(2^a10^b26^c+1)$.

Третье эффективное обобщение δ-кодов, следовательно, и дополнительных последовательностей, проводилось в работе [4]. Пусть векторы $N_i(X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n)$, $i=1,\ 2,\dots,\ t$ координаты которых являются $(-1,\ +1)$-матрицами порядка k, удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &N_iN_j^T=0, \qquad i\neq j,\ \ i,\ j=1,\ 2,\dots,\ t,\\ &N_jN_j^T=\sum_{i=1}^{n}X_iX_i^T, \qquad j=1,\ 2,\ \dots,\ t. \end{aligned} \qquad (1.7)$$

Здесь N_i^T — вектор-столбец вида $N_i(X_1^T,\ X_2^T,\ \dots,\ X_n^T)$.

Определение 1.5 [4]. Квадратная матрица $Q(N_1, N_2, \dots, N_t)$ порядка m, каждый элемент которого имеет вид N_i или $-N_i$, называется t-символьным обобщенным δ-кодом длины $m=\sum_{i=1}^{t} s_i$ плотностью k и базы n, если выполняется условие

$$QQ^T = \sum_{i=1}^{t} s_i N_i N_i^T \times I_m, \tag{1.8}$$

где s_i — число вхождения вектора N_i в любой строке (столбце) матрицы $Q(N_1, N_2, \dots, N_t)$, $\times$ — кронекерово произведение, I_m — единичная матрица порядка m.

Введенный код обозначим через $\delta(t, m, k, n)$.

Если $Q(N_1, N_2, \dots, N_t)$ — циклическая матрица, то назовем ее обобщенным циклическим $\delta(t, m, k, n)$-кодом.

В работе [4] получены рекуррентные формулы построения обобщенных δ-кодов, на основе которых построены T-матрицы новых порядков $2n$, где $n \in L = \{63, 65, 69, 75, 81, 85, 87, 91, 93, 95, 99, 105, 111, 117, 123, 125, 129, 135, 141, 143, 145, 147, 153, 155, 159, 165, 171, 175, 177, 183, 195, 205, 221, 225, 235, 245, 247, 255, 265, 273, 275, 285, 295, 299, 305, 325, 351, 377, 403, 429, 455, 481, 507, 533, 559, 585, 611, 637, 689, 715, 767, 793\}$.

Целью настоящей работы является дальнейшее исследование дополнительных последовательностей различных типов. Введены понятия дополнительных $\delta(t, m, k, n)$-кодов и $D(t, n, k)$-последовательности, на основе которых построены циклические T-матрицы, массивы Бомер—Холла и Геталс—Зейделя. Найдены необходимые и достаточные условия существования дополнительных $\delta(t, m, k, n)$-кодов. Показан прямой путь получения массивов Геталс—Зейделя, исходя из дополнительных последовательностей Голея.

§ 2. Некоторые свойства дополнительных последовательностей

Приведем некоторые свойства дополнительных последовательностей, которые будем использовать в дальнейшем. Эти свойства сформулируем в виде леммы, как это сделано в работе [1]. Обозначим

$$A = a_1 a_2 \dots a_n, \quad B = b_1 b_2 \dots b_n, \quad A^* = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1,$$

$$-A = -a_1 a_2 \cdots -a_n, \quad A/B = a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_n b_n, \quad AB = a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_n.$$

Лемма 2.1 [1]. Пусть последовательности $A_1, A_2, \dots, A_m$ являются дополнительными последовательностями длины n. Тогда

1. $A_1^*, A_2^*, \dots, A_i^*, A_{i+1}, \dots, A_m$ являются дополнительными последовательностями длины n.

2. $A_1, A_2, \dots, A_i, -A_{i+1}, \dots, -A_m$ являются дополнительными последовательностями длины n.

3. A_1A_2, A_1-A_2, ..., $A_{2i-1}A_{2i}\,A_{2i-1}-A_{2i}$, ... являются дополнительными последовательностями длины $2n$.

4. A_1/A_2, $A_1/-A_2$, ..., A_{2i-1}/A_{2i}, $A_{2i-1}/-A_{2i}$, ... являются дополнительными последовательностями длины $2n$.

Очевидно, что дополнительные последовательности Голея также удовлетворяют утверждениям леммы 2.1, но эти последовательности имеют также ряд специфических свойств.

Пусть $X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и $Y=\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ являются дополнительными последовательностями Голея длины n. Тогда справедливы следующие утверждения [1].

1. n — четное число и сумма двух квадратов.

2. $\sum\limits_{l=1}^{j}(x_l x_{n+l-j}+y_l y_{n+l-j})+\sum\limits_{l=1}^{n-j}(x_l x_{l+j}+y_l y_{l+j})=0,$

т, е. периодическая автокорреляционная функция семейства $\{X, Y\}$ равна нулю.

3. $x_{n-l+1}=e_l x_l$ тогда и только тогда, когда $y_{n-l+1}=-e_l y_l$, где $e_l=\pm 1$.

4. $$\left[\sum_{l\in S} x_l \operatorname{Re}(w^{2l+1})\right]^2+\left[\sum_{l\in D} y_l \operatorname{Re}(w^{2l+1})\right]^2+\left[\sum_{l\in S} y_l \operatorname{Im}(w^{2l+1})\right]^2+$$
$$+\left[\sum_{l\in D} x_l \operatorname{Im}(w^{2l+1})\right]^2=\frac{n}{2},$$

где $S=\{l\colon 0\leqslant l<n,\ e_l=1\}$, $D=\{l\colon 0\leqslant l<n,\ e_l=-1\}$, w — $2n$-тый корень из единицы.

5. Существуют дополнительные последовательности Голея длины $2^a 10^b 26^c$, где a, b, c — целые неотрицательные числа.

6. Не существуют дополнительные последовательности Голея длины $2\cdot 9^c$ [1], 34, 36, 50 [5].

Таким образом, о существовании дополнительных последовательностей Голея длины n, $n\leqslant 100$ в настоящее время известно следующее:

а) существуют дополнительные последовательности Голея длины 2, 4, 8, 10, 16, 20, 26, 32, 40, 52, 64, 80, 100;

б) не существуют дополнительные последовательности Голея длины 18, 34, 36, 50;

в) задача существования (построения) дополнительных последовательностей длины 58, 68, 72, 74, 82, 90, 98 до сих пор остается открытой.

Перейдем теперь к исследованию и построению дополнительных последовательностей различных типов.

§ 3. Построение дополнительных последовательностей

Теорема 3.1. Для существования циклического обобщенного δ $(l, m, k, 4)$-кода $l=2, 3, 4$ необходимо и достаточно существование четырех дополнительных последовательностей длины m.

Необходимость. Пусть $Q(N_1, N_2, \ldots, N_l)$ — циклический обобщенный $\delta(l, m, k, 4)$-код, где векторы N_i, $i = 1, 2, \ldots, l$ удовлетворяют условиям (1.4) и имеют четыре координаты, $l = 2, 3, 4$. Пусть первая строка матрицы Q имеет вид $(V_1, V_2, \ldots, V_m)$, где $V_i \in \{N_1, N_2, \ldots, N_l\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, а векторы V_i имеют вид

$$V_i = (a_i, b_i, c_i, d_i), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad a_i, b_i, c_i, d_i \in \{-1, +1\}.$$

Согласно (1.6), имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{m-j} V_i V_{i+j} = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, m-1, \tag{3.1}$$

где

$$V_i V_{i+j} = a_i a_{i+j} + b_i b_{i+j} + c_i c_{i+r} + d_i d_{i+j},$$

т. е. $V_i V_{i+j}$ скалярное произведение векторов V_i и V_{i+j}.

Подставляя значения векторов V_i и V_{i+j} в уравнение (3.1), получаем

$$\sum_{i=1}^{m-j} (a_i a_{i+j} + b_i b_{i+j} + c_i c_{i+j} + d_i d_{i+j}) = 0 \tag{3.2}$$

$$j = 1, 2, \ldots, m-1.$$

А это означает, что непериодическая автокорреляционная функция семейства X, $X = \{\{a_i\}_{i=1}^m, \{b_i\}_{i=1}^m, \{c_i\}_{i=1}^m, \{d_i\}_{i=1}^m\}$ равна нулю, т. е, $N_X(j) = 0$ для всех $1 \leqslant j \leqslant m-1$, т. е. множества $A = \{a_i\}_{i=1}^m$, $B = \{b_i\}_{i=1}^m$, $C = \{c_i\}_{i=1}^m$, $D = \{d_i\}_{i=1}^m$ являются дополнительными последовательностями длины m.

