УДК 519.1

А. К. МАТЕВОСЯН

О ПОСТРОЕНИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МАССИВОВ, МАТРИЦ АДАМАРА И ИХ ВОЗМОЖНЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ

§ 1. Введение

Матрицей Адамара порядка m называется $(m \times m)$-матрица H_m, элементами которой являются -1 и $+1$, такая, что:

$$H_m \cdot H_m^T = mI_m, \tag{1}$$

где I_m обозначает единичную матрицу порядка m, а T — знак транспонирования. Пэли установил, что для существования матрицы Адамара порядка m необходимо, чтобы $m \equiv 0 \pmod 4$ [1]. Обратное — существование матриц Адамара для всех порядков $m \equiv 0 \pmod 4$ (проблема Адамара) — не доказано и не опровергнуто.

§ 2. Постановка задачи

Первым методом построения матриц Адамара был метод Сильвестра [2] построения матриц порядка 2^n по следующей рекуррентной формуле:

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad H_{2^{n+1}} = \begin{bmatrix} H_{2^n} & H_{2^n} \\ H_{2^n} & -H_{2^n} \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

В дальнейшем появились разнообразные методы, использующие линейную алгебру [3, 4], теорию групп [4, 5], теорию чисел [3, 4], разностные множества [4, 6] и т. д. Интересны рекуррентные формулы построения матриц Адамара [4, 7], поскольку они позволяют строить бесконечные классы матриц Адамара и в большинстве допускают факторизацию полученных матриц, что особенно важно в приложениях, в частности, в обработке изображений.

Один из наиболее мощных методов построения матриц Адамара [4] опирается на построение матриц Вильямсона [8], Валлиса—Уейтмана [5, 6], ортогональных массивов Адамара [4], Геталс—Зейделя [9] и Валлиса—Уейтмана [5, 6].

Определение 1 [4]. Массивом Адамара $H[h, k, \lambda]$, основанным на переменных $A_1, A_2, \ldots, A_k$, $k \leqslant h$, называется $(h \times h)$-матрица, состоящая из элементов вида $\pm A_1, \pm A_2, \ldots, \pm A_k$, такая, что:

1) в каждой строке (столбце) матрицы H ровно λ элементов вида $\pm A_1$, λ элементов вида $\pm A_2, \ldots$, λ элементов вида $\pm A_k$.

2) строки (столбцы) матрицы H попарно ортогональны, если $A_1, A_2, \ldots, A_k$ есть элементы коммутативного кольца.

Замечание 1: а) при $k = 4$, $\lambda = 1$ массив $H[h, k, \lambda]$ переходит в массив Вильямсона порядка 4 [8]:

$$B = \left\| \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ -A_2 & A_1 & -A_4 & A_3 \\ -A_3 & A_4 & A_1 & -A_2 \\ -A_4 & -A_3 & A_2 & A_1 \end{matrix} \right\|$$

б) при $h = 4t$, $k = 4$, $\lambda = t$ массив Адамара $H[h, k, \lambda]$ переходит в массив Бомер—Холла БХ $[4t]$ [10].

Построены следующие ортогональные массивы:

1. Адамара $H[h, h, 1]$, $h = 2, 4, 8$ [4],
2. Бомер—Холла БХ $[4t]$

а) $t \in \{1, 3, 5, \ldots, 59, 61\} = D_1$ [11];

б) $t \in \{1 + 2^a \cdot 10^b \cdot 26^c$, a, b, c — натуральные числа$\} = D_2$ [12];

в) $t = 5k$, где $k \in D_1 \cup D_2$ [12];

г) $t = 4(2n + 1)$, $n \in \{n \leqslant 11$ или $n = 14\} = D_3$ [4];

В. Валлисом, А. Стритом и Дж. Валлисом в работе [4] поставлена следующая

Задача 1: построить новые классы массивов Адамара.

