УДК 519.1

С. С. АГАЯН, К. О. ЕГИАЗАРЯН

ОБОБЩЕННЫЕ МАТРИЦЫ АДАМАРА

§ 1. Введение и постановка задач

Определение 1 [1]. Обобщенной матрицей Адамара называется квадратная матрица $H\ (p, h)$ порядка h, элементами которой являются корни p-ой степени из единицы и которая удовлетворяет равенству

$$H \cdot H^{\text{ст}} = hI_h, \tag{1.1}$$

где $H^{\text{ст}}$ здесь и ниже—транспонированная матрица H с сопряженными элементами, I_h — единичная матрица порядка h.

Замечание 1.1. Понятие обобщенной матрицы Адамара совпадает:

а) при $p = 2$, $h = 2^n$ с понятием матриц Уолша [2],

б) при $p = 2$, $h = 4t$ с классическим понятием матриц Адамара [3],

в) при $p = 4$, $h = 2t$ с понятием комплексной матрицы Адамара [4].

Замечание 1.2. Матрицы:

а) Фурье, полученные при дискретном преобразовании Фурье [5],

б) системы ВКФ — Кронекера [6] являются соответственно обобщенными $H\ (p, p)$ и $H\ (p, p^n)$-матрицами Адамара.

Замечание 1.3. Обобщенная матрица Адамара $H = H\ (3, 6)$

$$H = \begin{Vmatrix} x_2 & x_0 & x_1 & x_1 & x_0 & x_2 \\ x_0 & x_2 & x_1 & x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0 & x_0 & x_0 & x_0 & x_0 & x_0 \\ x_2 & x_0 & x_2 & x_0 & x_1 & x_1 \\ x_0 & x_2 & x_2 & x_1 & x_0 & x_1 \\ x_2 & x_2 & x_0 & x_1 & x_1 & x_0 \end{Vmatrix} \tag{1.2}$$

где x_0, x_1, x_2 — корни 3-ей степени из 1, а именно:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

не совпадает с вышеуказанными матрицами.

Определение 2 [1]. Обобщенная матрица Адамара $H(p, h)$ называется нормализованной, если первая строка и первый столбец $H(p, h)$ состоят только из единиц.

В работе [1] Батсоном доказано, что если $H(p, h)$, где p—простое число, является обобщенной нормализованной матрицей Адамара, то $h=pt$, где t—натуральное число. Обратная задача, а именно, задача построения для любого простого числа p обобщенной матрицы Адамара $H(p, pt)$ порядка pt остается открытой, как и остаются открытыми при $p=2$, $h=4t$; $p=4$, $h=2t$ хорошо известные задачи по построению классической и комплексной матриц Адамара, хотя классические матрицы Адамара начал исследовать в 1867 г. Сильвестр [7].

В работах Батсона [1, 8] построены обобщенные матрицы Адамара следующих порядков:

а) $H(p, 2^m p^k)$, где p — простое число, $m \leqslant k$, k — произвольное натуральное число, m — неотрицательное целое число,

б) $H(2p, h)$, для любого натурального числа p, если только существует $H(2, h)$.

Из последних работ, посвященных построению обобщенных матриц Адамара, отметим работу [9], где найдена связь между обобщенными матрицами Адамара, схемами с делимостью на группы, разрешимыми уравновешенными неполными блок-схемами и ортогональными массивами, и работу об обобщенных матрицах Вильямсона [10].

Справку о приложениях обобщенных матриц Адамара (частные случаи) можно найти, например, в работах [2, 5, 6, 11, 17, 18], где в основном рассматриваются вопросы, касающиеся обработки дискретных сигналов и изображений, базирующихся на методах быстрого преобразования по системам Уолша, Фурье, Виленкина—Крестенсона—Кронекера. Отметим, что методы быстрого преобразования опираются на теоремы о факторизации матриц.

Следовательно, при исследовании (построении) обобщенных матриц Адамара нужно обратить внимание на следующее: алгоритмы построения обобщенных матриц Адамара должны быть такими, чтобы полученные матрицы можно было факторизовать. Последнее, в свою очередь, приведет к единому методу построения быстрых ортогональных преобразований, базирующихся на обобщенных матрицах Адамара.

Начиная с 1970 г. в связи с различными практическими применениями матриц Адамара, такими, как коды, исправляющие ошибки, обработка сигналов, высокоскоростные многоканальные спектрометры и т. д. [17], все более возрастает интерес к изучению и построению пространственных матриц Адамара. В связи с этим можно указать работы Шлихта [16, 17], Хаммера и Себерри [18], Агаяна [19].

Определение 3 [17]. n-мерной матрицей Адамара $[H]_n = \| H_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \|$ $(i_1, i_2, \ldots, i_n = 1, 2, \ldots, m)$ называется такая матрица, состоящая из $+1$ и -1, в которой все параллельные $(n-1)$-мерные сечения (сечения ориентаций (i_l) $1 \leqslant l \leqslant n$) взаимно ортогональны, то есть

$$\sum_{r} \cdots \sum_{t} \cdots \sum_{z} H_{r \ldots \alpha \ldots z} \overline{H}_{r \ldots \beta \ldots z} = m^{(n-1)} \delta_{\alpha, \beta}, \tag{1.3}$$

где $(r \ldots t \ldots z)$ представляют все перестановки $(i_1 \ldots i_l \ldots i_n)$, $\delta_{\alpha, \beta}$ — символ Кронекера. Согласно свойству ортогональных матриц [18], пространственные матрицы Адамара ортогональны по $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, где $2 \leqslant d_j \leqslant n$, $j = 1, 2, \ldots, n$, т. е. d_j указывает на то, что в j-том направлении (j-ой координате) $d_j - 1$, d_j, $d_j + 1, \ldots, n - 1$-мерные матрицы взаимно ортогональны, но $d_j - 2$ — мерные сечения не ортогональны.

Определение 4 [17]. Полностью правильный n-мерной матрицей Адамара называется пространственная матрица Адамара той же размерности, в которой все двумерные сечения (плоскости), в любых возможных нормальных осевых направлениях, являются матрицами Адамара.

Замечание 1.4. Все промежуточные k-мерные сечения $(2 < k < n)$ полностью правильной n-мерной матрицы Адамара являются также полностью правильными пространственными матрицами Адамара.

Вышеопределенная матрица ортогональная по свойству $(2, 2, \ldots, 2)$. Известны также [17] n-мерные матрицы Адамара, ортогональные по свойству $(n, n, \ldots, n)$ — это, так называемые, абсолютно неправильные пространственные матрицы Адамара. Между указанными двумя экстремальными классами пространственных матриц Адамара существует большое многообразие этих матриц с определенными свойствами ортогональности.

Некоторые задачи прикладного характера, в частности цифровой обработки изображений, диктуют введение пространственных обобщенных матриц Адамара, нахождение эффективных алгоритмов их построения, дающих возможность факторизовать эти матрицы.

Основная задача. Для натуральных чисел p, m, n построить обобщенную (пространственную и классическую) матрицу Адамара $[H(p, m)]_n$.

Данная работа посвящена вышеприведенной задаче, а именно, построению обобщенных (двумерных и пространственных) матриц Адамара. В работе найдены некоторые необходимые условия существования обобщенных матриц Адамара, доказано, что если $H(p^{\alpha}, h)$ нормализованная обобщенная матрица Адамара с определенными условиями, то $h = pt$, где p — простое, а α, t — натуральные числа. Приведены алгоритмы построения обобщенных матриц Адамара новых порядков, поддающиеся факторизации. Найдены условия существования и алгоритмы построения циклических обобщенных матриц и матриц Адамара с циклическим ядром. Введено общее определение пространственных обобщенных матриц Адамара, приведены алгоритмы построения как полностью, так и частично правильных пространственных обобщенных матриц Адамара и алгоритмы быстрого преобразования этих матриц.

§ 2. Некоторые необходимые условия существования обобщенных матриц Адамара

Вначале сформулируем некоторые свойства обобщенных матриц Адамара, в основном приведенных в [1].

Свойство 1. Условие $HH^{\text{ст}} = hI_h$ эквивалентно условию $H^{\text{ст}}H = hI_h$, другими словами, ортогональность двух строк обобщенной матрицы Адамара эквивалентно ортогональности любых двух столбцов.

Свойство 2. Перестановка строк (столбцов) и умножение элементов строк (столбцов) на фиксированный корень из 1 не меняет свойство матрицы быть обобщенной, лишь с той разницей с классической и комплексной матрицей Адамара, что здесь меняется параметр p, т. е. если $H_1 = H(p_1, h)$ обобщенная матрица Адамара, а γ_{p_2} — первообразный корень p_2 степени из 1, то $H_2 = \gamma_{p_2} H_1 = H(p_3, h)$, где $p_3 =$ = н. о. к. (p_1, p_2) (н. о. к. — наименьшее общее кратное).