Достаточность. Пусть теперь $A = \{a_i\}_{i=1}^m$, $B = \{b_i\}_{i=1}^m$, $C = \{c_i\}_{i=1}^m$, $D = \{d_i\}_{i=1}^m$ дополнительные последовательности длины m, т. е. выполняется условие (3,2). Тогда, введя обозначения $V = \{V_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)\}_{i=1}^m$ согласно (3.2) получим

$$\sum_{i=1}^{m-j} V_i V_{i+j} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m-1$$

Очевидно, что в множество $\{V_i\}_{i=1}^m$ не входят более четырех ортогональных векторов, значит множество V является l-символьным $l = 2, 3, 4$ δ-кодом длины m. Следовательно, циклическая матрица с первой строкой $(V_1, V_2, \ldots, V_m)$ является циклическим обобщенным $\delta(l, m, k, 4)$-кодом. Теорема доказана.

Определение 3.1. [6]. Квадратные матрицы X_i, $i = 1, 2, \ldots, l$ порядка k, элементы которых равны 0, —1 и +1, называются T-матрицами порядка k, если выполняются следующие условия:

1. $X_i * X_j = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, l,$

$*$ — адамарово произведение,

2. $X_i X_j = X_j X_i, \quad i, j = 1, 2, \ldots, l,$

3. $\sum_{i=1}^{l} X_i$ является $(-1, +1)$-матрицей порядка k,

4. $\sum_{i=1}^{l} X_i X_i^T = kI_k,$

В работе [4] доказана следующая

теорема 3.2. [4]. Для существования циклического обобщенного $\delta(l, m, k, 4)$-кода $l = 2, 3, 4$ необходимо и достаточно существование l циклических T-матриц порядка m.

Таким образом, из теорем 3.1 и 3.2 вытекает

теорема 3.3. Для существования l-дополнительных последовательностей длины m необходимо и достаточно существование l циклических T-матриц порядка m.

Итак, задача построения дополнительных последовательностей длины m приводится к задаче построения циклических T-матриц порядка m.

Так как существуют циклические T-матрицы порядка m,

$$m \in L_1 = \{1, 3, 5, \ldots, 59, 61, 2^a 10^b 26^c + 1\},$$

где a, b, c — целые неотрицательные числа [3, 5], следовательно, из теоремы 3.3, вытекает

следствие 3.1. Существуют четыре дополнительные последовательности длины m, $m \in L_1$.

Приведем конструкцию построения дополнительных последовательностей длины m с помощью T-матриц.

Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 — циклические T-матрицы порядка m, первые строки которых имеют вид $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$, $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$, $(d_1, d_2, \ldots, d_m)$. Можно показать, что последовательности

$$X = \{a_i + b_i + c_i + d_i\}_{i=1}^m, \qquad Y = \{a_i - b_i + c_i - d_i\}_{i=1}^m,$$

$$Z = \{a_i - b_i - c_i + d_i\}_{i=1}^m, \qquad W = \{a_i + b_i - c_i - d_i\}_{i=1}^m$$

являются дополнительными последовательностями длины m.

Определение 3.2. Пусть матрица $Q(N_1, N_2, \ldots, N_t)$ — обобщенная циклическая $\delta(t, m, k, n)$-код, первая строка которого имеет вид $(V_1, V_2, \ldots, V_m)$, где $V_i \in \{N_1, N_2, \ldots, N_t\}$. Матрицу $Q(N_1, N_2, \ldots, N_t)$ назовем дополнительным $\delta(t, m, k, n)$-кодом, а $\{V_1, V_2, \ldots, V_m\}$ $\delta(t, m)$-последовательностью, если выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{m-j} V_i V_{i+j} = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, m-1. \tag{3.4}$$

Замечание 3.1. Если существует дополнительный $\delta(t, m, k, n)$-код, то существует циклический обобщенный $\delta(t, m, k, n)$-код. Обратное неверно.

На самом деле, можно проверить, что циклическая матрица порядка 9, первая строка которой имеет вид $(i, j, l, l, -l, i, -l, j, k)$, где i, j, k, l ортогональные векторы, является циклическим обобщенным $\delta(4, 9, n, 4)$-кодом, но не является дополнительным $\delta(4, 9, n, 4)$-кодом.

Лемма 3.1. Если существуют дополнительные последовательности Голея длины m, то существует $\delta(2, m)$-последовательность.

Доказательство. Пусть $A=\{a_i\}_{i=1}^m$ и $B=\{b_i\}_{i=1}^m$ дополнительные последовательности Голея, т. е. выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{m-j}(a_i a_{i+j}+b_i b_{i+j})=0, \qquad j=1, 2, \ldots, m-1. \tag{3.5}$$

Рассмотрим последовательность $N=\{N_i=(a_i, b_i)\}_{i=1}^m$

Очевидно, что в последовательности N входят только два ортогональных вектора. Из (3.5) следует, что

$$N_N(j)=\sum_{i=1}^{m-j} N_i N_{i+j}=0, \qquad j=1, 2, \ldots, m-1.$$

А это означает, что N является $\delta(2, m)$-последовательностью.

Лемма 3.2. Пусть n и l такие положительные числа, что существует $n+l$ штук $n+l$-мерных взаимно ортогональных векторов. Тогда из существования $\delta(n, m)$-последовательности вытекает и существование $\delta(n+l, m+l)$-последовательности.

Доказательство. Прежде чем перейти к доказательству отметим, что векторы, входящие в $\delta(n, m)$-последовательность, имеют $n+l$ координат.

Пусть $N=\{N_i\}_{i=1}^m$ является $\delta(n, m)$-последовательностью. Ясно, что существуют такие $n+l$-мерные векторы P_i, $i=1, 2, \ldots, l$, что удовлетворяются условия

$$\begin{aligned} &P_i P_j=0, && i\neq j, \quad i, j=1, 2, \ldots, l,\\ &P_i N_j=0, && i=1, 2, \ldots, l \quad j=1, 2, \ldots, m,\\ &P_i^2=N_j^2=Q, && i=1, 2, \ldots, l, \quad j=1, 2, \ldots, m,\end{aligned} \tag{3.6}$$

где Q — целое положительное число.

Рассмотрим последовательность $P=\{Q_i\}_{i=1}^{m+l}$, где

$$Q_i=N_i, \text{ при } i=1, 2, \ldots, m, \qquad Q_{i+m}=P_i, \text{ при } i=1, 2, \ldots, l.$$

Докажем, что P является $\delta(n+l,\ m+l)$-последовательностью. С этой целью вычислим

$$N_p(j)=\sum_{i=1}^{m+l-j}Q_iQ_{i+j}=\sum_{i=1}^{m-j}Q_iQ_{i+j}+\sum_{i=m-j+1}^{m+l-j}Q_iQ_{i+j}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m-j}N_iN_{i+j}+\sum_{i=m-j+1}^{m+l-j}Q_iQ_{i+j}. \qquad (3.7)$$

Так как $N=\{N_i\}_{i=1}^{m}$ $\delta(n,\ m)$-последовательность, то уравнение (3.7) принимает вид

$$N_p(j)=\sum_{i=m-j+1}^{m+l-j}Q_iQ_{i+j}. \qquad (3.8)$$

Здесь Q_iQ_{i+j} равно одному из выражений P_kP_r или P_kN_q, $k\neq r$, следовательно, учитывая условия (3.6), выражение (3.8) принимает вид

$$N_p(j)=0. \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ m+l-1.$$

Лемма доказана.

Из леммы 3.1 и 3.2 вытекает

Следствие 3.2. Существует $\delta(2+l,\ m+l)$-последовательность, где $l=0,\ 1,\ 2,$ $m=2^a10^b26^c$, $a,\ b,\ c$ — целые неотрицательные числа.

