УДК 519.1

С. М. АТУРЯН

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА ПЭЛИ—ВАЛЛИСА—УЕЙТМАНА ПО ПОСТРОЕНИЮ МАТРИЦ АДАМАРА

Задача о существовании матриц Адамара любых порядков m, кратных четырем, не решена [1]. Известен ряд конструктивных методов построения матриц Адамара для конкретных порядков m. Остановимся на методе Пэли—Валлиса—Уейтмана. Основой этого метода является конструкция следующего вида:

$$\begin{Vmatrix} 1 & e \\ e^T & A+I_m \end{Vmatrix} \tag{1.1}$$

которая позволяет получить матрицы Адамара порядка $m+1$, при определенных ограничениях на A [1]. Здесь A — некоторая «базовая» матрица порядка m (не являющаяся матрицей Адамара), e — вектор-строка порядка m, состоящая из 1, I_m — единичная матрица порядка m. Дальнейшая модификация этого метода принадлежит Валлису [2]. Обозначим:

$$U_n = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \\ 1 & 0 & 0 \ldots 0 \end{Vmatrix}, \qquad J_n = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \ldots 1 \\ 1 & 1 \ldots 1 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ 1 & 1 \ldots 1 \end{Vmatrix}, \qquad U_n^0 = U_n^n = I_n. \tag{1.2}$$

Теорема Валлиса [2]: Пусть A, B — $(-1, +1)$ матрицы порядка m удовлетворяют условиям:

$$A^T = A, \qquad B^T = B, \qquad A \cdot A^T + B \cdot B^T = 2(m+1)I - 2J,$$

$$eN^T = e, \qquad \text{где} \quad N \in \{A, B\}, \quad A \cdot B^T = B \cdot A^T,$$

тогда если

$$X = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & e & e \\ 1 & -1 & -e & e \\ e^T & -e^T & A & -B \\ e^T & e^T & -B & -A \end{matrix} \right\| \tag{1.3}$$

то X является симметрической матрицей Адамара порядка $2(m+1)$.

Теорема Валлиса—Уейтмана [2]: Пусть X, Y, и W — матрицы инцидентности [1, стр. 141] типа 1 [2, стр. 289], а Z — матрица инцидентности типа 2 [2, стр. 289] дополнительного разностного множества 4—$\{2m+1;\ m;\ 2(m-1)\}$ [4] и пусть

$$A = 2X - J, \quad B = 2Y - J, \quad C = 2Z - J, \quad D = 2W - J$$

и e — вектор-строка длины $2m+1$, состоящая из 1, тогда

$$\left\| \begin{matrix} -1 & -1 & -1 & -1 & e & e & e & e \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -e & e & -e & e \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -e & e & e & -e \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -e & -e & e & e \\ e^T & e^T & e^T & e^T & A & B & C & D \\ -e^T & e^T & -e^T & e^T & -B^T & A^T & -D & C \\ -e^T & e^T & e^T & -e^T & -C & D^T & A & -B^T \\ -e^T & -e^T & e^T & e^T & -D^T & -C & B & A^T \end{matrix} \right\| \tag{1.4}$$

является матрицей Адамара порядка $8(m+1)$.

И, наконец, в работе [2] Валлисом дан метод, который позволяет строить матрицы Адамара порядков $8t(m+1)$, где $t = 1, 2, \ldots$ и $4t$ — порядок существующих массивов Адамара [2, стр. 361].

Во всех этих конструкциях существенным было то, что берется «базовый» массив, обладающий определенными свойствами, и дополняется некоторым количеством новых строк и столбцов до приведения к матрице Адамара. Заметим, что:

$$e \cdot N^T = e, \quad \text{где} \quad N \in \{A, B, C, D\}. \tag{1.5}$$

В [4] Уейтман в качестве «базового» массива рассматривал массив Геталс—Зейделя [3].

Введем некоторые обозначения:

$$X = [w, w, w, w], \qquad Y = [w, w, -w, -w],$$

$$Z =]w, -w, w, -w], \qquad W = [-w, w, w, -w],$$

где w — вектор-столбец из v единиц, а K — циклическая матрица с первой строкой $[1, -1, -1, -1]$. Справедлива

Теорема Уейтмана [4]: Пусть A, B, C, D — циклические $(-1, +1)$ матрицы порядка v, $v=2t$ и пусть число 1 в любой строке A равно $t-1$, а у B, C, D равно t, наконец, пусть

$$A\cdot A^T + B\cdot B^T + C\cdot C^T + D\cdot D^T = 4\,(2t+1)\cdot I - 4J,$$

тогда массив:

$$\left\|\begin{array}{cccc|c} A & B\cdot R & C\cdot R & D\cdot R & X \\ -B\cdot R & A & -D^T\cdot R & C^T\cdot R & Y \\ -C\cdot R & D^T R & A & -B^T\cdot R & Z \\ -D\cdot R & -C^T R & B^T\cdot R & A & W \\ \hline -X^T & -Y^T & -Z^T & -W^T & K \end{array}\right\| \tag{1.6}$$

является матрицей Адамара порядка $4\,(2t+1)$.