Свойство 3. Обобщенная матрица Адамара элементарными операциями может быть приведена к нормализованному виду, т. е. к матрице, в которой первая строка и столбец содержат только корень $\gamma^0 = 1$.

Свойство 4. Если $H = \{h_{ij}\}_{i,\,j=1}^{h}$ — обобщенная нормализованная матрица Адамара, то

$$\sum_{j=1}^{h} h_{ij} = \sum_{j=1}^{h} \bar{h}_{ij} = 0, \qquad i = 2, 3, \dots, h, \tag{2.1}$$

$$\sum_{j=1}^{h} h_{ij} = \sum_{i=1}^{h} \bar{h}_{ij} = 0, \qquad j = 2, 3, \dots, h, \tag{2.2}$$

т. е. сумма элементов любой строки и любого столбца, кроме первых, равна нулю.

Свойство 5. Если $H_1 = H(p_1, h_1)$ и $H_2 = H(p_2, h_2)$ — обобщенные матрицы Адамара, то

$$H = H_1 \otimes H_2 = H(p_3, h_3), \tag{2.3}$$

где $p_3 =$ н. о. к. (p_1, p_2), $h_3 = h_1 h_2$, $\otimes$ — прямое произведение [3] является обобщенной матрицей Адамара с параметрами p_3 и h_3.

Вернемся к нахождению необходимых условий существования обобщенных матриц Адамара $H(p, h)$, где p — не простое число. С этой целью заметим, что если $H(q, h)$ — нормализованная обобщенная матрица Адамара и q — простое число, то $h = qt$, где t — натуральное число, и, по аналогии с классическими матрицами Адамара $H(2, h)$, было замечено [1], что здесь не необходимо, чтобы

$$\begin{cases} h = q^2 t \\ h = q \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} h = 2qt \\ h = q \end{cases}$$

Покажем, что для $H(p, h)$-матриц, где p — не простое число, условие $h = pt$ не является необходимым, приведя примеры нормализованных обобщенных матриц Адамара $H(6, 10)$ и $H(6, 14)$.

$$H_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & z_4 & z_1 & z_5 & z_3 & z_1 & z_3 & z_3 & z_5 & z_1 \\ 1 & z_1 & z_2 & z_3 & z_5 & z_5 & z_1 & z_3 & z_5 & z_3 \\ 1 & z_5 & z_3 & z_2 & z_1 & z_5 & z_3 & z_5 & z_3 & z_1 \\ 1 & z_3 & z_5 & z_1 & z_4 & z_1 & z_1 & z_5 & z_3 & z_3 \\ 1 & z_3 & z_3 & z_3 & z_3 & z_3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & z_1 & z_1 & z_5 & z_3 & z_4 & z_3 & 1 & z_2 & z_4 \\ 1 & z_1 & z_5 & z_3 & z_5 & z_2 & z_4 & z_3 & z_2 & 1 \\ 1 & z_5 & z_3 & z_5 & z_1 & z_2 & 1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & z_3 & z_5 & z_1 & z_1 & z_4 & z_4 & z_2 & 1 & z_3 \end{Vmatrix}$$

$$H_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z_5 & z_5 & z_3 & z_1 & z_1 & z_4 & z_2 & z_3 & z_1 & z_3 & z_5 & z_3 \\ 1 & z_5 & z_4 & z_3 & z_1 & z_3 & z_1 & 1 & z_5 & z_4 & z_3 & z_3 & z_1 & z_1 \\ 1 & z_5 & z_3 & z_2 & z_5 & z_1 & z_3 & z_4 & z_1 & z_1 & z_4 & z_5 & z_1 & z_3 \\ 1 & z_3 & z_1 & z_5 & z_2 & z_3 & z_5 & z_4 & z_3 & z_1 & z_5 & z_4 & z_1 & z_1 \\ 1 & z_1 & z_3 & z_1 & z_3 & z_4 & z_5 & 1 & z_1 & z_1 & z_3 & z_3 & z_4 & z_5 \\ 1 & z_1 & z_1 & z_3 & z_5 & z_5 & 1 & z_4 & z_3 & z_5 & z_3 & z_1 & z_3 & z_2 \\ 1 & z_2 & z_4 & z_4 & z_4 & z_4 & z_2 & z_3 & z_5 & z_1 & z_1 & z_1 & z_1 & z_5 \\ 1 & z_4 & z_5 & z_1 & z_5 & z_3 & z_3 & z_1 & z_3 & 1 & 1 & z_2 & z_4 & z_2 \\ 1 & z_3 & 1 & z_1 & z_1 & z_3 & z_1 & z_3 & 1 & z_3 & z_4 & 1 & z_4 & z_4 \\ 1 & z_5 & z_1 & z_4 & z_3 & z_1 & z_3 & z_1 & z_4 & z_2 & z_3 & 1 & z_4 & 1 \\ 1 & z_3 & z_1 & z_3 & z_4 & z_1 & z_5 & z_1 & 1 & z_4 & 1 & z_3 & z_2 & z_4 \\ 1 & z_1 & z_3 & z_1 & z_1 & 1 & z_3 & z_3 & z_4 & z_4 & 1 & z_4 & z_3 & 1 \\ 1 & z_3 & z_3 & z_5 & z_1 & z_5 & z_4 & z_1 & z_2 & z_4 & z_2 & 1 & 1 & z_3 \end{Vmatrix}$$

где $1, z_1, \ldots, z_5$ — корни 6-ой степени из 1.

Обозначим через F множество корней p^α степени из 1, где p — простое число, а α — натуральное число, через γ_p — первообразный корень p-ой степени из 1.

$$F = \{1, f_1, f_2, \dots, f_{p^\alpha}; f_t = \gamma^t_{p^\alpha - 1} = e^{i\frac{2\pi t}{p^\alpha}}, \quad t = 0, 1, \dots, p^\alpha - 1; f_0 = 1\}$$

Известно, что корни q-ой (q — любое натуральное число) степени из 1 в поле комплексных чисел образуют циклическую абелеву группу относительно умножения и порождаются любым первообразным корнем q-ой степени из 1. Нас будут интересовать собственные (нетривиальные) подгруппы группы F. Так как подгруппа циклической группы снова циклическая, и ее порядок является делителем порядка группы, то имеем подгруппы $G_1, G_2, \dots, G_{\alpha-1}$ группы F из корней соответственно $p, p^2, \dots, p^{\alpha-1}$ степени из 1.

$$G_k = \left\{ g^{(k)}_j = f_{jp^{\alpha-k}} = \gamma^j_{p^k} = e^{i\frac{2\pi j}{p^k}} \right\}_{j=0}^{p^k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \alpha - 1$$

По подгруппам G_k построим смежные классы элементов группы F:

$$X^{(k)}_{m_k} = \gamma^{m_k}_{p^\alpha} \cdot G_k = \left\{ f_{jp^{\alpha-k}+m_k} = \gamma^{jp^{\alpha-k}+m_k}_{p^\alpha} \right\}_{j=0}^{p^k-1} \tag{2.4}$$

$$m_k = 1, 2, \dots, p^{\alpha-k} - 1; \quad k = 1, 2, \dots, \alpha - 1$$

Утверждение 2.1. Множества $X^{(k)}_{m_k}$, $m_k = 1, 2, \dots, p^{\alpha-k} - 1$; $k = 1, 2, \dots, \alpha - 1$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $X^{(k)}_{m_k} = X^{(1)}_{m_k} \cup X^{(1)}_{m_k+p^{\alpha-k}} \cup \dots \cup X^{(1)}_{m_k+(p^{k-1}-1)p^{\alpha-k}} = \bigcup\limits_{r=0}^{p^{k-1}-1} X^{(1)}_{m_k+rp^{\alpha-k}}$

где $k = 2, 3, \dots, \alpha - 1$; $m_k = 0, 1, \dots, p^{\alpha-k} - 1$, причем $X^{(k)}_0 = G_k$,

2) множества $X^{(1)}_m$ ($m = 1, 2, \dots, p^{\alpha-1} - 1$) состоят из элементов:

а) первообразных корней p^k-степени из 1, если

$$m \in M = \{j_1 p^{\alpha-k} + \dots + j_{k-2} p^{\alpha-3} + j_{k-1} p^{\alpha-2}\},$$

$$j_1 = 1, 2, \dots, p - 1; \quad j_2 = \dots = j_{k-1} = 0, 1, \dots, p - 1,$$

для $k = 2, 3, \dots, \alpha - 1$

б) первообразных корней p^α степени из 1, если н. о. д. $(m, p) = 1$.