Лемма 3.3. Для существования $\delta(t,\ n)$-последовательности необходимо и достаточно существование $(0,\ -1,\ +1)$-векторов $X_i=(a_{i,j})_{j=1}^{n}$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ t$ удовлетворяющих условиям:

$$X_i * X_j=0, \qquad i\neq j,\ \ i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ t,$$

$$\sum_{i=1}^{t}X_i \text{ является } (-1,\ +1)\text{-вектором длины } n, \qquad (3.9)$$

$$\sum_{i=1}^{n-j}(a_{1,i}\, a_{1,i+j}+a_{2,i}a_{2,i+j}+\cdots+a_{t,i}a_{t,i+j})=0,$$
$$j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

Необходимость. Пусть $N=\{N_i\}_{i=1}^{n}$ $\delta(t,\ n)$-последовательность. Очевидно, что ее можно представить в виде

$$N=P_1\times X_1+P_2\times X_2+\cdots+P_t\times X_t, \qquad (3.10)$$

где векторы X_i, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ t$ удовлетворяют условиям

$$P_iP_j=0, \qquad i\neq j,\ \ i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ t, \qquad (3.11)$$

$P_i^2=Q$, Q — положительное число.

Очевидно, что векторы X_i, $i=1, 2, \dots, t$ удовлетворяют первым двум условиям (3.9). Докажем третье условие. С этой целью последовательность N запишем в следующем виде

$$N = \{a_{1,i} P_1 + a_{2,i} P_2 + \cdots + a_{t,i} P_t\}_{i=1}^{n}. \tag{3.12}$$

Так как N является $\delta(t, n)$-последовательностью, то имеет место равенство

$$N_N(j) = 0, \qquad j = 1, 2, \dots, n-1. \tag{3.13}$$

С другой стороны, из (3.12) получаем

$$N_N(j) = \sum_{i=1}^{n-j} \left(\sum_{k=1}^{t} a_{k,i}, P_k\right)\left(\sum_{r=1}^{t} Q_{r,i+j}, P_r\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-j} \sum_{k=1}^{t} P_k^2 Q_{k,i}, Q_{k,i+j} = Q \sum_{i=1}^{n-j} \sum_{k=1}^{t} Q_{k,1}, Q_{k,i+j} \tag{3.14}$$

$$j = 1, 2, \dots, n-1$$

Сравнивая уравнения (3,13) и (2.14), находим

$$\sum_{i=1}^{n-j} \sum_{k=1}^{t} Q_{k,i}, Q_{k,i+j} = 0, \qquad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Достаточность. Пусть векторы $X_i = (a_{i,j})_{j=1}^{n}$, $i = 1, 2. .,,, t$ и P_i, $i = 1, 2, \dots, t$ удовлетворяют условиям (3.9) и (3.10) соответственно. Рассмотрим последовательность

$$D = \{a_{1,i} P_1 + a_{2,i} P_2 + \cdots + a_{t,i} P_t\}_{i=1}^{n}.$$

Докажем, что D является $\delta(t, n)$-последовательностью. Вычислим

$$N_D(j) = \sum_{i=1}^{n-j} \left(\sum_{k=1}^{t} a_{k,i}, P_k\right)\left(\sum_{r=1}^{t} a_{r,i+j} P_r\right) = Q \sum_{i=1}^{n-j} \sum_{k=1}^{t} a_{k,i} a_{k,i+j},$$

$$j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Из уравнения (3.9) вытекает, что

$$N_D(j) = 0, \qquad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Лемма доказана.

Приведем список векторов, удовлетворяющих условиям (3.9); Число k или $-k$ означает, что k-тый координат вектора равен $+1$ или -1, остальные координаты равны нулю.

Порядок	Векторы X_1, X_2, X_3, X_4
2	(1), (2)
3	(1), (2), (3)
4	(1, —3), (2, 4)
5	(1, 2), (3, —4), (5)
6	(1, 3), (—4, —5, 6), (2)
6	(1, —2), (—4, —5), (6), (3)
7	(1, 3), (—4, —5, 6), (7), (2)
8	(1, 3, 5, —7), (2, 4, —6, 8)
9	(1, 3, 5, —7), (2, 4, —6, 8), (9)
10	(1, —2, —3, —5, —7), (4, 6, —8, —9, 10)
10	(1, 3, 5, —7), (2, 4, —6, 8), (9), (10)
11	(1, —2, —3, —5, —7), (4, 6, —8, —9, 10), (11)
12	(1, —2, —3, —5, —7), (4, 6, —8, —9, 10), (11), (12)
16	(1, —2, 3, —4, 5, 6, —7, —8), (9, 10, 11, 12, 13, —14, —15, 16)
17	(1, —2, 3, —4, 5, 6, —7, —8), (9, 10, 11, 12, 13, —14, —15, 16), (17)
18	(1, —2, 3, —4, 5, 6, —7, —8), (9, 10, 11, 12, 13, —14, —15, 16), (17), (18)
20	(1, —2, —3, —4, —5, —6, —7, 8, 9, —10), (—11, 12, 13, —14, 15, —16, 17, 18, 19, —20)
21	(1, —2, —3, —4, —5, —6, —7, 8, 9, —10), (—11, 12, 13, —14, 15, —16, 17, 18, 19, —20), (21)
22	(1, —2, —3, —4, —5, —6, —7, 8, 9, —10), (—11, 12, 13, —14, 15, —16, 17, 18, 19, —20), (21), (22)
26	(1, 2, 3, —4, —5, 6, 7, 8, —9, 10, —11, —12, —14), (—13, —15, 16, —17, 18, 19, —20, —21, 22, —23, —24, —25, —26)
27	(1, 2, 3, —4, —5, 6, 7, 8, —9, 10, —11, —12, —14), (—13, —15, 16, —17, 18, 19, —20, —21, 22, —23, —24, —25, —26), (27)
28	(1, 2, 3, —4, —5, 6, 7, 8, —9, 10, —11, —12, —14), (—13, —15, 16, —17, 18, 19, —20, —21, 22, —23, —24, —25, —26), (27), (28)
32	(1, —2, 3, —4, 5, 6, —7, —8, —9, —10, —11, —12, —13, 14, 15, —16), (—17, 18, —19, 20, —21, —22, 23, 24, —25, —26, —27, —28, —29, 30, 31, —32)
33	(1, —2, 3, —4, 5, 6, —7, —8, —9, —10, —11, —12, —13, 14, 15, —16), (—17, 18, —19, 20, —21, —22, 23, 24, —25, —26, —27, —28, —29, 30, 31, —32, (33)
34	(1, —2, 3, —4, 5, 6, —7, —8, —9, —10, —11, —12, —13, 14, 15, —16), (—17, 18, —19, 20, —21, —22, 23, 24, —25, —26, —27, —28, —29, 30, 31, —32), (33), (34)
40	(1, —2, —3, —4, —5, —6, —7, 8, 9, —10, 11, —12, —13, 14, —15, 16, —17, —18, —19, 20), (—21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, —28, —29, 30, 31, —32, —33, 34, —35, 36, —37, —38, —39, 40)
41	(1, —2, —3, —4, —5, —6, —7, 8, 9, —10, 11, —12, —13, 14, —15, 16, —17, —18, —19, 20), (—21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, —28, —29, 30, 31, —32, —33, 34, —35, 36, —37, —38, —39, 40), (41)
42	(1, —2, —3, —4, —5, —6, —7, 8, 9, —10, 11, —12, —13, 14, —15, 16, —17, —18, —19, 20), (—21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, —28, —29, 30, 31, —32, —33, 34, —35, 36, —37, —38, —39, 40), (41), (42)

Пусть $Q = \{a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ последовательность попарно коммутативных переменных длины $n+m$.

Утверждение 3.1. Непериодическая автокорреляционная функция последовательности Q имеет следующий вид:

$$N_Q(j) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{m-j} a_i a_{i+j} + \sum_{k=1}^{j} b_k a_{m+k-j} + \sum_{s=1}^{n-j} b_s b_{s+j}, & 1 \leqslant j \leqslant m-1 \\ \sum_{i=1}^{m} a_i b_{i+j-m} + \sum_{k=1}^{n-j} b_k b_{k+j}, & m \leqslant j \leqslant n-1 \\ \sum_{i=1}^{m+n-j} a_i b_{i+j-m}, & n \leqslant j \leqslant m+n-1 \end{cases} \quad (3.15)$$

Теорема 3.2. Если существуют $\delta(2, m)$ и $\delta(2, n)$-последовательности, то существует также $\delta(4, m+n)$-последовательность.