Определение 1 [5]: Пусть X_i, Y_i, Z_i, W_i, $i=\overline{0,\, n-1}$ есть циклические $(-1, +1)$ матрицы порядка m и пусть

$$X = \sum_{i=0}^{n-1} X_i \otimes U^i, \qquad Y = \sum_{i=0}^{n-1} Y_i \otimes U^i,$$

$$Z = \sum_{i=0}^{n-1} Z_i \otimes U^i, \qquad W = \sum_{i=0}^{n-1} W_i \otimes U^i.$$

X, Y, Z, W называются обобщенными матрицами Вильямсона, если выполняется условие

$$X\cdot X^T + Y\cdot Y^T + Z\cdot Z^T + W\cdot W^T = 4m\cdot n\, I_{mn},$$

$\otimes$ — кронекерово произведение [1].

Определение 2 [6]. Пусть X_i, $i=\overline{1,\, 4}$ — обобщенные матрицы типа Вильямсона порядка n. Квадратная матрица $H_1(X_1, X_2, X_3, X_4)$ называется массивом типа Геталс—Зейделя порядка $4t$, если выполняются условия:

1) Каждый элемент матрицы H имеет вид $\pm X_i$, $\pm X_i^T$, $\pm X_i^T\cdot R$, $\pm X_i\cdot R$, $i=\overline{1,\, 4}$,

2) В каждой строке (столбце) матрицы H общее число элементов, имеющих один из видов $\pm X_i$, X_i^T, $\pm X_i^T\cdot R$, $\pm X_i\cdot R$, равно t.

3) $H\cdot H^T = t\,(X_1X_1^T + X_2X_2^T + X_3X_3^T + X_4X_4^T)\otimes I_{4t}$.

Замечание 1 [6]. При $t=1$ массив типа Гeталс—Зейделя совпадает с массивом Гeталс—Зейделя порядка 4, а именно, с массивом:

$$\left\| \begin{matrix} X & Y\cdot R & Z\cdot R & W\cdot R \\ -Y\cdot R & X & -W^T\cdot R & Z^T\cdot R \\ -Z\cdot R & W^T\cdot R & X & -Y^T\cdot R \\ -W\cdot R & -Z^T\cdot R & Y^T\cdot R & X \end{matrix} \right\|$$

Здесь $R = \{r_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i+j=n+1, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$

Определение 3 [8]. Массивом Валлиса—Уейтмана ВУ $[4h]$ назовем $(4h, 4h)$-матрицу, состоящую из элементов-матриц $\pm A_1$, $\pm A_1^T$, $\pm A_2$, $\pm A_2^T$, $\pm A_3$, $\pm A_3^T$, $\pm A_4$, $\pm A_4^T$, такую, что:

1) в каждой строке (столбце) матрицы ВУ ровно λ элементов вида $\pm A_1$ или $\pm A_1^T$, λ элементов вида $\pm A_2$ или $\pm A_2^T, \ldots$, λ элементов вида $\pm A_4$ или $\pm A_4^T$;

2) строки (столбцы) матрицы ВУ попарно ортогональны, если A_1, A_2, A_4 цикличны, а A_3 — обратноциклична [4].

В теореме Уейтмана условие (1.5) заменяется условием:

$$e\cdot A^T = -2e, \qquad e\cdot B^T = e\cdot C^T = e\cdot D^T = 0 \tag{1.7}$$

в связи с конструкцией матриц A, B, C, D.

Естественно было ожидать, что матрицы Адамара можно получить, используя в качестве «базовой» матрицы произвольные ортогональные массивы порядка $4t$, в частности, массивы Геталс—Зейделя и Валлиса—Уейтмана, введенные и построенные в работах [6—8].

Настоящая работа посвящена исследованию вышеприведенной задачи. Идея этого метода распространяется на случай, когда в качестве «базового» массива берется любой ортогональный массив порядка $4t$, откуда, в частности, вытекает теорема о построении матриц Адамара порядков $4t\,(2p+1)$, где p — простое число, $2p-1$ — степень простого числа. Частным случаем этой теоремы является теорема Уейтмана.

Представим $H(A, B, C, D)$ в виде суммы четырех слагаемых матриц, где первая матрица показывает местонахождение в массиве H $\pm A$, $\pm A^T$, $\pm AR$, $\pm A^TR$, второе слагаемое показывает местонахождение в массиве H матриц $\pm B$, $\pm B^T$, $\pm B\cdot R$, $\pm B^TR$, третье и четвертое слагаемые — соответственно для C и D. Обозначим полученные матрицы через X, Y, Z и W. Например, для массива Геталс—Зейделя порядка 4, приведенного выше, имеем:

$$X = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|, \qquad Y = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

$$Z = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \qquad W = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

Заметим, что $X+Y+Z+W$ является матрицей Адамара порядка 4.