3) сумма всех элементов в каждом из множеств $X^{(1)}_n$, $n = 0, 1, \dots, p^{\alpha-1} - 1$ равна 0:

$$\sum_{j=0}^{p-1} f_{jp^{\alpha-1}+n} = 0$$

Доказательство 1) по определению множеств $X^{(1)}_{m_1}$ (из (2.4)) имеем:

$$\bigcup_{r=0}^{p^{k-1}-1} X^{(1)}_{m_k+rp^{\alpha-k}} = \bigcup_{r=0}^{p^{k-1}-1} \gamma^{m_k}_{p^\alpha} \cdot X^{(1)}_{rp^{\alpha-k}} = \bigcup_{r=0}^{p^{k-1}-1} \left\{ \gamma^{m_k}_{p^\alpha} \cdot \gamma^{jp^{\alpha-1}+rp^{\alpha-k}}_{p^\alpha} \right\}_{j=0}^{p-1} =$$

$$= \bigcup_{r=0}^{p^{k-1}-1} \left\{ \gamma^{m_k}_{p^\alpha} \cdot \gamma^{jp^{k-1}+r}_{p^k} \right\}_{j=0}^{p-1} = \left\{ \gamma^{m_k}_{p^\alpha} \cdot \gamma^j_{p^k} \right\}_{j=0}^{p^k-1} = \left\{ \gamma^{m_k+jp^{\alpha-k}}_{p^\alpha} \right\}_{j=0}^{p^k-1} = X^{(k)}_{m_k}$$

2) а) принадлежность элементов множества $X_m^{(1)} = \{f_{jp^{\alpha-1}+m}\}_{j=0}^{p-1}$ множеству A_k-первообразных корней p^k-ой степени из 1, при указанных m, следует из того, что $A_k = \{f_{j_1 p^{\alpha-k}+\ldots+j_{k-2}p^{\alpha-3}+j_{k-1}p^{\alpha-2}+jp^{\alpha-1}}\}$ где $j_1 = 1, \ldots, p-1$; $j_2, j_3, \ldots, j_{k-1}$, $j = 0, 1, \ldots, p-1$.

б) множества $X_m^{(1)}$ $(m = 1, 2, \ldots, p^{\alpha-1}-1)$ будут состоять из первообразных корней p^α степени из 1, когда н. о. д. $(jp^{\alpha-1}+m, p^\alpha) = 1$, т. е. н. о. д. $(m, p) = 1$.

Мощность множества A_k равна $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$, где φ — функция Эйлера. Мы имеем $p^{k-2}(p-1)$ непересекающихся (не имеющих общего элемента) множеств $X_m^{(1)}$ (по определению этих множеств) для $m \in M$ и фиксированного $k \in \{2, 3, \ldots, \alpha-1\}$, в каждом из которых по p элементов, итого в совокупности $p^{k-1}(p-1)$ элементов—первообразных корней p^k-ой степени из 1.

3) $$\sum_{j=0}^{p-1} f_{jp^{\alpha-1}+n} = \sum_{j=0}^{p-1} \gamma_{p^\alpha}^{jp^{\alpha-1}+n} = \gamma_{p^\alpha}^n \cdot \sum_{j=0}^{p-1} \gamma_p^j = 0,$$

так как для любого $p \geqslant 2$ натурального числа имеет место

$$\sum_{j=0}^{p-1} \gamma_p^j = 0.$$

Теорема 2.2. Пусть а) $H = H(p^\alpha, h)$ — нормализованная обобщенная матрица Адамара, p — простое число, α — натуральное число,

б) строки (столбцы) матрицы H заполняются только множествами

$$X_{m_k}^{(k)}, \quad m_k = 0, 1, \ldots, p^{\alpha-k}-1; \quad k = 1, 2, \ldots, \alpha-1 \quad (X_0^{(k)} = G_k).$$

Тогда $h = pt$, где t — натуральное число.

Доказательство Согласно свойству 4 нормализованных обобщенных матриц Адамара имеем для любой фиксированной строки i матрицы $H = \{h_{ij}\}_{i,j=1}^h$:

$$\sum_{j=1}^h h_{ij} = 0.$$

Ввиду условия б) теоремы и по утверждению 2.1 имеем $h = pt$, где t — натуральное число.

§ 3. Построение обобщенных матриц Адамара новых порядков

Перейдем к построению обобщенных матриц Адамара новых порядков, позволяющих факторизовать полученные матрицы, и к рассмотрению рекуррентного алгоритма построения $H(p^n, p^n)$-матриц, где p — простое, n — натуральное число.

Определение 5. Квадратные матрицы X и $У$ порядка k, состоящие из 0 и корней p-ой степени из единицы, удовлетворяющие следующим условиям:

$$X * Y = 0 \quad (* \text{ Адамарово произведение}) \tag{3.1}$$

$X \pm Y$ матрица состоит из корней p-ой степени из единицы (3.2)

$$XY^{\text{ст}} = YX^{\text{ст}} \tag{3.3}$$

$$XX^{\text{ст}} + YY^{\text{ст}} = kI_k, \tag{3.4}$$

называются обобщенным двухэлементным гиперкаркасом. Обозначим его через

$$\Gamma(p, k) = \{X(p, k), Y(p, k)\}$$

При $p = 2$ понятие обобщенного двухэлементного гиперкаркаса совпадает с понятием двухэлементного гиперкаркаса [12].

Утверждение 3.1. Если существует обобщенная матрица Адамара $H(p, 2m)$, то существует обобщенный двухэлементный гиперкаркас $\Gamma(2p, 2m)$.

Доказательство. Представим матрицу $H(p, 2m)$ в виде

$$H(p, 2m) = \begin{Vmatrix} A & B \\ D & C \end{Vmatrix}$$

Далее, обозначим через X, Y матрицы:

$$X = \begin{Vmatrix} A & O \\ O & C \end{Vmatrix} \qquad Y = \begin{Vmatrix} O & B \\ -D & O \end{Vmatrix}$$

Докажем, что $\{X, Y\}$ определяет обобщенный двухэлементный гиперкаркас. Легко видеть, что выполняются условия (3.1) и (3.2). Проверим условия (3.3) и (3.4), которые примут вид:

$$\begin{cases} -AD^{\text{ст}} = BC^{\text{ст}} \\ CB^{\text{ст}} = -DA^{\text{ст}} \end{cases} \qquad \begin{cases} AA^{\text{ст}} + BB^{\text{ст}} = 2mI_m \\ CC^{\text{ст}} + DD^{\text{ст}} = 2mI_m, \end{cases}$$

что также выполняется в силу того, что $HH^{\text{ст}} = 2mI_{2m}$.

Утверждение 3.2. Если существует обобщенная матрица Адамара $H(p, h)$, то существует обобщенный двухэлементный гиперкаркас $\Gamma(p, h)$.

Доказательство. Пусть имеем $H(p, h) = \{h_{ij}\}_{i, j=0}^{h-1}$. Определим $\Gamma(p, h) = \{X, Y\}$ следующим образом:

$$X = \begin{vmatrix} a_0 h_0 \\ a_1 h_1 \\ \vdots \\ a_{h-1} h_{h-1} \end{vmatrix} \qquad Y = \begin{vmatrix} b_0 h_0 \\ b_1 h_1 \\ \vdots \\ b_{h-1} h_{h-1} \end{vmatrix}$$

где h_i, $i = 0, 1, \ldots, h-1$ есть, вектор-строки из $H(p, h)$. Числа a_i и b_i, $i = 0, 1, \ldots, h-1$ удовлетворяют условиям:

I) $a_i \cdot b_i = 0 \qquad a_i,\ b_i \in \{0,\ 1\}$

II) $a_i + b_i = 1 \qquad i = 0,\ 1, \ldots, h-1.$

Докажем, что $\Gamma(p,\ h) = \{X,\ Y\}$ является обобщенным двухэлементным гиперкаркасом. Условия (3.1) и (3.2) выполняются вследствие I) и II). Условие (3.3) $XY^{ст} = YX^{ст} = 0$, ввиду I) и так как для

$$i \neq j,\quad i,\ j = 0,\ 1, \ldots, h-1,\ (h_i,\ \bar{h}_j) = 0.$$

Условие (3.4) выполняется вследствие I), II) и $HH^{ст} = hI_h$.