Доказательство. Пусть N_1 и N_2 являются $\delta(2, m)$ и $\delta(2, n)$-последовательностями, т. е.

$$N_1 = P_1 \times X_1 + P_2 \times X_2, \qquad N_2 = P_1 \times Y_1 + P_2 \times Y_2,$$

где

$$X_1 = (a_1, a_2, \ldots, a_m), \qquad X_2 = (b_1, b_2, \ldots, b_m),$$

$$Y_1 = (c_1, c_2, \ldots, c_n), \qquad Y_2 = (d_1, d_2, \ldots, d_n).$$

Согласно лемме 3.3, удовлетворяются условия

$$X_1 * X_2 = 0, \quad Y_1 * Y_2 = 0, \quad X_1 + X_2, \quad Y_1 + Y_2$$

являются $(-1, +1)$ векторами

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m-j} (a_i a_{i+j} + b_i b_{i+j}) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, m-1, \\ &\sum_{i=1}^{n-j} (c_i c_{i+j} + d_i d_{i+j}) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Докажем, что $N = \{\{a_i P_1 + b_i P_4\}_{i=1}^m, \{-c_i P_2 + d_i P_3\}_{i=1}^n\}$ является $\delta(4, m+n)$-последовательностью, где P_i — четырехмерные векторы, удовлетворяющие условиям

$$P_i P_j = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4,$$

$$P_i^2 = r, \qquad r \text{ — фиксированное число.}$$

Согласно утверждению 3.1, получаем

$$N_N(j) = \sum_{i=1}^{m-j} (a_i P_1 + b_i P_4)(a_{i+j} P_1 + b_{i+j} P_4) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{j} (-c_k P_2 + d_k P_3)(a_{m+k-j} P_1 + b_{m+k-j} P_4) +$$

$$+\sum_{s=1}^{n-j}(-c_s P_2 + d_s P_3)(-c_{s+j} P_2 + d_{s+j} P_3) =$$

$$= r\sum_{l=1}^{m-j}(a_l a_{l+j} + b_l b_{l+j}) + r\sum_{s=1}^{n-j}(c_s c_{s+j} + d_s d_{s+j}) \tag{3.17}$$

$$j = 1,\ 2,\ \dots,\ m-1.$$

$$N_N(j) = \sum_{l=1}^{m}(a_l P_1 + b_l P_4)(-c_{l+j-m} P_2 + d_{l+j-m} P_3) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-j}(-c_k P_2 + d_k P_3)(-c_{k+j} P_2 + d_{k+j} P_3) = r\sum_{k=1}^{n-j}(c_k c_{k+j} + d_k d_{k+1}) \tag{3.18}$$

$$j = m,\ m+1,\ \dots,\ n-1,$$

$$N_N(j) = \sum_{l=1}^{m+n-j}(a_l P_1 + b_l P_4)(-c_{l+j-m} P_2 + d_{l+j-m} P_3) = 0 \tag{3.19}$$

$$j = n,\ n+1,\ \dots,\ m+n-1.$$

Учитывая условия (3.16) и суммируя уравнения (3.17)—(3.19), получаем

$$N_N(j) = 0, \qquad j = 1,\ 2,\ \dots,\ m+n-1.$$

А это означает, что N является $\delta(4,\ m+n)$-последовательностью. Теорема доказана.

Из леммы 3.1, табл. 1 и теоремы 3.2 вытекает

следствие 3.3. Существует $\delta(t,\ k)$-последовательность, где $k \in L_4$, $L_4 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 24, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34, 36, 40, 41, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 53, 54, 56, 58, 60, 62, 64, 65, 66, 68, 72, 74, 78, 80, 81, 82, 84, 88, 90, 92, 96\}$, $t \leqslant 4$.

Пусть

$$X = \{\{A_{1,l}\}_{l=1}^{n},\ \{A_{2,l}\}_{l=1}^{n},\ \dots,\ \{A_{m,l}\}_{l=1}^{n}\},$$

где $A_{i,j}$ — $(-1,\ +1)$ — матрицы порядка k, удовлетворяющие условиям

$$A_{i,j} A_{k,l}^T = A_{k,l} A_{i,j}^T, \qquad i,\ k = 1,\ 2,\ \dots,\ m,\ j,\ l = 1,\ 2,\ \dots,\ n \tag{3.20}$$

Определение 3.3. Множество X назовем дополнительной m-последовательностью длины n и плотностью k, если выполняется условие

$$\sum_{l=1}^{n-j}(A_{1,l} A_{1,l+j}^T + A_{2,l} A_{2,l+j}^T + \dots + A_{m,l} A_{m,l+j}^T) = 0 \tag{3.21}$$

$$j = 1,\ 2,\ \dots,\ n-1.$$

Введенную последовательность обозначим через $D(m,\ n,\ k)$

Замечание 3.2. $D(m,\ n,\ 1)$-последовательность является дополнительной m-последовательностью длины n.

Замечание 3.3. Если $X=\{\{A_{1,i}\}_{i=1}^{n}, \{A_{2,i}\}_{i=1}^{n}, \ldots, \{A_{m,i}\}_{i=1}^{n}\}$ является $D(m, n, k)$-последовательностью, то имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{j}\sum_{k=1}^{m} A_{k,i}A_{k,n+i-j}^{T} + \sum_{i=1}^{n-j}\sum_{k=1}^{m} A_{k,i}A_{k,i+j}^{T} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{j} A_{k,i}A_{k,n+i-j}^{T} + \sum_{i=1}^{n-j} A_{k,i}A_{k,i+j}^{T}\right) = 0 \qquad (3.22)$$

$$j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Теорема 3.3. Если существует дополнительный $\delta(t, n, k, t)$-код, то существует $D(t, n, k)$-последовательность.

Доказательство. Пусть $Q(N_1, N_2, \ldots, N_t)$ является дополнительным $\delta(t, n, k, t)$-кодом, первая строка которого имеет вид

$$(V_1, V_2, \ldots, V_n), \qquad V_i \in \{N_1, N_2, \ldots, N_t\}.$$

Согласно определению (3.2), выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{n-j} V_i V_{i+j} = 0, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Теорему докажем при $t=4$. Пусть матрицы A, B, C, D удовлетворяют условию (3.20), а векторы N_1, N_2, N_3, N_4 имеют следующий вид

$$N_1 = (A, B, C, D), \qquad N_2 = (-B, A, -D, C),$$

$$N_3 = (-C, D, A, -B), \qquad N_4 = (-D, -C, B, A)$$

Очевидно, что последовательность V можно представить в виде

$$V = N_1 \times X_1 + N_2 \times X_2 + N_3 \times X_3 + N_4 \times X_4,$$

где векторы $X_1 = (a_i)_{i=1}^{n}$, $X_2 = (b_i)_{i=1}^{n}$, $X_3 = (c_i)_{i=1}^{n}$, $X_4 = (d_i)_{i=1}^{n}$, согласно лемме 3.3, удовлетворяют условиям (3.9)

Рассмотрим множество

$$X = \{\{Q_{1,i}\}_{i=1}^{n}, \{Q_{2,i}\}_{i=1}^{n}, \{Q_{3,i}\}_{i=1}^{n}, \{Q_{4,i}\}_{i=1}^{n}\},$$

где

$$Q_{1,i} = (A, -B, -C, -D)(a_i, b_i, c_i, d_i),$$

$$Q_{2,i} = (B, A, D, -C)(a_i, b_i, c_i, d_i),$$

$$Q_{3,i} = (C, -D, A, B)(a_i, b_i, c_i, d_i),$$

$$Q_{4,i} = (D, C, -B, A)(a_i, b_i, c_i, d_i).$$

Докажем, что X является $D(4, n, k)$-последовательностью, т. е. выполняется условие

$$\sum_{l=1}^{n-j}(Q_{1,l}Q_{1,l+j}^T + Q_{2,l}Q_{2,l+j}^T + Q_{3,l}Q_{3,l+j}^T + Q_{4,l}Q_{4,l+j}^T) = 0, \quad (3.24)$$
$$j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Вычислим

$$Q_{1,l}Q_{1,l+j}^T = a_l a_{l+j} AA^T + b_l b_{l+j} BB^T + c_l c_{l+j} CC^T + d_l d_{l+j} DD^T -$$
$$- a_l b_{l+j} AB^T - a_l c_{l+j} AC^T - a_l d_{l+j} AD^T - b_l a_{l+j} BA^T +$$
$$+ b_l c_{l+j} BC^T + b_l d_{l+j} BD^T - c_l a_{l+j} CA^T + c_l b_{l+j} CB^T +$$
$$+ c_l d_{l+j} CD^T - d_l a_{l+j} DA^T + d_l b_{l+j} DB^T + d_l c_{l+j} DC^T. \quad (3.25)$$