Вильямсон [8] подставлял в массив B вместо элементов A_i матрицы и обеспечил коммутативность элементов $(A_i A_j^T = A_j A_i^T)$, наложив на матрицы A_i условия цикличности и симметричности. Гups Гетале и Зейдель [9] устранили ограничение симметричности, используя вместо массива B Вильямсона массив Гетале—Зейделя:

$$\text{ГЗ} = \left\| \begin{matrix} A_1 & A_2R & A_3R & A_4R \\ -A_2R & A_1 & -A_4^TR & A_3^TR \\ -A_3R & A_4^TR & A_1 & -A_2^TR \\ -A_4R & -A_3^TR & A_2^TR & A_1 \end{matrix} \right\|,$$

где

$$R = \left\{ r_{ij} = \begin{cases} 1, & j = h + 1 - i \\ 0, & j \neq h + 1 - i \end{cases} \right\}.$$

Валлис и Уейтман [14] внесли дальнейшие изменения в ограничения на матрицы типа Вильямсона, потребовав, чтоб A_1, A_2 и A_4 были цикличны, а A_3 обратноциклична, подставляя их при этом в массив

$$
\text{ВУ} = \left\| \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ -A_2^T & A_1^T & -A_4 & A_3 \\ -A_3 & A_4^T & A_1 & -A_2^T \\ -A_4^T & -A_3 & A_2 & A_1 \end{matrix} \right\|
$$

Изменения ограничений приводили к построению матриц типа Вильямсона новых порядков, что приводило, в свою очередь, к построению новых матриц Адамара.

В работе [13] предложено понятие массива Геталс—Зейделя порядка $4t$ ГЗ $[4t]$, который при $t=1$ переходит в массив ГЗ. Там же построены массивы ГЗ $[4t]$ для $t=6^l$, $t=2^a\cdot 10^b\cdot 26^c$ [14], которые использованы для построения массивов Бомер—Холла и матриц Адамара

Теорема 1 [13]. Если существуют T-матрицы порядка t и массив типа Геталс—Зейделя порядка p, то существует массив Бомер—Холла порядка pt.

Рекуррентные методы построения массивов Адамара привели В. Валлис, А. Стрит, Дж. Валлис [4] и М. Плоткин [15].

Теорема 2 [4]. Если существует массив БХ $[4t]$, то существует БХ $[4ts^i]$, где s — порядок комплексной матрицы Адамара.

Теорема 3 [15]. Пусть существует матрица Адамара $4t$, тогда можно построить массивы $H[4t, 2, 2t]$, $H[8t, 4, 2t]$ и $H[16t, 8, 2t]$.

Теорема М. Плоткина особенно интересна тем, что замыкает цикл «массив Адамара порядка n — матрица Адамара порядка $n\cdot k$ — массивы Адамара порядка $n\cdot k$, $2n\cdot k$ и $4n\cdot k$».

В связи с вышеуказанным вызывают большой интерес

задача 2: построить новые классы массивов Геталс—Зейделя;

задача 3: определить массив Валлиса—Уайтмана ВУ $[4t]$ и построить их для как можно более широкого класса чисел $t>1$.

Настоящая работа посвящена исследованию задач 1—3.

В настоящей работе вводится понятие массива Валлиса-Уайтмана порядка $4t$, предлагается новый простой метод построения ортогональных массивов. Получено множество новых бесконечных классов массивов Адамара, Бомер—Холла, Геталс—Зейделя и Валлиса—Уайтмана, откуда естественно ожидать получение новых бесконечных классов матриц Адамара. Из полученных результатов вытекают теоремы В. Валлиса, А. Стрита, Дж. Валлиса и М. Плоткина. Указанный метод может быть применен и для непосредственного построения матриц Адамара. Модифицирование этого построения приводит к получению вложенных матриц Адамара и, следовательно, к бесконечным ортогональным Уолшоподобным системам функций, которые могут быть использованы в задачах фильтрации и сжатия сигналов. Построенные матрицы факторизуются в произведение слабозаполненных матриц, что обеспечивает возможности их применения в практических задачах.