Теорема 3.3. Пусть $H_0 = H(p_1,\ m)$ — обобщенная матрица Адамара, $\Gamma(p_2,\ k) = \{X,\ Y\}$ — обобщенный двухэлементный гиперкаркас, и пусть выполняется

$$H_0 H_0'^{ст} + H_0' H_0^{ст} = 0, \tag{3.5}$$

тогда H_n и H_n', заданные рекуррентными соотношениями

$$\begin{cases} H_n = X \otimes H_{n-1} + Y \otimes H_{n-1}' \\ H_n' = X \otimes H_{n-1}' - Y \otimes H_{n-1} \end{cases} \tag{3.6}$$

являются:

1) обобщенными матрицами Адамара $H(2p,\ mk^n)$, где $p =$ н. о. к. $(p_1,\ p_2)$, если н. о. д. $(p_1,\ 2) = 1$ и н. о. д. $(p_2,\ 2) = 1$.

2) обобщенными матрицами Адамара $H(p,\ mk^n)$, где $p =$ н. о. к. $p_1,\ p_2)$, если хоть одно из p_1 и p_2 четно.

Доказательство: докажем теорему, пользуясь методом математической индукции.

1. Для $n = 0$ легко вычислить, что

$$H_0' H_0'^{ст} = mI_m.$$

2. Докажем для n:

$$\text{а)}\ H_n H_n^{ст} = mk^n I_{mk^n}$$

$$\text{б)}\ H_n' H_n'^{ст} = mk^n I_{mk^n}$$

$$\text{в)}\ H_n H_n'^{ст} + H_n' H_n^{ст} = 0,$$

Проверим условие а):

$$H_n H_n^{ст} = XX^{ст} \otimes H_{n-1} H_{n-1}^{ст} + XY^{ст} \otimes H_{n-1} H_{n-1}'^{ст} + YX^{ст} \otimes H_{n-1}' H_{n-1}^{ст} +$$

$$+ YY^{ст} \otimes H_{n-1}' H_{n-1}'^{ст} = (XX^{ст} + YY^{ст}) \otimes mk^{n-1} I_{mk^{n-1}} +$$

$$+ XY^{ст} \otimes (H_{n-n}' H_{n-1}^{ст} + H_{n-1} H_{n-1}'^{ст}) = kI_k \otimes mk^{n-1} I_{mk^{n-1}} = mk^n I_{mk^n}.$$

Аналогично можно показать б), т. е. $H_n' H_n'^{ст} = mk^n I_{mk^n}$.

Докажем условие в):

$$H_n H_n'^{\text{ст}} + H_n' H_n^{\text{ст}} = (X \otimes H_{n-1} + Y \otimes H_{n-1}')(X^{\text{ст}} \otimes H_{n-1}'^{\text{ст}} - Y^{\text{ст}} \otimes H_{n-1}^{\text{ст}}) +$$

$$+ (X \otimes H_{n-1}' - Y \otimes H_{n-1})(X^{\text{ст}} \otimes H_{n-1}^{\text{ст}} + Y^{\text{ст}} \otimes H'^{\text{ст}}_{n-1}) =$$

$$= XX^{\text{ст}} \otimes (H_{n-1} H_{n-1}'^{\text{ст}} - H_{n-1}' H_{n-1}^{\text{ст}}) - XY^{\text{ст}} \otimes (H_{n-1} H_{n-1}^{\text{ст}} -$$

$$- H_{n-1}' H_{n-1}'^{\text{ст}}) - YX^{\text{ст}} \otimes (H_{n-1} H_{n-1}^{\text{ст}} - H_{n-1}' H_{n-1}'^{\text{ст}}) -$$

$$- YY^{\text{ст}} \otimes (H_{n-1} H'^{\text{ст}}_{n-1} + H_{n-1}' H_{n-1}^{\text{ст}}) =$$

$$= (XX^{\text{ст}} - YY^{\text{ст}}) \otimes (H_{n-1} H_{n-1}'^{\text{ст}} + H_{n-1}' H_{n-1}'^{\text{ст}}) -$$

$$- (XY^{\text{ст}} + YX^{\text{ст}}) \otimes (H_{n-1} H_{n-1}^{\text{ст}} - H_{n-1}' H_{n-1}'^{\text{ст}}) = 0.$$

Замечание 3.1. В теореме 3.3 матрицу H_0', в частности, могли определить:

$$H_0' = \left(I_{m/2} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) \cdot H_0,$$

где $H_0 = H(p_1, m)$ — матрица, откуда видно, что m должно быть четным.

Если же m — нечетное число, то не всегда существует H_0', удовлетворяющее (3.5), так как справедливо

Утверждение 3.4. Если $H_0 = H$ (3.3) — матрица, полученная с помощью матрицы Вандермонда, то не существует $H_0' = H$ (3.3) — матрицы, удовлетворяющей (3.5).

Доказательство. Имеем

$$H_0 = V_3 = \{v_{ij}\}_{i,\, j=0}^{2}, \qquad v_{ij} = \gamma_3^{ij(\mathrm{mod}3)} = x_1^{ij(\mathrm{mod}3)},$$

где $\gamma_3^1 = x_1 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ является первообразным корнем 3-й степени из единицы.

Или же

$$H_0 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_2 & x_1 \end{Vmatrix} \qquad H_0^{\text{ст}} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_2 & x_1 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{Vmatrix}$$

Будем искать H_0' в виде:

$$H_0' = \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{Vmatrix} \qquad H_0'^{\text{ст}} = \begin{Vmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \bar{b}_3 \\ \bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \bar{c}_3 \end{Vmatrix}$$

$$H_0 H_0'^{\text{ст}} = \left\| \begin{matrix} \bar{a}_1 + \bar{b}_1 + \bar{c}_1 & \bar{a}_2 + \bar{b}_2 + \bar{c}_2 & \bar{a}_3 + \bar{b}_3 + \bar{c}_3 \\ \bar{a}_1 + \bar{b}_1 x_1 + \bar{c}_1 x_2 & \bar{a}_2 + \bar{b}_2 x_1 + \bar{c}_2 x_2 & \bar{a}_3 + \bar{b}_3 x_1 + \bar{c}_3 x_2 \\ \bar{a}_1 + \bar{b}_1 x_2 + \bar{c}_1 x_1 & \bar{a}_2 + \bar{b}_2 x_2 + \bar{c}_2 x_1 & \bar{a}_3 + \bar{b}_3 x_2 + \bar{c}_3 x_1 \end{matrix} \right\|$$

$$H_0' H_0^{\text{ст}} = \left\| \begin{matrix} a_1 + b_1 + c_1 & a_1 + b_1 x_2 + c_1 x_1 & a_1 + b_1 x_1 + c_1 x_2 \\ a_2 + b_2 + c_2 & a_2 + b_2 x_2 + c_2 x_1 & a_2 + b_2 x_1 + c_2 x_2 \\ a_3 + b_3 + c_3 & a_3 + b_3 x_2 + c_3 x_1 & a_3 + b_3 x_1 + c_3 x_2 \end{matrix} \right\|$$

Для того, чтобы выполнялось (3.5), необходимо выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} 1) \quad a_1 + b_1 + c_1 + \bar{a}_1 + \bar{b}_1 + \bar{c}_1 = 0 \\ 2) \quad a_1 + b_1 x_2 + c_1 x_1 + \bar{a}_2 + \bar{b}_2 + \bar{c}_2 = 0 \\ 3) \quad a_1 + b_1 x_1 + c_1 x_2 + \bar{a}_3 + \bar{b}_3 + \bar{c}_3 = 0 \\ 4) \quad a_2 + b_2 x_2 + c_2 x_1 + \bar{a}_2 + \bar{b}_2 x_1 + \bar{c}_2 x_2 = 0 \\ 5) \quad a_2 + b_2 x_1 + c_2 x_2 + \bar{a}_3 + \bar{b}_1 x_1 + \bar{c}_3 x_2 = 0 \\ 6) \quad a_3 + b_3 x_1 + c_3 x_2 + \bar{a}_3 + \bar{b}_3 x_2 + \bar{c}_3 x_1 = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Матрица H_0' должна состоять из элементов: 1, x_1 или x_2, т. е. из множества корней 3-й степени из единицы.

Рассмотрим 1) системы (*) $a_1 + \bar{a}_1 + b_1 + \bar{b}_1 + c_1 + \bar{c}_1 = 0$.

Найдем для него значения a_1, b_1, c_1.