$$Q_{2,l}Q_{2,l+j}^T = a_l a_{l+j} BB^T + b_l b_{l+j} AA^T + c_l c_{l+j} DD^T + d_l d_{l+j} CC^T +$$
$$+ a_l b_{l+j} BA^T + a_l c_{l+j} BD^T - a_l d_{l+j} BC^T + b_l a_{l+j} AB^T +$$
$$+ b_l c_{l+j} AD^T - b_l d_{l+j} AC^T + c_l a_{l+j} DB^T + c_l b_{l+j} DA^T -$$
$$- c_l d_{l+j} DC^T - d_l a_{l+j} CB^T - d_l b_{l+j} CA^T - d_l c_{l+j} CD^T. \quad (3.26)$$

$$Q_{3,l}Q_{3,l+j}^T = a_l a_{l+j} CC^T + b_l b_{l+j} DD^T + c_l c_{l+j} AA^T + d_l d_{l+j} BB^T -$$
$$- a_l b_{l+j} CD^T + a_l a_{l+j} CA^T + a_l d_{l+j} CB^T - b_l a_{l+j} DC^T -$$
$$- b_l c_{l+j} DA^T - b_l d_{l+j} DB^T + c_l a_{l+j} AC^T - c_l b_{l+j} AD^T +$$
$$+ c_l d_{l+j} AB^T + d_l a_{l+j} BC^T - d_l b_{l+j} BD^T + d_l c_{l+j} BA^T. \quad (3.27)$$

$$Q_{4,l}Q_{4,l+j}^T = a_l a_{l+j} DD^T + b_l b_{l+j} CC^T + c_l c_{l+j} BB^T + d_l d_{l+j} AA^T +$$
$$+ a_l b_{l+j} DC^T - a_l c_{l+j} DB^T + a_l d_{l+j} DA^T + b_l a_{l+j} CD^T -$$
$$- b_l c_{l+j} CB^T + b_l d_{l+j} CA^T - c_l a_{l+j} BD^T - c_l b_{l+j} BC^T -$$
$$- c_l d_{l+j} BA^T + d_l a_{l+j} AD^T + d_l b_{l+j} AC^T - d_l c_{l+j} AB^T. \quad (3.28)$$

Суммируя уравнения (3.25)—(3.28), получаем

$$\sum_{k=1}^{4} Q_{k,l}Q_{k,l+j}^T = (AA^T + BB^T + CC^T + DD^T) \times$$
$$\times (a_l a_{l+j} + b_l b_{l+j} + c_l c_{l+j} + d_l d_{l+j}).$$

Таким образом

$$N_X(j) = (AA^T + BB^T + CC^T + DD^T) \times$$
$$\times \sum_{l=1}^{n-j} (a_l a_{l+j} + b_l b_{l+j} + c_l c_{l+j} + d_l d_{l+j}) \quad (3.29)$$
$$j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Учитывая (3.9), из уравнения (3.29) получаем

$$N_X(j)=0, \qquad j=1, 2, \dots, n-1.$$

А это означает, что X является $D(4, n, k)$-последовательностью. Теорема доказана.

Следствие 3.4. Существует $D(4, n, k)$-последовательность, где $n\in\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 26, 27, 28, 32, 33, 34, 40, 41, 42\}$.

Из теоремы 3.3 и следствия 3.3 вытекает

Следствие 3.5. Существует $D(4, n, k)$-последовательность, где $n\in L_4$.

Теорема 3.4. Если существует $\delta(4, n)$-последовательность, то существует также $\delta(4, 2n)$-последовательность.

Доказательство. Пусть $N=\{N_i\}_{i=1}^{n}$ является $\delta(4, n)$-последовательностью. Согласно лемме 3.3, существуют $(0, -1, +1)$-векторы $X_1=(a_i)_{i=1}^n$, $X_2=(b_i)_{i=1}^n$, $X_3=(c_i)_{i=1}^n$, $X_4=(d_i)_{i=1}^n$, удовлетворяющие условиям (3.9). Рассмотрим последовательность

$$D=\{(a_i P_1+b_i P_2+c_i P_2-d_i P_1)_{i=1}^n,\ (a_i P_3+b_i P_4-c_i P_4+d_i P_3)_{i=1}^n\},$$

где P_i, $i=1, 2, 3, 4$ попарно ортогональные вектора и удовлетворяют условию $P_i^2=Q$, Q — целое положительное число.

Докажем, что D является $\delta(4, 2n)$-последовательностью, т. е. $N_D(j)=0$, $j=1, 2, \dots, 2n-1$. Из структуры последовательности D и утверждения 3.1 получаем

$$N_D(j)=0, \qquad j=n, n+1, \dots, 2n-1,$$

$$\begin{aligned}N_D(j)=\sum_{i=1}^{n-j}[&P_1^2(a_i a_{i+j}-a_i d_{i+j}-d_i a_{i+j}+d_i d_{i+j})+\\&+P_2^2(b_i b_{i+j}+b_i c_{i+j}+c_i b_{i+j}+c_i c_{i+j})+\\&+P_3^2(a_i a_{i+j}+a_i d_{i+j}+d_i a_{i+j}+d_i d_{i+j})+\\&+P_4^2(b_i b_{i+j}-b_i c_{i+j}-c_i b_{i+j}+c_i c_{i+j})]=\\&=2Q\sum_{i=1}^{n-j}(a_i a_{i+j}+b_i b_{i+j}+c_i c_{i+j}+d_i d_{i+j}),\\&\qquad j=1, 2, \dots, n-1.\end{aligned}$$

Согласно формуле (3.9), получим $N_D(j)=0$, $j=1, 2, \dots, n-1$.

Следствие 3.6. Если существует $\delta(4, n)$-последовательность, то существует $\delta(4, 2^i n)$-последовательность, $i=1, 2, \dots$

Теорема 3.4. Если существует $\delta(t, n)$-последовательность $t=2, 3, 4$, то существует также $\delta(4, 4n)$-последовательность.

Доказательство. Теорему докажем при $t=4$. Пусть $N=P_1\times X_1+P_2\times X_2+P_3\times X_3+P_4\times X_4$ $\delta(4, n)$-последовательность. Согласно лемме 3.3 векторы $X_1=(a_i)_{i=1}^n$, $X_2=(b_i)_{i=1}^n$, $X_3=(c_i)_{i=1}^n$, $X_4=(d_i)_{i=1}^n$ удовлетворяют условиям (3.23).

Рассмотрим последовательности

$$Q_1=\{P_1(a_i-b_i-c_i-d_i)\}_{i=1}^n,\qquad Q_2=\{P_2(a_i+b_i+c_i-d_i)\}_{i=1}^n,$$

$$Q_3=\{P_3(a_i-b_i+c_i+d_i)\}_{i=1}^n,\qquad Q_4=\{P_4(a_i+b_i-c_i+d_i)\}_{i=1}^n.$$

Докажем, что $D=\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ является $\delta(4, 4n)$-последовательностью. Из структуры последовательности D следует, что

$$N_D(j)=N_{Q_1}(j)+N_{Q_2}(j)+N_{Q_3}(j)+N_{Q_4}(j),\quad j=1, 2, \dots, n-1.$$

$$N_D(j)=(O),\qquad j=n, n+1, \dots, 4n-1.$$

Покажем, что $N_D(j)=0$, $j=1, 2, \dots, n-1$. С этой целью вычислим

$$N_{Q_1}(j)=Q\sum_{i=1}^{n-j}(a_i a_{i+j}-a_i b_{i+j}-a_i c_{i+j}-a_i d_{i+j}-b_i a_{i+j}+$$
$$+b_i b_{i+j}+b_i c_{i+j}+b_i d_{i+j}-c_i a_{i+j}+c_i b_{i+j}+c_i c_{i+j}+$$
$$+c_i d_{i+j}-d_i a_{i+j}+d_i b_{i+j}+d_i c_{i+j}+d_i d_{i+j}),$$

$$N_{Q_2}(j)=Q\sum_{i=1}^{n-j}(a_i a_{i+j}+a_i b_{i+j}+a_i c_{i+j}-a_i d_{i+j}+b_i a_{i+j}+$$
$$+b_i b_{i+j}+b_i c_{i+j}-b_i d_{i+j}+c_i a_{i+j}+c_i b_{i+j}+c_i c_{i+j}-$$
$$-c_i d_{i+j}-d_i a_{i+j}-d_i b_{i+j}-d_i c_{i+j}+d_i d_{i+j}),$$

$$N_{Q_3}(j)=Q\sum_{i=1}^{n-j}(a_i a_{i+j}-a_i b_{i+j}+a_i c_{i+j}+a_i d_{i+j}-b_i a_{i+j}+$$
$$+b_i b_{i+j}-b_i c_{i+j}-b_i d_{i+j}+c_i a_{i+j}-c_i b_{i+j}+c_i c_{i+j}+$$
$$+c_i d_{i+j}+d_i a_{i+j}-d_i b_{i+j}+d_i c_{i+j}+d_i d_{i+j}),$$

$$N_{Q_4}(j)=Q\sum_{i=1}^{n-j}(a_i a_{i+j}+a_i b_{i+j}-a_i c_{i+j}+a_i d_{i+j}+b_i a_{i+j}+$$
$$+b_i b_{i+j}-b_i c_{i+j}+b_i d_{i+j}-c_i a_{i+j}-c_i b_{i+j}+c_i c_{i+j}-$$
$$-c_i d_{i+j}+d_i a_{i+j}+d_i b_{i+j}-d_i c_{i+j}+d_i d_{i+j}),$$
$$j=1, 2, \dots, n-1$$