§ 3. Рекуррентная формула построения ортогональных массивов

Определение 2. Массивом Валлиса—Уайтмана ВУ $[4h]$ назовем $(4h \times 4h)$-матрицу, состоящую из элементов-матриц $\pm A_1$, $\pm A_1^T$ $\pm A_2$, $\pm A_2^T$, $\pm A_3$, $\pm A_3^T$. $\pm A_4$, $\pm A_4^T$, таких, что:

1. в каждой строке (столбце) матрицы ВУ ровно λ элементов вида $\pm A_1$ или $\pm A_1^T$, λ элементов вида $\pm A_2$ или $\pm A_2^T$, ..., λ элементов вида $\pm A_4$ или $\pm A_4^T$,

2. строки (столбцы) матрицы ВУ попарно ортогональны, если A_1, A_2, A_4 цикличны, а A_3 — обратноциклична.

Замечание 2. Массив ВУ является ВУ [4] массивом.

Определение 3, Матрицы S_1 и S_2 порядка $2n \times n$, состоящие из элементов $(0, -1, +1)$, назовем S-матрицами, если они удовлетворяют условиям:

1. $S_1 * S_2 = 0$, $*$ — адамарово произведение [4],

2. $S_1 + S_2$ есть $(-1, +1)$ матрица,

3. $S_1 S_1^T + S_2 S_2^T = nI_{2n}$.

Теорема 4. Пусть существуют S-матрицы порядка $2n \times n$ и массив $P[2m]$, где $P \in \{H, \text{ГЗ}, \text{ВУ}\}$, тогда существует массив $P[2m \cdot n^i]$, $i = 1, 2, 3, \ldots$

Доказательство. Проведем для случая массивов Адамара, остальные доказываются аналогично. Представим массив Адамара $H\,[2m, k, \lambda]$ в виде

$$H[2m, k, \lambda] = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix},$$

где H_1 и H_2 порядка $m \times 2m$ такие, что

а1. в каждой строке $H_1 (H_2)$ ровно λ элементов вида $\pm A_1$, λ элементов вида $\pm A_2$, ..., λ элементов вида $\pm A_k$:

а2. $H_2 H_2^T = H_1 H_1^T = I_m \otimes \left(\lambda \cdot \sum_{l=1}^{k} A_l A_l^T\right)$, $\otimes$ — кронекерово произведение [4] и $H_1 H_2^T = H_2 H_1^T = 0$, если $A_1, A_2, \ldots, A_k$ есть элементы коммутативного кольца.

Пусть S_1 и S_2 есть S-матрицы порядка $2n \times n$. Покажем, что $(2mn \times 2mn)$-матрица

$$H_0 = S_1 \otimes H_1 + S_2 \otimes H_2 \tag{2}$$

является $H[2mn, k, \lambda n]$ массивом. Действительно,

1) в силу условия а1 и определения S-матриц в каждой строке матрицы H_0 ровно λn элементов вида $\pm A_1$, λn элементов вида $\pm A_2, \ldots, \lambda n$ элементов вида $\pm A_k$;

2) в силу условий а2 и определения S-матриц имеем:

$$H_0H_0^T = (S_1 \otimes H_1 + S_2 \otimes H_2)(S_1^T \otimes H_1^T + S_2^T \otimes H_2^T) =$$

$$= S_1S_1^T \otimes H_1H_1^T + S_2S_2^T \otimes H_2H_2^T + S_1S_2^T \otimes H_1H_2^T +$$

$$+ S_2S_1^T \otimes H_2H_1^T = S_1S_1^T \otimes \left[I_m \otimes \left(\lambda \cdot \sum_{l=1}^{k} A_l A_l^T \right) \right] +$$

$$+ S_2S_2^T \otimes \left[I_m \otimes \left(\lambda \cdot \sum_{l=1}^{k} A_l A_l^T \right) \right] = (S_1S_1^T + S_2S_2^T) \otimes$$

$$\otimes \left[I_m \otimes \left(\lambda \cdot \sum_{l=1}^{k} A_l A_l^T \right) \right] = nI_{2n} \otimes I_m \otimes \left(\lambda \cdot \sum_{l=1}^{k} A_l A_l^l \right) =$$

$$= \lambda n I_{2nm} \otimes \left(\sum_{l=1}^{k} A_l A_l^T \right).$$

Таким образом, ортогональность строк H_0 также доказана и, следовательно, H_0 является $H[2mn.\ k,\ \lambda n]$ массивом. Многократное применение рекуррентной формулы (2) приводит к построению $H[2m \cdot n^t,\ k,\ \lambda n^t]$ массива. Теорема доказана.