Могут быть следующие 6 случаев:

$$\begin{array}{lllll} A_1) & a_1 = 1; & b_1 = x_2; & c_1 = x_1 & \text{или} \\ B_1) & a_1 = x_2; & b_1 = 1; & c_1 = x_1 & \text{или} \\ C_1) & a_1 = x_2; & b_1 = x_1; & c_1 = 1 & \text{или} \\ D_1) & a_1 = 1; & b_1 = x_1; & c_1 = x_2 & \text{или} \\ E_1) & a_1 = x_1; & b_1 = 1; & c_1 = x_2 & \text{или} \\ F_1) & a_1 = x_1; & b_1 = x_2; & c_1 = 1 & \end{array}$$

Рассмотрим теперь 2) системы (*): $a_1 + b_1 x_2 + c_1 x_1 + \bar{a}_2 + \bar{b}_2 + \bar{c}_2 = 0$. Подставим вместо a_1, b_1, c_1 найденные из 1) значения $A_1) - F_1)$:

$$A_2) \quad 1 + x_1 + x_2 + \bar{a}_2 + \bar{b}_2 + \bar{c}_2 = 0,$$

$$B_2) \quad x_2 + x_2 + x_2 + \bar{a}_2 + \bar{b}_2 + \bar{c}_2 = 0,$$

а этого не может быть при любой тройке a_2, b_2, c_2 из множества корней $\{1, x_1, x_2\}$. Таким образом $B_1)$ не может быть.

$$C_2) \quad x_2 + 1 + x_1 + \bar{a}_2 + \bar{b}_2 + \bar{c}_2 = 0;$$

$$D_2) \quad 1 + 1 + 1 + \bar{a}_2 + \bar{b}_2 + \bar{c}_2 = 0,$$

чего не может быть, т. е. D_1) тоже отпадает.

$$E_2)\quad x_1+x_2+1+\bar{a}_2+\bar{b}_2+\bar{c}_2=0,$$

$$F_2)\quad x_1+x_1+x_1+\bar{a}_2+\bar{b}_2+\bar{c}_2=0,$$

тоже невозможно, отпадает и F_1).

Рассмотрим 3) системы (*):

$$a_1+b_1x_1+c_1x_2+\bar{a}_3+\bar{b}_3+\bar{c}_3=0.$$

Подставим значения a_1, b_1, c_1 из A_1), C_1) и E_1), получим:

$$A_3)\quad 1+1+1+\bar{a}_3+\bar{b}_3+\bar{c}_3=0,$$

нельзя найти такие a_3, b_3 и c_3 из множества $\{1, x_1, x_2\}$, чтобы A_3) выполнялось, поэтому A_1) отпадает.

$$C_3)\quad x_2+x_2+x_2+\bar{a}_3+\bar{b}_3+\bar{c}_3=0,$$

аналогично невозможно и здесь. C_1) отпадает.

$$E_3)\quad x_1+x_1+x_1+\bar{a}_3+\bar{b}_3+\bar{c}_3=0,$$

то же самое—отпадает и случай E_1).

Таким образом, имея $H_0=H$ (3.3)-матрицу, полученную матрицей Вандермонда, нельзя получить $H_0'=H$ (3,3)-матрицу, удовлетворяющую (3.5).

Утверждение 3.5. Пусть $p_1, \dots, p_k$ — различные простые числа, тогда существует обобщенная матрица Адамара

$$H(2p_1^{\alpha_1}\cdot \dots \cdot p_l^{\alpha_l},\ mk_1^{\beta_1}\cdot \dots \cdot k_{l-1}^{\beta_{l-1}}),$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_l$, $\beta_1, \dots, \beta_{l-1}$ — натуральные числа.

Доказательство. Результат получается из теоремы 3.3, если взять $H(p_1^{\alpha_1}, m)$ — обобщенную матрицу Адамара и $\Gamma(p_2^{\alpha_2}, k_1)$, $\Gamma(p_3^{\alpha_3}, k_2), \dots, \Gamma(p_l^{\alpha_l}, k_l)$ — обобщенные двухэлементные гиперкаркасы.

Теорема 3.6. Матрицу H_n, определенную в теореме 3.3, удовлетворяющую условию (3.5), можно представить в виде произведения слабозаполненных матриц:

$$\begin{cases} H_n = M_1\cdot M_2\cdot \dots \cdot M_{n+1} \\ M_{n+1} = I_{k^n}\otimes H_0 \\ M_l = I_{m^{l-1}}\otimes [X\otimes I_{mk^{n-l}}+Y\otimes P_{mk^{n-l}}], \\ \text{где} \\ P_{mk^{n-l}} = I_{\frac{mk^{n-l}}{2}}\otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad l=1, 2, \dots, n \end{cases} \qquad (3.6)$$

Доказательство. Находим из (3.5)

$$H_n = X \otimes H_{n-1} + Y \otimes H'_{n-1} = (X \cdot I_k) \otimes (I_{mk^{n-1}} \cdot H_{n-1}) +$$
$$+ (Y \cdot I_k) \otimes (P_{mk^{n-1}} \cdot H_{n-1}) = [X \otimes I_{mk^{n-1}} +$$
$$+ Y \otimes P_{mk^{n-1}}] \cdot [I_k \otimes H_{n-1}] = M_1 \cdot [I_k \otimes H_{n-1}].$$

Сделав то же с H_{n-1}, H'_{n-1} и т. д., получим (3.6).

Приведем алгоритм построения $H(p^n, p^n)$-матриц. С этой целью заметим, что матрица Вандермонда $V = \{v_{ij}\}_{i, j=0}^{p-1}$ является симметричной обобщенной матрицей Адамара, если $v_{ij} = \gamma_p^{ij (\mathrm{mod}\, p)}$, $i, j = 0, \ldots, p-1$, где γ_p — первообразный корень p-ой степени из 1 ([1]).

Утверждение 3.7. Существует рекуррентный алгоритм построения обобщенной $H(p^n, p^n)$-матрицы Адамара, где p — простое, n — натуральное число.

Доказательство. Построение $H(p^n, p^n)$-матрицы проведем индукцией по n.

а) при $n = 1$ используем матрицу Вандермонда, что позволит получить $V_0 = H(p, p)$-обобщенную матрицу Адамара.

б) Теперь пусть построена обобщенная матрица Адамара

$$V_{n-1} = H(p^{n-1}, p^{n-1}) = H(t, t) = \{v_{sr}\}_{s, r=0}^{t-1}.$$

в) Тогда матрицу $H(p^n, p^n)$ ищем в виде

$$V_n = H(p^n, p^n) = H(pt, pt) = \{u_{ij}\}_{i, j=0}^{pt-1}.$$

Указанная матрица должна состоять из корней $p^n = pt$-ой степени из 1, которые обозначим через $a_k = \gamma_{pt}^k$, $k = 0, 1, \ldots, pt-1$, где γ_{pt} — первообразный корень pt-ой степени из 1.

1. Пусть p — нечетное простое число.

Обозначим: $d = \dfrac{pt-1}{2}$.

1°. Вычислим корни pt-ой степени из $1 - \{a_j\}$, $j = 0, 1, \ldots, d$; остальные корни $\{a_{d+k}\} = \{\overline{a}_{d-k+1}\}$, $k = 1, \ldots, d$.

2°. $u_{lp, s} = v_{l, s}$ $\quad l = 0, 1, \ldots, t-1 \quad u_{s, lp} = u_{lp, s}$

$$s = 0, 1, \ldots, t-1$$

$$u_{lp, j} = u_{lp, j (\mathrm{mod}\, t)} \qquad u_{j, lp} = u_{lp, j}.$$

$$j = t, t+1, \ldots, pt-1$$

3°. Получим $u_{ij} = \gamma_p^{ij (\mathrm{mod}\, p)}$

для $i \geqslant j$, $i, j = 1, 2, \ldots, p-1$, $u_{ji} = u_{ij}$.

4°. Ищем

$$u_{ij} = u_{i(\mathrm{mod}\,p),\,j} \times u_{i-i(\mathrm{mod}\,p),\,j}$$

для каждого $j = 1, 2, \dots, d$; $i = p+1, \; p+2, \dots, d$, таких, что н. о. д. $(p, i) =$ н. о. д. $(p, j) = 1$; $u_{ji} = u_{ij}$.

5°. Находим

$$u_{d+1,\,j} = \overline{u}_{d,\,j},$$

$$u_{d+2,\,j} = \overline{u}_{d-1,\,j},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$u_{pt-1,\,j} = \overline{u}_{1,\,j},$$

$j = 1, 2, \dots, pt-1$, но так, чтобы н. о. д. $(j, p) = 1$.

Сначала находим u_{ij} для $j = 1, 2, \dots, d$. Потом — для остальных $j = d+1, \dots, pt-1$; $u_{ji} = u_{ij}$.