Суммируя выражения, находим

$$N_D(j) = 4Q \sum_{i=1}^{n-j} (a_i a_{i+j} + b_i b_{i+j} + c_i c_{i+j} + d_i d_{i+j}), \qquad (3.30)$$

$$j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Из (3.30) и (3.23) получаем $N_D(j) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$.

Замечание 3.4. Окончательный результат теорем 3.4 и 3.5 одинаков, но конструкции построения существенно различаются.

§ 4. Последовательность Турина и построение $\delta(t, n)$-последовательности

Пусть $A = \{a_i\}_{i=1}^{n}$, $B = \{b_i\}_{i=1}^{n}$, $C = \{c_i\}_{i=1}^{n-1}$, $D = \{d_i\}_{i=1}^{n-1}$ $(-1, +1)$-последовательности.

Определение 4.1 [1]. Множество $X = \{A, B, C, D\}$ называется последовательностью Турина длины n, если выполняются условия:

$$a_1 a_n + b_1 b_n = 0. \qquad (4.1)$$

$$\sum_{i=1}^{n-j-1} (a_i a_{i+j} + b_i b_{i+j} + c_i c_{i+j} + d_i d_{i+j}) + a_n a_{n-j} + b_n b_{n-j} = 0,$$

$$j = 1, 2, \ldots, n-2.$$

В работе [1] получены последовательности Турина длины n, $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 13, 15$, которые приведены ниже.

2 : $X = \{(+ -), (+ +), (+), (+)\}$

3 : $X = \{(+ + +), (+ + -), (+ -), (+ -)\}$

4 : $X = \{(+ + - -), (+ + - +), (+ + +), (+ - +)\}$

5 : $X = \{(+ + - + +), (+ + + + -), (+ + - -), (+ - + -)\}$

6 : $X = \{(+ + + - - -), (+ + - + - +), (+ + - + +),$
$(+ + - + +)\}$

7 : $X = \{(+ + + - + + +), (+ + - - - + -),$
$(+ + - + - -), (+ + - + - -)\}$

8 : $X = \{(+ + - + - + - -), (+ + + + - - - +),$
$(+ + + - + + +), (+ - - + - - +)\}$

13 : $X = \{(+ + + + - + - + - + + + +),$
$(+ + + - - + - + - - + + -),$
$(+ + + - + + - - + - - -),$
$(+ + + - - + - + + - - -)\}$

$$15: X=\{(++-+++-+-+++-++),$$
$$(+++-++---++-++-),$$
$$(++++--+-++-----),$$
$$(+----+-+-++++-)\}$$

Теорема 4.1. Если существует последовательность Турина длины n, то существует $\delta(t,\ 2n-1)$-последовательность, где $t\leqslant 4$.

Доказательство. Пусть $X=\{(a_i)_{i=1}^{n},\ (b_i)_{i=1}^{n},\ (c_i)_{i=1}^{n-1},\ (d_i)_{i=1}^{n-1}\}$-последовательность Турина длины n, т. е. выполняются условия (4.1). Докажем, что $N=\{(c_i,\ -c_i,\ d_i,\ -d_i)_{i=1}^{n-1},\ \ (a_i,\ -a_i,\ b_i,\ b_i)_{i=1}^{n}\}$ является $\delta(t,\ 2n-1)$-последовательностью. С этой целью вычислим

$$N_N(j)=\sum_{l=1}^{n-j-1}(c_i,\ -c_i,\ d_i,\ -d_i)(c_{l+j},\ -c_{l+j},\ d_{l+j},\ -d_{l+j})+$$

$$+\sum_{k=1}^{j}(a_k,\ a_k,\ b_k,\ b_k)(c_{n-1+k-j},\ -c_{n-1+k-j},\ d_{n-1+k-j},\ -d_{n-1+k-j})+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-j}(a_k,\ a_k,\ b_k,\ b_k)(a_{k+j},\ a_{k+j},\ b_{k+j},\ b_{k+j})=$$

$$=2\sum_{l=1}^{n-1-j}c_l c_{l+j}+d_l d_{l+j})+2\sum_{k=1}^{n-j}(a_k a_{k+j}+b_k b_{k+j}). \qquad (4.2)$$

$$j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-2.$$

Согласно определению 4.1, $N_N(j)=0,\ \ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-2$.

$$N_N(n-1)=\sum_{l=1}^{n-1}(c_l,\ -c_l,\ d_l,\ -d_l)(a_l,\ a_l,\ b_l,\ b_l)=0.$$

$$N_N(j)=\sum_{l=1}^{2n-1-j}(c_l,\ -c_l,\ d_l,\ -d_l)\times$$

$$\times(a_{l+j-n+1},\ a_{l+j-n+1},\ b_{l+j-n+1},\ b_{l+j-n+1})=0.$$

$$j=n,\ n+1,\ \ldots,\ 2n-2,$$

т. е. $N_N(j)=0,\ \ j=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-2$. А это означает, что N является $\delta(t,\ 2n-1)$-последовательностью $t\leqslant 4$.

Следствие 4.1. Существует $\delta(t,\ n)$-последовательность, где $n\in L_5=\{3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 25,\ 29\}$.

В таблице 2 приведены $\delta(t,\ n)$-последовательности, полученные с помощью последовательностей Турина.

t	n	$\delta(t, n)$-последовательность
3	3	$i\ l\ -j$
3	5	$i\ i\ -l\ -j\ j$
4	7	$i\ l\ -i\ l\ -j\ -k\ -j$
4	9	$i\ i\ l\ i\ -l\ -j\ k\ k\ j$
3	11	$i\ i\ -l\ l\ -i\ l\ -j\ -j\ j\ -j\ -j$
3	13	$i\ l\ -l\ i\ -l\ l\ -l\ -j\ -j\ j\ -j\ j\ j$
4	15	$i\ i\ l\ i\ -l\ -l\ -i\ l\ -j\ -k\ -k\ k\ -k\ k-j$
4	25	$i\ l\ i\ -l\ -i\ l\ -i\ i\ -i\ -l\ i\ i,\ -l\ -j\ -j\ -j\ j\ -k\ -j$ $j\ k\ -j\ j\ j\ j$
4	29	$i\ i\ l\ -l\ i\ i\ -i\ -i\ -i\ l\ l\ -l\ l\ i\ -\ l\ -j\ -\ k\ -k\ -k$ $j\ k\ -k\ k\ -k\ j\ k\ k\ k\ j$

Здесь i, j, k, l — ортогональные векторы.

Из леммы 3.2, табл. 1 и 2, теоремы 3.3 и следствия 3.3 вытекает

Следствие 4.2. Существует $D(4, n, k)$-последовательность, где $n \in L_6$, $L_6 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 36, 40, 41, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 53, 54, 56, 58, 60, 64, 65, 66, 68, 72\}$.

Теорема 4.2. Если существует последовательность Турина длины n, то существует $\delta(4, 4n-2)$-последовательность.