Лемма 1. Пусть существует матрица Адамара порядка $2n$, тогда существуют S-матрицы порядка $2n \times n$.

Доказательство. Сгруппируем попарно столбцы матрицы Адамара, тогда элементы этих пар будут иметь вид $[++]$ или $[+-]$ с точностью до знака. Вынося эти коэффициенты в качестве элементов матриц S_1 и S_2, получим

$$H = S_1 \otimes [+\ +] + S_2 \otimes [+\ -].$$

Нетрудно проверить, что S_1 и S_2 будут являться S-матрицами порядка $2n \times n$.

Следствие 1. Пусть существуют массивы $H[h,\ k,\ \lambda]$, ГЗ $[h]$, ВУ $[h]$ и матрицы Адамара порядков $2n_1,\ n_2, \ldots, 2n_p$, тогда существуют массивы $H\,]hn_1^{l_1} n_2^{l_2} \ldots n_p^{l_p},\ k,\ \lambda \cdot n_1^{l_1} n_2^{l_2} \ldots n_p^{l_p}]$, ГЗ $[hn_1^{l_1} n_2^{l_2} \ldots n_p^{l_p}]$ и ВУ $[hn_1^{l_1} n_2^{l_2} \ldots n_p^{l_p}]$.

Замечание 3. Следствие 1 дает новые бесконечные классы ортогональных массивов Адамара, Геталс-Зейделя и Валлиса-Уайтмана. В частности, из следствия 1 вытекает теорема 1 В. Валлиса, А. Стрита и Дж. Валлиса и получаются новые классы массивов Бомер-Холла.

Замечание 4. В силу существования массивов $H[h,\ h,\ 1]$, $h = 2,\ 4,\ 8$, из теоремы 4 при $l = 1$ вытекает теорема 3 М. Плоткина.

Пример: приведем массивы Валлиса-Уайтмана $ВУ\ [4h]$ для $h = 2$ и $h = 6$.

$$
\text{ВУ [8]} = \left\| \begin{matrix}
A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & -A_2^T & A_1^T & -A_4 & A_3 \\
-A_2^T & A_1^T & -A_4 & A_3 & -A_1 & -A_2 & -A_3 & -A_4 \\
-A_3 & A_4^T & A_1 & -A_2^T & -A_4^T & -A_3 & A_2 & A_1^T \\
-A_4^T & -A_3 & A_2 & A_1^T & A_3 & -A_4^T & -A_1 & A_2^T \\
-A_2^T & A_1^T & -A_4 & A_3 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\
-A_1 & -A_2 & -A_3 & -A_4 & -A_2^T & A_1^T & -A_4 & A_3 \\
-A_4^T & -A_3 & A_2 & A_1^T & -A_3 & A_4^T & A_1 & -A_2^T \\
A_3 & -A_4^T & -A_1 & -A_2^T & -A_4^T & -A_3 & A_2 & A_1^T
\end{matrix} \right\|
$$

$$
\text{ВУ [24]} = \left\| \begin{matrix}
H_1 & H_1 & -H_1 & H_2 & -H_2 & -H_1 \\
H_1 & H_2 & H_2 & -H_2 & -H_1 & H_2 \\
H_1 & H_2 & -H_2 & -H_1 & H_2 & -H_2 \\
-H_2 & H_1 & H_1 & -H_2 & H_1 & -H_1 \\
H_2 & H_1 & H_1 & H_2 & H_2 & H_2 \\
H_1 & -H_2 & H_1 & H_1 & -H_1 & -H_2 \\
-H_2 & H_1 & -H_1 & H_1 & H_2 & H_1 \\
H_2 & H_2 & H_2 & H_1 & H_1 & -H_2 \\
H_1 & -H_1 & -H_2 & H_1 & H_1 & H_2 \\
-H_2 & H_2 & H_1 & H_2 & -H_2 & H_1 \\
H_2 & H_1 & -H_2 & -H_2 & -H_2 & H_1 \\
H_1 & -H_2 & H_2 & -H_1 & H_1 & H_1
\end{matrix} \right\|
$$