II. Пусть $p = 2$.

1°. Вычислим корни $2t$-ой степени из I:

$$\{a_j\}, \quad j = 0, 1, \dots, t.$$

Остальные корни

$$\{a_{t+k}\} = \{\overline{a}_{t-k}\}, \quad k = 1, \dots, t-1.$$

2°. $u_{2l,\,s} = v_{l,\,s} \qquad l = 0, 1, \dots, t-1 \qquad u_{s,\,2l} = u_{2l,\,s}$

$$s = 0, 1, \dots, t-1$$

$$u_{2l,\,j} = u_{2l,\,j(\mathrm{mod}\,t)},$$

где $j = t, \; t+1, \dots, 2t-1$; $u_{j,\,2l} = u_{2l,\,j}$.

3°. Найдем

$$u_{11} = \gamma_{2t}^{1} = a_1.$$

4°. Получим

$$u_{ij} = u_{i(\mathrm{mod}\,2),\,j} \times u_{i-i(\mathrm{mod}\,2),\,j}$$

для каждого $j = 1, \dots, t$ и $i = 3, \dots, t$, таких, что

н. о. д. $(i, 2) =$ н, о. д. $(j, 2) = 1$; $u_{ji} = u_{ij}$.

5°. Ищем

$$u_{t+1,\,j} = \overline{u}_{t-1,\,j},$$

$$u_{t+2,\,j} = \overline{u}_{t-2,\,j}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$u_{2t-1,\,j} = \overline{u}_{1,\,j}.$$

$j = 1, 2, \dots, 2t-1$; $u_{ji} = u_{ij}$, $i = t+1, \; t+2, \dots, 2t-1$.

Замечание 1. Покажем на примере построение $H(9.9)$ из $H(3,3)$

$$V_0 = H(3,3) = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & b_2 & b_1 \end{Vmatrix}$$

$$b_0 = 1; \quad b_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad b_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1°. Находим корни 9-ой степени из 1

$$a_0 = \gamma_9^0 = 1$$

$$a_1 = \gamma_9^1; \quad a_2 = \gamma_9^2; \quad a_3 = \gamma_9^3 = \gamma_2^1 = b_1; \quad a_4 = \gamma_9^4.$$

Остальные корни

$$a_5 = \overline{a}_4; \quad a_6 = \overline{a}_3 = b_2; \quad a_8 = \overline{a}_1$$

2°. $u_{0,s} = 1, \quad s = 0,\ 1,\ 2$

$$u_{3,s} = v_{1,s}$$

$$u_{6,s} = v_{2,s}$$

$$u_{03} = u_{30} = 1 \qquad u_{60} = u_{06} = 1$$

$$u_{13} = u_{31} = a_3 \qquad u_{61} = u_{16} = a_6$$

$$u_{23} = u_{32} = a_6 \qquad u_{62} = u_{26} = a_3$$

$$u_{0,j} = u_{0,\,j(\mathrm{mod}3)} = 1 \qquad j = 3,\ 4, \ldots, 8$$

$$u_{3,j} = u_{3,\,j(\mathrm{mod}\,3)} = v_{1,\,j(\mathrm{mod}\,3)}$$

$$u_{6,j} = u_{6,\,j(\mathrm{mod}3)} = v_{2,\,j(\mathrm{mod}3)}$$

$$u_{04} = u_{40} = u_{05} = u_{50} = u_{07} = u_{70} = u_{80} = u_{08} = 1$$

$$u_{34} = u_{43} = a_3 \qquad u_{64} = u_{46} = a_6$$

$$u_{35} = u_{53} = a_6 \qquad u_{65} = u_{56} = a_3$$

$$u_{37} = u_{73} = a_3 \qquad u_{67} = u_{76} = a_6$$

$$u_{38} = u_{83} = a_6 \qquad u_{68} = u_{86} = a_3$$

3°. Получаем:

$$u_{11} = \gamma_9^1 = a_1 \qquad u_{22} = \gamma_9^4 = a_4$$

$$u_{21} = \gamma_9^2 = a_2 \qquad u_{12} = u_{21} = a_2$$

4°. Вычисляем

$$u_{ij} = u_{i(\mathrm{mod}3),\,j} \times u_{i-i(\mathrm{mod}3),\,j}$$

$$j = 1,\ 2,\ 4; \quad i = 4.$$

5—698

$$u_{41} = u_{11} \times u_{31} = a_1 \cdot a_3 = a_4 \qquad u_{14} = u_{41} = a_4$$

$$u_{42} = u_{12} \times u_{32} = a_2 \cdot a_6 = a_8 \qquad u_{24} = u_{42} = a_8$$

$$u_{44} = u_{14} \times u_{34} = a_4 \cdot a_3 = a_7$$

5°. Находим

$$u_{51} = u_{15} = \overline{u}_{41} = \overline{a}_4 = a_5$$

$$u_{52} = \overline{u}_{52} = \overline{a}_8 = a_1 = u_{25}$$

$$u_{54} = u_{45} = \overline{u}_{44} = \overline{a}_7 = a_2$$

$$u_{71} = u_{17} = \overline{u}_{21} = \overline{a}_2 = a_7$$

$$u_{72} = u_{27} = \overline{u}_{22} = \overline{a}_4 = a_5$$

$$u_{74} = u_{47} = \overline{u}_{24} = \overline{a}_8 = a_1$$

$$u_{81} = u_{18} = \overline{u}_{11} = \overline{a}_1 = a_8$$

$$u_{82} = u_{28} = \overline{u}_{12} = \overline{a}_2 = a_4$$

$$u_{55} = \overline{u}_{45} = \overline{a}_2 = a_7$$

$$u_{58} = u_{85} = \overline{u}_{48} = \overline{a}_5 = a_4$$

$$u_{75} = u_{57} = \overline{u}_{47} = \overline{a}_1 = a_8$$

$$u_{77} = \overline{u}_{27} = \overline{a}_5 = a_4$$

$$u_{87} = u_{78} = \overline{u}_{28} = \overline{a}_7 = a_2$$

$$u_{88} = \overline{u}_{18} = \overline{a}_8 = a_1.$$

Итак

$$H(9,9) = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ 1 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ 1 & a_3 & a_6 & 1 & a_3 & a_6 & 1 & a_3 & a_6 \\ 1 & a_4 & a_8 & a_3 & a_7 & a_2 & a_6 & a_1 & a_5 \\ 1 & a_5 & a_1 & a_6 & a_2 & a_7 & a_3 & a_8 & a_4 \\ 1 & a_6 & a_3 & 1 & a_6 & a_3 & 1 & a_6 & a_3 \\ 1 & a_7 & a_5 & a_3 & a_1 & a_8 & a_6 & a_4 & a_2 \\ 1 & a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{Vmatrix}$$

§ 4. Обобщенные матрицы Янга и построение обобщенных матриц Адамара

В данном параграфе введем понятие обобщенных матриц Янга и распространим классическую теорему Янга на обобщенный случай.

Определение 6. Циклические квадратные матрицы $A(p, n)$ и $B(p, n)$ порядка n, состоящие из корней p-ой степени из 1, удовлетворяющие условию

$$AA^{\text{ст}} + BB^{\text{ст}} = 2nI_n \tag{4.1}$$

назовем обобщенными матрицами Янга.

Замечание 1. При $p = 2$ понятие обобщенных матриц Янга совпадает с понятием матриц Янга [13].

Перейдем к вопросу построения обобщенных матриц Янга. Матрицы A и B будем искать в виде:

$$A = a_0U^n + a_1U^1 + \dots + a_{n-1}U^{n-1}$$

$$B = b_0U^n + b_1U^1 + \dots + b_{n-1}U^{n-1},$$

где

$$U = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}, \qquad U^n = I_n$$

$$A^{\text{ст}} = \bar{a}_0U^n + \bar{a}_{n-1}U^1 + \dots + \bar{a}_1U^{n-1}$$

$$B^{\text{ст}} = \bar{b}_0U^n + \bar{b}_{n-1}U^1 + \dots + \bar{b}_1U^{n-1}.$$

Запишем условие (4.1)

$$AA^{\text{ст}} = (a_0\bar{a}_0 + a_1\bar{a}_1 + \dots + a_{n-1}\bar{a}_{n-1})\,U^n +$$

$$+ (a_0\bar{a}_{n-1} + a_1\bar{a}_0 + \dots + a_{n-1}\bar{a}_{n-2})\,U^1 + \dots +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-1} a_j\bar{a}_{(n+j-k)\bmod n}\cdot U^k + \dots + (a_0\bar{a}_1 + a_1\bar{a}_2 + \dots + a_{n-1}\bar{a}_0)\,U^{n-1}$$

$$BB^{\text{ст}} = (b_0\bar{b}_0 + b_1\bar{b}_1 + \dots + b_{n-1}\bar{b}_{n-1})\,U^n +$$

$$+ (b_0\bar{b}_{n-1} + b_1\bar{b}_0 + \dots + b_{n-1}\bar{b}_{n-2})\,U^1 + \dots +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-1} b_j b_{(n+j-k)\bmod n}\cdot U^k + \dots + (b_0\bar{b}_1 + b_1\bar{b}_2 + \dots + b_{n-1}\bar{b}_0)\,U^{n-1},$$

Условие (4.1) эквивалентно следующим $\left[\frac{n}{2}\right]$ условиям:

$$\sum_{j+0}^{n-1}(a_j\bar{a}_{(j-t)\bmod n} + b_j\bar{b}_{(j-t)\bmod n}) = 0; \qquad t = 1, 2, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]. \tag{4.2}$$

Откуда легко видеть, что (4.2) является необходимым и достаточным условием существования обобщенных матриц Янга.