Доказательство. Пусть $\{(a_i)_{i=1}^{n}, (b_i)_{i=1}^{n}, (c_i)_{i=1}^{n-1}, (d_i)_{i=1}^{n-1}\}$-последовательность Турина длины n, т. е. выполняются условия

$$
\begin{gathered}
a_1 a_n + b_1 b_n = 0, \\
\sum_{i=1}^{n-j-1} (a_i a_{i+j} + b_i b_{i+j} + c_i c_{i+j} + d_i d_{i+j}) + a_n a_{n-j} + b_n b_{n-j} = 0, \\
j = 1, 2, \ldots, n-2.
\end{gathered} \tag{4.3}
$$

Рассмотрим последовательность $D = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$, где

$$
Q_1 = (a_i P_1)_{i=1}^{n}, \qquad Q_2 = (b_i P_2)_{i=1}^{n},
$$

$$
Q_3 = (c_i P_3)_{i=1}^{n-1}, \qquad Q_4 = (d_i P_4)_{i=1}^{n-1},
$$

а векторы P_i, $i = 1, 2, 3, 4$ удовлетворяют условиям (3.11). Докажем, что D является $\delta(4, 4n-2)$-последовательностью, т. е. выполняется равенство $N_D(j) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, 4n-3$. Из структуры последовательности D вытекает, что

$$N_D(j) = 0, \qquad j = n, n+1, \dots, 4n-3$$

$$N_D(j) = N_{Q_1}(j) + N_{Q_2}(j) + N_{Q_3}(j) + N_{Q_4}(j), \qquad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Вычислим

$$N_{Q_1}(j) = Q\sum_{l=1}^{n-j} a_l a_{l+j}, \qquad N_{Q_2}(j) = Q\sum_{l=1}^{n-j} b_l b_{l+j}, \qquad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$N_{Q_3}(j) = Q\sum_{l=1}^{n-j-1} c_l c_{l+j}, \qquad N_{Q_4}(j) = Q\sum_{l=1}^{n-j-1} d_l d_{l+j}, \qquad j = 1, 2, \dots, n-2. \tag{4.4}$$

Суммируя выражения (4.4), получаем

$$N_D(n-1) = Q(a_1 a_n + b_1 b_n),$$

$$N_D(j) = Q\left[\sum_{l=1}^{n-j-1}(a_l a_{l+j} + b_l b_{l+j} + c_l c_{l+j} + d_l d_{l+j}) + a_n a_{n-j} + b_n b_{n-j}\right],$$
$$j = 1, 2, \dots, n-2.$$

Так как имеют место равенства (4.3), находим $N_D(j) = 0$, $j = 1, 2, \dots, n-1$.

Теорема 4.3. Если существует $\delta(t, n)$-последовательность, $t \leqslant 4$, то существуют циклические T-матрицы порядка n.

Доказательство. Пусть $N = P_1 \times X_1 + P_2 \times X_2 + P_3 \times X_3 + P_4 \times X_4$ δ 4, n-последовательность, где векторы P_1, P_2, P_3, P_4 удовлетворяют условиям (3.11). Согласно лемме 3.3, векторы $X_1 = (a_l)_{l=1}^n$, $X_2 = (b_l)_{l=1}^n$, $X_3 = (c_l)_{l=1}^n$, $X_4 = (d_l)_{l=1}^n$, где a_l, b_l, c_l, $d_l = \pm 1$ или 0, удовлетворяют условиям (3.9).

Рассмотрим следующие матрицы:

$$Y_1 = \sum_{l=1}^{n} a_l U^{l-1}, \quad Y_2 = \sum_{l=1}^{n} b_l U^{l-1}, \quad Y_3 = \sum_{l=1}^{n} c_l U^{l-1}, \quad Y_4 = \sum_{l=1}^{n} d_l U^{l-1},$$

где U — (0,1) — матрица порядка n вида

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots 1 \\ 1 & 0 & 0 \cdots 0 \end{Vmatrix}, \qquad U^0 = I_n.$$

Докажем, что Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 являются T-матрицами порядка n, т. е. выполняются условия

1, $Y_i * Y_j = 0$, $\quad i \neq j$, $\quad i, j = 1, 2, 3, 4$,

2. $Y_i Y_j = Y_j Y_i$, $\quad i, j = 1, 2, 3, 4$,

3. $\sum_{i=1}^{4} Y_i$ является $(-1, +1)$-матрицей порядка n,

4. $\sum_{i=1}^{4} Y_i Y_i^T = nI_n$.

Так как Y_i — циклические матрицы, то условие 2 автоматически выполняется. Из (4.5) вытекают условия 1 и 3. Докажем условие 4.

Если векторы X_i, $i = 1, 2, 3, 4$ рассмотреть как семейство $X = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, то из (3.9) следует $N_X(j) = 0$, $j=1, 2, \ldots, n-1$. Следовательно, периодическая автокорреляционная функция последовательности X также равна нулю, т. е. $P_X(j) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$.

А это означает, что внедиагональные элементы матрицы $\sum_{i=1}^{4} Y_i Y_i^T$ равны нулю, а диагональные элементы этой матрицы, как следует из условия (3.9), равны n, т. е. $\sum_{i=1}^{4} Y_i Y_i^T = nI_n$.

Теорема доказана.

Из теоремы 4.3. следствия 3.3 и 4.1 вытекает

следствие 4.3. Существуют циклические T-матрицы порядка k, где $k \in L_4 \cup L_5$.

Теорема 4.4. Если существует $\mathring{\delta}(2, n)$-последовательность, то существует последовательность Турина длины $n+1$.

Доказательство. Пусть $N = P_1 \times X_1 + P_2 \times X_2$ является $\mathring{\delta}(2, n)$-последовательностью. Согласно лемме 3.3, векторы $X_1 = (a_1\ a_2, \ldots . a_n)$, $X_2 = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &X_1 + X_2 - \text{является } (-1, +1)\text{-вектором длины } n \\ &X_1 * X_2 = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n-j} (a_i a_{i+j} + b_i b_{i+j}) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Докажем, что множество $X = \{\{(a_i)_{i=1}^n, 1\}, \{(a_i)_{i=1}^n, -1\}, \{b_i\}_{i=1}^n, \{b_i\}_{i=1}^n\}$ является последовательностью Турина. С этой целью обозначим

$$A_1 = \{a_i\}_{i=1}^n, 1\}, \qquad A_2 = \{a_i)_{i=1}^n, -1\}, \qquad A_3 = \{b_i\}_{i=1}^n.$$

Вычислим

$$N_{A_1}(j) = \sum_{i=1}^{n-j} a_i a_{i+j} + a_{n-j+1}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

$$N_{A_2}(j) = \sum_{i=1}^{n-j} a_i a_{i+j} - a_{n-j+1}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$N_{A_1}(n) = a_1 \qquad N_{A_2}(n) = -a_1,$$

$$N_{A_3}(j) = \sum_{i=1}^{n-j} b_i b_{i+j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Суммируя полученные выражения, находим

$$N_X(j) = 2\sum_{i=1}^{n-j}(a_i a_{i+j} + b_i b_{i+j}), \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$N_X(n) = 0. \tag{4.7}$$

Учитывая условия (4.6), из (4.7) получаем $N_X(j)=0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Теорема доказана.

Следствие 4.5. Существует последовательность Турина длины $2^a 10^b 26^c + 1$, где a, b, c — целые неотрицательные числа.

§ 5. Построение массивов Бомер—Холла с помощью дополнительных последовательностей

Приведем некоторые определения.

Определение 5.1 [7,8]. Квадратные (—1, +1)-матрицы A, B, C, D называются матрицами типа Вильямсона порядка n, если выполняются условия:

$$PQ^T = QP^T, \quad P, Q \in \{A, B, C, D\},$$
$$AA^T + BB^T + CC^T + DD^T = 4nI_n. \tag{5.1}$$

Определение 5.2. [9]. Матрицы X, Y, Z, W порядка m, элементы которых равны —1 и +1, называются обобщенными матрицами типа Вильямсона, если выполняются условия:

$$PQ = QP,\ \ PRQ^T = QRP^T, \ \ P, Q \in \{X, Y, Z, W\},$$
$$XX^T + YY^T + ZZ^T + WW^T = 4mI_m, \tag{5.2}$$

где R — некоторая симметрическая (0, 1)-матрица порядка m:

Замечание 5.1. Если X, Y, Z, W — циклические матрицы порядка m, то матрица R имеет вид [6]

$$R = (r_{i,j})_{i,j=1}^{m}, \qquad r_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i + j = m + 1, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Замечание 5.2. Если X, Y, Z, W — обобщенные симметрические матрицы типа Вильямсона, то они являются также матрицами типа Вильямсона. Тогда $R = I_m$.