где

$$
H_1 = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ -A_2^T & A_1^T & -A_4 & A_3 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} -A_3 & A_4^T & A_1 & -A_2^T \\ -A_4^T & -A_3 & A_2 & A_1^T \end{bmatrix}.
$$

§ 4. Рекуррентные формулы построения матриц Адамара и их возможные применения в цифровой обработке сигналов

Теорема 5. Пусть существуют S-матрицы порядка $2n \times n$ и матрица Адамара порядка $2m$, тогда существуют матрицы Адамара порядков $2m \cdot n^k$.

Доказательство. Матрицу Адамара порядка $2m$ представим в виде

$$
H_0 = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}
$$

где A_1 и A_2 — матрицы размера $m \times 2m$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что матрица

$$H_1 = S_1 \otimes A_1 + S_2 \otimes A_2 \tag{3}$$

является матрицей Адамара порядка $2m \cdot n$. Многократное применение формулы (3) приводит к матрицам Адамара порядка $2m \cdot n^k$.

Модифицируем теперь построение (3) так, чтоб получать вложенные матрицы Адамара, что позволит строить бесконечные ортогональные системы функций Чебышева—Адамара, подобные системе функций Уолша. Эти системы могут найти применение, в частности, в задачах обработки сигналов, число линейно-независимых отсчетов которых отлично от степени двойки.

Пусть существуют матрицы Адамара порядков $2n$. Представим ее в виде

$$H_{2n} = \begin{bmatrix} P_1 \\ R_1 \end{bmatrix} \otimes [+\,+] + \begin{bmatrix} P_2 \\ R_2 \end{bmatrix} \otimes [+\,-], \tag{4}$$

$$H_{2n} = \begin{bmatrix} H_2 \otimes e_n \\ A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

где $\begin{bmatrix} P_1 \\ R_1 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} P_2 \\ R_2 \end{bmatrix}$ есть S-матрицы порядка $2n \times n$, H_2 — матрица Адамара порядка 2, e_n — вектор-строка из n единиц, A_0 и B_0 — матрицы порядка $(n-1) \times 2n$. Обозначим через A_k и B_k матрицы порядков $n^k(n-1) \times n^k \cdot 2n$ порожденные следующей рекуррентной формулой:

$$\begin{aligned} A_k &= P_1 \otimes A_{k-1} + P_2 \otimes B_{k-1}, \\ B_k &= R_1 \otimes A_{k-1} + R_2 \otimes B_{k-1}, \end{aligned} \tag{6}$$

а через $H_{2n^{k+1}}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, матрицы:

$$H_{2n^{k+1}} = \begin{bmatrix} H_{2n^k} \otimes e_n \\ A_k \\ B_k \end{bmatrix} \tag{7}$$

Теорема 6. Матрицы H_{2n^k}, определенные по (7), являются матрицами Адамара порядка $2n^k$.

Доказательство проводится непосредственной проверкой.

Следствие 2. Пусть существуют матрицы Адамара порядка 2^n, тогда существует $(AT;\ \{2n^k\}_{k=1}^{\infty})$ система Адамара [16].

На рис. 1 в качестве примера приведены первые 12 функций $(\mathrm{AT};\ \{2 \cdot 6^k\}_{k=1}^{\infty})$ системы Адамара.

Одним из наиболее эффективных преобразований, применяемых в задаче сжатия черно-белых и цветных изображений, является слэнтпреобразование (наклонное преобразование Уолша—Адамара) [17] векторов длины 2^n. С помощью рекуррентной формулы (3) можно получать наклонные матрицы Адамара порядков $2mn^k$. Для этого необходимо в качестве H^1_{2n} выбрать матрицу Адамара порядка $2n$ вида (5), а вместо матрицы H^1_{2m} — наклонную матрицу Уолша—Адамара. Матрицы, полученные по рекуррентной формуле (7), можно использовать в задачах фильтрации и сжатия сигналов, так как их строкам можно придать частотную интерпретацию.