Теорема. Пусть $H(X_1, X_2, X_3, X_4)$ является массивом Геталс—Зейделя порядки $4t$ и A, B, C, D — квадратные, циклические $(-1, +1)$ матрицы порядка n, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{gathered} A\cdot A^T + B\cdot B^T + C\cdot C^T + D\cdot D^T = 4(n+1)I_n - 4J_n, \\ e\cdot N_1 = -2\cdot e, \qquad e\cdot N_2 = e\cdot N_3 = e\cdot N_4 = 0, \end{gathered} \tag{1.8}$$

где

$$N_1 \in \{A, A^T\}, \quad N_2 \in \{B, B^T\}, \quad N_3 \in \{C, C^T\}, \quad N_4 \in \{D, D^T\}.$$

Тогда массив

$$H_1 = \left\| \begin{array}{c|c} -X+Y+Z+W & (X+Y+Z+W)\otimes e \\ \hline (X+Y+Z+W)\otimes e^T & H(A, B, C, D) \end{array} \right\|$$

является матрицей Адамара порядка $4t(n+1)$.

Доказательство. Докажем, что $H_1H_1^T = 4t(n+1)I_{4t(n+1)}$.

$$H_1\cdot H_1^T = \left\| \begin{array}{c} (-X+Y+Z+W)\cdot(-X^T+Y^T+Z^T+W^T) + \\ (X+Y+Z+W)\otimes e(X^T+Y^T+Z^T+W^T)\otimes e^T \\ (X+Y+Z+W)\otimes e^T\cdot(-X^T+Y^T+Z^T+W^T) + \\ +H\cdot(X^T+Y^T+Z^T+W^T)\otimes e^T \\ (-X+Y+Z+W)\cdot(X^T+Y^T+Z^T+W^T)\otimes e + \\ +H\cdot(X+Y+Z+W)\otimes e\cdot H^T \\ (X+Y+Z+W)\otimes e^T\cdot(X^T+Y^T+Z^T+W^T)\otimes \\ \otimes e + H\cdot H^T \end{array} \right\|$$

Рассматривая каждую из этих сумм, при этом используя (1.8) некоторые свойства кронекерова произведения и свойства матриц X, Y, Z, W и е, легко получить, что $H_1H_1^T = 4t(n+1)I_{4t(n+1)}$.
Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема Уейтмана является частным случаем теоремы 4 при $t=1$.

Замечание 2. Утверждение теоремы справедливо для любого ортогонального массива порядка $4t$.

Замечание 3. Так как в работе [4] построены матрицы A, B, C, D, удовлетворяющие условиям (1.8), то из теоремы 4 следует существование матрицы Адамара порядка $4t(2p+1)$, где p — простое число, $2p-1$ — степень простого числа.

Автор выражает искреннюю благодарность С. С. Агаяну за постановку задачи и помощь при выполнении работы.

Ս. Մ. ԱՏՈՒՐՅԱՆ

ՀԱԴԱՄԱՐԻ ՄԱՏՐԻՑԱՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ՊԵԼԻ—ՎԱԼԼԻՍ—ՈՒԻԹՄԱՆԻ ՄԵԹՈԴԻ ՄԻ ՄՈԴԻՖԻԿԱՑԻԱՅԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքը նվիրված է Պելի-Վալլիս-Ուիթմանի մեթոդի հետազոտմանը։ Մեթոդը տարածվում է այն դեպքի համար, երբ որպես «հիմքային» մասիվ վերցվում է ցանկացած կարգի օրթոգոնալ մասիվ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Холл М.* Комбинаторика, М., «Мир», 1970.
2. *Wallis, W. D., Street, A. P., Wallis J. S.* Combinatorics, *Room Squares*. Sum Free Sets, Hadamard Matrices, in Lecture Notes in Mathematics, Berlin, Heidelberg, New-York, 292, 1972.
3. *Geothals J. M.* and *Seidel J. J.* J. Austral Math. Soc., 11, 343—344, 1970.
4. *Whiteman L.* Hadamard matrices of order $4(2p+1)$. „J. Number Theory", 8. 1—11, 1976.
5. *Саруханян А. Г.* Обобщенные матрицы типа Вильямсона. Уч. записки ЕГУ, 1978, 2.
6. *Саруханян А. Г.* О массивах типа Гепалс—Зейделя. Уч. записки ЕГУ, 1979, 1.
7. *Агаян С. С., Саруханян А. Г.* Обобщенные δ-коды и построение матриц Адамара. Проблемы передачи информации, 1980, 3.
8. *Матевосян А. К.* Новый метод построения ортогональных массивов, матриц Адамара и его возможные применения (в этом сборнике).
9. *Агаян С. С., Саруханян А. Г.* О гипотезе М. Плоткина. ДАН АрмССР, 1978, 16, № 5.