Определение 5.3. [7] Квадратная матрица $H(A, B, C, D)$ порядка $4t$ называется массивом Бомер—Холла порядка t, если выполняются условия:

1) каждый элемент матрицы H имеет вид $\pm A$, $\pm B$, $\pm C$, $\pm D$,
2) в каждую строку (столбце) матрицы H элемент P, $P \in \{\pm A, \pm B, \pm C, \pm D\}$ входит t раз,
3) строки (столбцы) матрицы H формально ортогональны.

Определение 5.4 [10]. Пусть X_i, $i = 1, 2, 3, 4$ — обобщенные матрицы типа Вильямсона порядка n. Квадратная матрица $H(X_1, X_2, X_3, X_4)$ порядка $4t$ называется массивом типа Геталс—Зейделя порядка t, если выполняются следующие условия:

1) каждый элемент матрицы H имеет вид $\pm X_i$, $\pm X_i R$, $\pm X_i^T$, $\pm X_i^T R$,

2) в каждой строке (столбце) матрицы H общее число элементов, имеющих один из видов $\pm X_i$, $\pm X_i R$, $\pm X_i^T$, $\pm X_i^T R$, равно t,

3) $HH^T = t(X_1X_1^T + X_2X_2^T + X_3X_3^T + X_4X_4^T) \times I_{4t}$.

Теорема 5.1. Если существуют дополнительные последовательности Голея длины m и массив Геталс—Зейделя порядка t, то существует массив типа Геталс—Зейделя порядка tm^i, $i = 1, 2, \ldots$

Доказательство. Пусть $H(X_1, X_2, X_3, X_4)$ — массив типа Геталс—Зейделя порядка t и $A = \{a_i\}_{i=1}^m$, $B = \{b_i\}_{i=1}^{n_1}$ — дополнительные последовательности Голея длины m. Рассмотрим следующие матрицы

$$A_j = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^m (a_i + b_i) U^{i-1} \times A_{j-1} - \sum_{i=1}^m (a_i - b_i) U^{i-1} \times B_{j-1}^T\right],$$

$$B_j = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^m (a_i + b_i) U^{i-1} \times B_{j-1} + \sum_{i=1}^m (a_i - b_i) U^{i-1} \times A_{j-1}^T\right],$$

$$C_j = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^m (a_i + b_i) U^{i-1} \times C_{j-1} - \sum_{i=1}^m (a_i - b_i) U^{i-1} \times D_{j-1}^T\right],$$

$$D_j = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^m (a_i + b_i) U^{i-1} \times D_{j-1} + \sum_{i=1}^m (a_i - b_i) U^{i-l} \times C_{j-1}^T\right],$$

где A_0, B_0, C_0, D_0 — обобщенные матрицы типа Вильямсона порядка k. Легко проверить, что A_j, B_j, C_j, D_j — обобщенные матрицы типа Вильямсона порядка km^j и $H(A_{j+1}, B_{j+1}, C_{j+1}, D_{j+1}) = H_1(A_j, B_j, C_j, D_j)$, являются массивом Геталс—Зейделя порядка tm^j.

Следствие 5.1. Существуют массивы типа Геталс—Зейделя порядка $2^a 10^b 26^c$, где a, b, c — целые неотрицательные числа.

Теорема 5.2. Если существуют $\delta(4, n)$-последовательность, то существует массив Бомер—Холла порядка n.

Доказательство. Пусть $N = P_1 \times X_1 + P_2 \times X_2 + P_3 \times Y_3 + P_4 \times X_4$ — $\delta(4, n)$-последовательность, где векторы P_i, $i = 1, 2, 3, 4$ удовлетворяют условиям (3.11). Согласно лемме 3.3, векторы $X_1 = (a_i)_{i=1}^n$, $X_2 = (b_i)_{i=1}^n$, $X_3 = (c_i)_{i=1}^n$, $X_4 = (d_i)_{i=1}^n$ удовлетворяют условиям (4.5) и из теоремы 4.2 вытекает, что матрицы

$$Y_1=\sum_{i=1}^{n} a_i U^{i-1},\quad Y_2=\sum_{i=1}^{n} b_i U^{i-1},\quad Y_3=\sum_{i=1}^{n} c_i U^{i-1},\quad Y_4=\sum_{i=1}^{n} d_i U^{i-1},$$

являются циклическими T-матрицами порядка n. Можно проверить, что матрицы

$$\begin{aligned} X &= aY_1+bY_2+cY_3+dY_4, \\ Y &= -bY_1+aY_2-dY_3+cY_4, \\ Z &= -cY_1+dY_2+aY_3-bY_4, \\ W &= -dY_1-cY_2+bY_3+aY_4 \end{aligned}$$

являются обобщенными параметрическими матрицами типа Вильямсона порядка n [4], следовательно; матрица

$$\begin{Vmatrix} X & YR & ZR & WR \\ -YR & Y & -W^T R & Z^T R \\ -ZR & W^T R & X & -Y^T R \\ -WR & -Z^T R & Y^T R & X \end{Vmatrix}$$

является массивом Бомер—Холла порядка n. Теорема доказана.

Следствие 5.2. Существует массив Бомер—Холла порядка n, $n \in L_7$, $L_7 = \{2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 20, 21, 22, 25, 26, 27, 29, 30, 33, 34, 41, 42, 46, 50, 53, 54, 58, 65, 66, 81, 62, 90\}$.

Из теоремы Бомер—Холла [6] и следствия 5.2 вытекает

следствие 5.3. Существует матрица Адамара порядка $4mn$, где $n \in L_7$, m — порядок существующих матриц типа Вильямсона.

Автор выражает глубокую признательность С. С. Агаяну за внимание к работе.

Հ. Գ. ՍԱՐՈՒԽԱՆՅԱՆ

ԶՐՈՅԱԿԱՆ ԱՎՏՈԿՈՐԵԼՅԱՑԻՈՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵՎ ՀԱԴԱՄԱՐԻ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքը նվիրված է տարբեր տիպի լրացուցիչ հաջորդականությունների ստացմանն ու նրանց կիրառությանը Հադամարի մատրիցների կառուցման մեջ։ Ներմուծված են լրացուցիչ $\delta(t, m, k, n)$-կոդերի, և $D(t, n, k)$-հաջորդականությունների հասկացությունները, որոնց հիման վրա կառուցված են ցիկլիկ T-մատրիցներ, Բոմեր-Հոլլի և Գետալս-Ջեյդելի մասիվներ։ Մասնավորապես, ապացուցված է tm^i, $i=1, 2...$ կարգի Գետալս-Ջեյդելի մասիվների կառուցման մասին թեորեմ, ելնելով m երկարության Գոլեի լրացուցիչ հաջորդականությունից և t կարգի Գետալս-Ջեյդելի մասիվից։ Գտնված են լրացուցիչ δ-կոդերի գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ։ Կառուցված են Թուրինի նոր հաջորդականություններ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Robinson P. J., Wallis J. S.* A Note on using sequences to construct orthogonal designs. Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, 18, Combinatorics, Ketsthely (Hungary), 1976, 911—932.
2. *Geramita A. V., Wallis J. S.* Orthogonal Designs II. Queen's Mathematical Preprint No. 1974—7, 165—196.
3. *Turyn R. J.* Hadamard Matrices. Baumert-Hall Units. Four-Symbol Sequences, Puls Compression and Surface Wave Encodings. J. Comb. Theory, 1974, (A) 16, 3, 313—333.
4. *Агаян С. С., Саруханян А. Г.* Обобщенные δ-коды и построение матриц Адамара. Проблемы передачи информации, том XVI, вып. 3, 1980, 50—59.
5. *Andres T. H., Stanton R. G.* Golay sequences. Lecture Notes in Mathematics, 1977, 622, 44—54.
6. *Wallis J. S.* On Hadamard Matrices. J. Comb. Theory, 1075, (A) 18, 2, 143—164.
7. *Wallis W. D., Street A. P., Wallis J. S.* Combinatorics: Room Squares, Sum-Free Sets, Hadamard Matrices. Lecture Notes in Mathematics. Berlin-Heidelberg, New York, 1972.
8. *Агаян С. С., Саруханян А. Г.* Рекуррентные формулы построения матриц типа Вильямсона. Математические записки, том 30, 1981, № 4, 603—617.
9. *Саруханян А. Г.* Обобщенные матрицы типа Вильямсона. Ученые записки ЕрГУ, 1978, № 2, 3—11.
10. *Саруханян А. Г.* О массивах типа Геталс—Зейделя. Ученые записки ЕрГУ, 1979, № 1, 12—19.