Замечание 6. Матрица (7) является поэтажно-кронекеровской матрицей [18].

§ 5. Алгоритмы быстрых преобразований

Приводимые алгоритмы являются основой для практической реализации преобразований, задаваемых построенными матрицами. Быстрые алгоритмы задаются факторизацией матриц Адамара в произведение слабозаполненных матриц.

Представим H_k (3) в виде поэтажно-кронекеровской матрицы:

$$H_k = \begin{bmatrix} A_k \\ B_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \otimes A_{k-1} + P_2 \otimes B_{k-1} \\ R_1 \otimes A_{k-1} + R_2 \otimes B_{k-1} \end{bmatrix} \tag{8}$$

где

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ R_1 \end{bmatrix} = S_1, \quad \begin{bmatrix} P_2 \\ R_2 \end{bmatrix} = S_2, \quad \text{а} \quad H_0 = \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix}.$$

Обозначим через M_i, $i = 1, 2, \ldots, k+1$ матрицы

$$M_i = \begin{bmatrix} I_{n^{i-1}} \otimes [P_1 \mid P_2] \\ I_{n^{i-1}} \otimes [R_1 \mid R_2] \end{bmatrix} \otimes I_{mn^{k-i}},$$

$$i = 1, 2, \ldots, k,$$

$$M_{k+1} = \begin{bmatrix} I_{n^k} \otimes A_0 \\ I_{n^k} \otimes B_0 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Теорема 7. Матрицы H_k (3) представляются в виде произведения $k+1$ слабозаполненных матриц:

$$H_k = M_1 \cdot M_2 \cdot \ldots \cdot M_k \cdot M_{k+1}. \tag{10}$$

Доказательство. Перепишем H_k в виде

$$H_k = \begin{bmatrix} A_k \\ B_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \otimes A_{k-1} \\ R_2 \otimes B_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_2 \otimes B_{k-1} \\ R_1 \otimes A_{k-1} \end{bmatrix}.$$

По технике, разработанной в работе [18] для поэтажно-кронекеровских матриц, имеем:

$$H_k=\begin{bmatrix} P_1\otimes I_{mn^{k-1}} & 0 \\ 0 & R_2\otimes I_{mn^{k-1}} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} I_n\otimes A_{k-1} \\ I_n\otimes B_{k-1} \end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & P_2\otimes I_{mn^{k-1}} \\ R_1\otimes I_{mn^{k-1}} & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} I_n\otimes A_{k-1} \\ I_n\otimes B_{k-1} \end{bmatrix}=$$

$$=\left\{\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ R_1 & R_2 \end{bmatrix}\otimes I_{mn^{k-1}}\right\}\cdot\left\{\begin{bmatrix} I_n\otimes A_{k-1} \\ I_n\otimes B_{k-1} \end{bmatrix}\right\}.$$

Дальнейшие манипуляции с A_{k-1} и B_{k-1} приводят к представлению

$$H_k=\left\{\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ R_1 & R_2 \end{bmatrix}\otimes I_{mn^{k-1}}\right]\cdot\left\{\begin{bmatrix} I_n\otimes[P_1 \quad P_2] \\ I_n\otimes[R_1 \quad R_2] \end{bmatrix}\otimes I_{mn^{k-2}}\right\}\times$$

$$\times\cdots\times\left\{\begin{bmatrix} I_{n^{k-1}}\otimes[P_1 \quad P_2] \\ I_{n^{k-1}}\otimes[R_1 \quad R_2] \end{bmatrix}\otimes I_m\right\}\cdot\left\{\begin{bmatrix} I_{n^k}\otimes A_0 \\ I_{n^k}\otimes B_0 \end{bmatrix}\right\}=M_1\cdot M_2\ldots M_k\cdot M_{k+1}.$$

Следствие. 3. Матричное преобразование

$$F=H_k\cdot f, \tag{11}$$

выполняемое по алгоритму (10), требует выполнения $\leqslant 2mn^k(2m+k\cdot n)$ операций.