Приведем конструкции некоторых матриц A и B, удовлетворяющих условию (4.2):

1) $$A = A(3,6) = U^6 + x_2(U^1 + U^2 + U^4 + U^5) + x_1 U^3$$

$$B = B(3,6) = U^6 + x_2(U^1 + U^5) + x_1(U^2 + U^3 + U^4).$$

2) $$A = A(3,3) = U^3 + x_2(U^1 + U^2)$$

$$B = B(3,3) = U^3 + x_1(U^2 + U^2)$$

В примерах 1) и 2) x_1 и x_2 — первообразные корни 3-ей степени из 1.

3) $$A = U^4 + a(U^1 + U^2) + cU^3$$

$$B = cU^4 + a(U^1 + U^2) + U^3,$$

где $a = \gamma_{2p}^1$, γ_{2p}^1 — первообразный корень $2p$-ой степени из 1, и $c = \gamma_{2p}^p = -1$.

4) $$A = A(6,5) = U^5 + z_2(U^1 + U^4) + z_4(U^2 + U^3)$$

$$B = B(6,5) = U^5 + z_5(U^1 + U^4) + z_1(U^2 + U^3)$$

$$AA^{\text{ст}} = 5U^5 - \sum_{l=1}^{4} U^l$$

$$BB^{\text{ст}} = 5U^5 + \sum_{l=1}^{4} U^l.$$

5) $$A = A(6,7) = U^7 + z_3(U^1 + U^6) + z_1(U^2 + U^5) + z_5(U^3 + U^4)$$

$$B = B(6,7) = U^7 + z_1(U^1 + U^2 + U^5 + U^6) + z_3(U^3 + U^4).$$

В примерах 4) и 5)

$$z_j = \gamma_6^j, \qquad j = 1, 2, \dots, 5.$$

γ_6^1 — первообразный корень 6-ой степени из 1.

Отметим, что рекуррентную формулу (3.6), использованную для обобщенных матриц Адамара, можно использовать для построения обобщенных матриц Янга.

$$\begin{cases} A_{l+1} = X \otimes A_l + Y \otimes B_l \\ B_{l+1} = X \otimes B_l - Y \otimes A_l \end{cases} \tag{4.3}$$

$$l = 0, 1, \dots$$

где $A_0 = A_0(p_1, n)$ и $B_0 = B_0(p_1, n)$ — обобщенные матрицы Янга, а $X(p_2, k)$ и $Y(p_2, k)$ — квадратные матрицы порядка k, состоящие из 0 и корней p_2-ой степени из единицы, удовлетворяющие:

$$\begin{cases} X * Y = 0 \\ X \pm Y \text{ матрица состоит из корней } p_2\text{-ой степени из } 1 \\ XY = YX \\ XX^{\text{ст}} + YY^{\text{ст}} = kI_k. \end{cases} \tag{4.4}$$

Теорема 4.1. Матрицы A_{i+1}, B_{i+1}, удовлетворяющие системе (4.3), вместе с (4.4) будут являться:

а) обобщенными матрицами Янга $A(2p, nk^{i+1})$ и $B(2p, nk^{i+1})$, где $i = 0, 1, \ldots$, $p =$ н. о. к. (p_1, p_2), если н. о. д. $(p_1, 2) = 1$ и н. о. д. $(p_2, 2) = 1$;

б) обобщенными матрицами Янга $A(p, nk^{i+1})$, $B(p, nk^{i+1})$; $i = 0, 1, \ldots$, где $p =$ н. о. к. (p_1, p_2), если хоть одно из p_1 и p_2 четно.

Доказательство. Докажем индукцией по i

1. $i = 0$. Легко видеть, что для матриц A_1 и B_1, удовлетворяющих (4.3):

$$A_1 B_1 = B_1 A_1, \quad A_1 A_1^{\text{ст}} + B_1 B_1^{\text{ст}} = 2nkI_{nk}.$$

2. Предположим, что на i-том шаге системы (4.3) получаем A_i, B_i — обобщенные матрицы Янга порядка nk^i и $A_i B_i = B_i A_i$,

3. По системе (4.3) имеем:

$$A_{i+1} B_{i+1} = XX \otimes A_i B_i - XY \otimes A_i A_i + YX \otimes B_i B_i + YY \otimes B_i A_i,$$

$$B_{i+1} A_{i+1} = XX \otimes B_i A_i - YX \otimes A_i A_i + XY \otimes B_i B_i - YY \otimes A_i B_i,$$

из предположения индукции 2 и (4.4):

$$A_i B_i = B_i A_i, \qquad XY = YX,$$

следовательно,

$$A_{i+1} B_{i+1} = B_{i+1} A_{i+1}$$

$$A_{i+1} A_{i+1}^{\text{ст}} + B_{i+1} B_{i+1}^{\text{ст}} = XX^{\text{ст}} \otimes A_i A_i^{\text{ст}} + YX^{\text{ст}} \otimes B_i A_i^{\text{ст}} +$$
$$+ XY^{\text{ст}} \otimes A_i B_i^{\text{ст}} + YY^{\text{ст}} \otimes B_i B_i^{\text{ст}} + XX^{\text{ст}} \otimes B_i B_i^{\text{ст}} - XY^{\text{ст}} \otimes B_i A_i^{\text{ст}} -$$
$$- YX^{\text{ст}} \otimes A_i B_i^{\text{ст}} + YY^{\text{ст}} \otimes A_i A_i^{\text{ст}} = (XX^{\text{ст}} + YY^{\text{ст}}) \otimes$$
$$\otimes (A_i A_i^{\text{ст}} + B_i B_i^{\text{ст}}) + (XY^{\text{ст}} - YX^{\text{ст}})(A_i B_i^{\text{ст}} - B_i A_i^{\text{ст}}) =$$
$$= kI_k \otimes 2nk^i I_{nk^i} = 2nk^{i+1} I_{nk^{i+1}},$$

т. е. A_{i+1}, B_{i+1} являются обобщенными матрицами Янга порядка nk^{i+1}.

Теорема 4.2. (Обобщенная теорема Янга).

Если $A_0(p, n)$ и $B_0(p, n)$ — обобщенные матрицы Янга, то матрицы

$$H_{i+1} = A_{i+1} = B_{i+1} = \begin{Vmatrix} A_i & B_i \\ -B_i^{\text{ст}} & A_i^{\text{ст}} \end{Vmatrix}$$

будут обобщенными матрицами Адамара $H(2p, 2^{i+1} n)$.

Доказательство снова проведем индукцией по i

1) $i=0$. Можно легко проверить, что $H_1 H_1^{\text{ст}} = 2n I_{2n}$.

2) Пусть теорема верна для $i=k-1$.

3) Докажем теорему для $i=k$.

Имеем

$$H_k = A_k = B_k = \begin{Vmatrix} A_{k-1} & B_{k-1} \\ -B_{k-1}^{\text{ст}} & A_{k-1}^{\text{ст}} \end{Vmatrix},$$

где

$$H_k H_k^{\text{ст}} = 2^k n I_{2^k n}$$

$$H_{k+1} = \begin{Vmatrix} A_k & B_k \\ -B_k^{\text{ст}} & A_k^{\text{ст}} \end{Vmatrix}$$

$$H_{k+1} H_{k+1}^{\text{ст}} = \begin{Vmatrix} A_k A_k^{\text{ст}} + B_k B_k^{\text{ст}} & -A_k B_k + B_k A_k \\ -B_k^{\text{ст}} A_k^{\text{ст}} + A_k^{\text{ст}} B_k^{\text{ст}} & B_k^{\text{ст}} B_k + A_k^{\text{ст}} A_k \end{Vmatrix} = 2^{k+1} n I_{2^{k+1} n},$$

так как

$$A_k = B_k \quad \text{и} \quad A_k A_k^{\text{ст}} = B_k B_k^{\text{ст}} = 2^k n I_{2^k n}.$$

Что и требовалось доказать.