Аналогично разлагаются в произведение слабозаполненных матриц и матрицы Адамара, генерируемые по (7).

Автор считает своим долгом выразить благодарность С. С. Агаяну за постановку задачи и ряд критических замечаний, способствующих ее решению.

Ա. Կ. ՄԱԹԵՎՈՍՅԱՆ

ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ՄԱՍՍԻՎՆԵՐԻ, ՀԱԴԱՄԱՐԻ ՄԱՏՐԻՑԱՆԵՐԻ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ՀՆԱՐԱՎՈՐ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Սահմանվում է 4n կարգի Վոլլիս—Ուիթմանի մասսիվ, առաջարկվում է օրթոգոնալ մասսիվների կառուցման նոր պարզ մեթոդ, որից ստացվում են՝ Հադամարի մատրիցաների, Բոմեր-Հոլլի, Գետալս-Ձեյդելի և Վոլլիս-Ուիթմանի մասսիվների նոր անվերջ դասեր, m և n կարգի Հադամարի մատրիցաներից $\frac{m\cdot n}{2}$ կարգի Հադամարի մատրիցայի կառուցման թեորեմա, Մ. Պլոտկինի տրոհման մասին և Վ. Վոլլիսի, Ա. Ստրիտի և Ջ. Վոլլիսի Բոմեր-Հոլլի մասսիվների կառուցման թեորեմները որպես հետևանք։

Քննարկված են հնարավոր կիրառումները ազդանշանների թվային վերամշակման մեջ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Palay R. E.* J. Math. and Phys. 12. 3. (1933) 310—320.
2. *Sylvester J. H.* Philos. Mag. (4) 24 (1867) 461—475.
3. *М. Холл.* Комбинаторика. М., «Мир», 1970.
4. *Wallis J., Street A., Wallis W.* Lecture Notes in Math., Vol. 292, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New-York, 1972.
5. *Whiteman. A.* An infinite family of Hadamard matrices of Williamson type. J. Comb. Theory.
6. *Wallis J.* (v, k, λ)—configurations and Hadamard matrices. J. Austral. Mat. Soc. 11 (1970), 297—309.
7. *Агаян С. С., Матевосян А. К.* Быстрое преобразование Адамара. Тр. ВЦ АН АрмССР, № 12, 1981.
8. *Williamson J.* Hadamard's determinant theorem and the sum of four squares. Duke Math. J. 11 (1944), 65—81.
9. *Geothals J., Seidel. J.* J. Austral. Math. Soc. 11. 343—344, 1970.
10. *Baumert L. ,Hall M.* A new construction for Hadamard matrices. Bull. Amer. Math. Soc. 71 (1965) 169—170.
11. *Wallis J.* J. Comb. Theory (A) 18, 149—164, 1975,
12. *Turyn R.* J. Comb. Theory (A) 16, 313—333, 1974.
13. *Саруханян А. Г.* О массивах типа Геталс-Зейделя. Ученые записки ЕГУ, № 1, 1979.
14. *Агаян С. С., Саруханян А. Г.* Обобщенные δ-коды и построение матриц Адамара. Проблемы передачи информации, т. 16, вып. 3, 1980.
15. *Plotkin M.* Notes Decomposition of Hadamard Matrices. J. Comb, Theory (A) 12, 127—130 (1972).
16. *Агаян С. С., Матевосян А. К.* Разложение функций по *А*-системам Чебишева. Komplexe analysis and ihre anwendung auf partielle differentialgleichungen. Teile 1.
17. *Pratt W., Chen W., Welch L.* Slant Transform Image Coding. IEEE Trans. Commun., V. 22, № 8. 1974.
18. *Ярославский Л. П.* Некоторые вопросы теории дискретных ортогональных преобразований сигналов. В кн.: Цифровая обработка сигналов и ее применения, М., «Наука», 1981.