§ 5. О циклических (блочно-циклических) обобщенных матрицах Адамара и обобщенных матрицах Адамара с циклическим ядром

Определение 7. Обобщенная матрица Адамара $H = H(p, h)$ называется циклической, если

$$H = a_0 U^h + a_1 U^1 + \ldots + a_{h-1} U^{h-1},$$

где

$$U = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}, \qquad U^h = I_h$$

a_j, $j = 0, 1, \ldots, h-1$, корни p-ой степени из 1, или, что то же самое, справедливо соотношение:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{h-1} a_k \bar{a}_{(k-t) \bmod h} = 0 \\ t = 1, 2, \ldots, \left[\dfrac{h}{2}\right] \end{cases} \tag{5.1}$$

Определение 8 [1]. Квадратная матрица H_c порядка $h-1$, полученная из нормализованной обобщенной матрицы Адамара $H(p, h)$

стиранием начальной строки и столбца из единиц, называется ядром $H(p, h)$-матрицы.

Замечание 1. Матрица

$$H = H(3,6) = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x_1 & x_2 & x_2 & x_1 \\ 1 & x_1 & 1 & x_1 & x_2 & x_2 \\ 1 & x_2 & x_1 & 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_2 & x_2 & x_1 & 1 & x_1 \\ 1 & x_1 & x_2 & x_2 & x_1 & 1 \end{Vmatrix}$$

где $1, x_1, x_2$ — корни 3-ей степени из 1, является обобщенной матрицей Адамара с циклическим ядром.

Можно построить циклические обобщенные матрицы Адамара следующих порядков:

а) $H(2q+1, 2q+1)$,

б) $H(q, q^2)$ [14, 15].

где q — натуральное число, а также обобщенные матрицы Адамара с циклическим ядром порядка:

$$H(p, p^n), \quad p \text{ — простое, } n \text{ — натуральное число.}$$

В настоящем параграфе приведены:

1) конструкция обобщенной матрицы Адамара $H(p, h)$, для которой нельзя построить циклической обобщенной матрицы Адамара;

2) алгоритмы построения блочно-циклических обобщенных матриц Адамара следующих параметров:

$$H(p_3, 4^n m); \quad H(p_4, 6^n m); \quad H(p_5, 8^n m),$$

где m — порядок $H(p_2, m)$-циклической обобщенной матрицы Адамара, а

$$p_3 = \text{н. о. к. } (2p_1, p_2); \quad p_4 = \text{н. о. к. } (3p_1, p_2); \quad p_5 = \text{н. о. к. } (4p_1, p_2).$$

3) теорема о существовании циклической $H(2k, 4k)$-обобщенной матрицы Адамара, построенной по алгоритму, предложенному Т. И. Дубенко и Г. В. Зайцевым.

Справедливо

Утверждение 5.1. Не существует циклической $H(3.6)$-обобщенной матрицы Адамара.

Доказательство. Согласно (5.1), для того, чтобы циклическая матрица

$$H = a_0 U^6 + a_1 U^1 + a_2 U^2 + a_3 U^3 + a_4 U^4 + a_5 U^5$$

являлась обобщенной матрицей Адамара $H(3.6)$, необходимо и достаточно выполнение системы:

$$\begin{cases} a_0\overline{a}_5 + a_1\overline{a}_0 + a_2\overline{a}_1 + a_3\overline{a}_2 + a_4\overline{a}_3 + a_5\overline{a}_4 = 0 \\ a_0\overline{a}_4 + a_1\overline{a}_5 + a_2\overline{a}_0 + a_3\overline{a}_1 + a_4\overline{a}_2 + a_5\overline{a}_3 = 0 \\ a_0\overline{a}_3 + a_1\overline{a}_4 + a_2\overline{a}_5 + a_3\overline{a}_0 + a_4\overline{a}_1 + a_5\overline{a}_2 = 0, \end{cases} \tag{5.2}$$

где $a_j \in \{1, x_1, x_2\}$ — множеству корней 3-ей степени из 1, $j = 0, 1, \ldots, 5$.

Докажем, что ни для каких $a_j \in \{1, x_1, x_2\}$, $j = 0, 1, \ldots, 5$ эта система не выполняется. С этой целью рассмотрим случаи:

1. Пусть $a_0 = 1$ и $a_3 = 1$.

Система (5.2) перейдет в:

$$\begin{cases} \overline{a}_5 + a_1 + a_2\overline{a}_1 + \overline{a}_2 + a_4 + a_5\overline{a}_4 = 0 \\ \overline{a}_4 + a_1\overline{a}_5 + a_2 + \overline{a}_1 + a_4\overline{a}_2 + a_5 = 0 \\ 2 + a_1\overline{a}_4 + a_4\overline{a}_1 + a_2\overline{a}_5 + a_5\overline{a}_2 = 0. \end{cases} \tag{5.3}$$

Последнее соотношение из (5.3) выполнится при одном из следующих условий:

1.1. $\begin{cases} a_1 = x_1a_4 \\ a_2 = x_2a_5 \end{cases}$ 1.2. $\begin{cases} a_1 = x_2a_4 \\ a_2 = x_1a_5 \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} a_1 = x_1a_4 \\ a_2 = x_1a_5 \end{cases}$ 1.4. $\begin{cases} a_1 = x_2a_4 \\ a_2 = x_2a_5 \end{cases}$

При 1.1 система (5.3) преобразуется в

$$\begin{cases} \overline{a}_5 + x_1a_4 + x_1a_5\overline{a}_4 + x_1\overline{a}_5 + a_4 + a_5\overline{a}_4 = 0 \\ \overline{a}_4 + x_1a_4\overline{a}_5 + x_2a_5 + x_2\overline{a}_4 + x_1a_4\overline{a}_5 + a_5 = 0, \end{cases} \tag{5.3.1}$$

что эквивалентно

$$x_1\overline{a}_4a_5 + \overline{a}_4a_5 = 2x_2a_4a_5,$$

но $x_1 + 1 \neq 2x_2$, следовательно, ни при каких значениях a_4, $a_5 \in \{1, x_1, x_2\}$ (5.3.1) не разрешима.

При 1.2 (5.3) примет вид:

$$\begin{cases} \overline{a}_5 + x_2a_4 + x_2a_5\overline{a}_4 + x_2\overline{a}_5 + a_4 + a_5\overline{a}_4 = 0 \\ \overline{a}_4 + x_2a_4\overline{a}_5 + x_1a_5 + x_1\overline{a}_4 + x_2a_4\overline{a}_5 + a_5 = 0, \end{cases} \tag{5.3.2}$$

т. е. $a_5\overline{a}_4 = x_1a_5\overline{a}_4$, что невозможно при любых a_4 и a_5 из $\{1, x_1, x_2\}$. (5.3.2) также неразрешима.

Аналогично можно показать, что (5.3) неразрешима и при 1.3 и 1.4.

2. Пусть $a_0 = 1$, $a_3 = x_1$.

Тогда система (5.2) примет вид:

$$\begin{cases} \overline{a}_5 + a_1 + a_2\overline{a}_1 + x_1\overline{a}_2 + x_2a_4 + a_5\overline{a}_4 = 0 \\ \overline{a}_4 + a_1\overline{a}_5 + a_2 + x_1\overline{a}_1 + a_4\overline{a}_2 + x_2a_5 = 0 \\ x_2 + a_1\overline{a}_4 + a_2\overline{a}_5 + x_1 + a_4\overline{a}_1 + a_5\overline{a}_2 = 0. \end{cases} \tag{5.4}$$

Система уравнений (5.4) может выполняться при одном из условий:

2.1. $\begin{cases} a_1 = x_1a_4 \\ a_2 = a_5 \end{cases}$ 2.2. $\begin{cases} a_1 = x_2a_4 \\ a_2 = a_5 \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} a_1 = a_4 \\ a_2 = x_1a_5 \end{cases}$ 2.4. $\begin{cases} a_1 = a_4 \\ a_2 = x_2a_5 \end{cases}$

Аналогично случаю 1 показывается, что (5.4) при каждом из 2,1, 2.2, 2.3 и 2.4 условиях неразрешима, если a_4 и a_5 берутся из множества $\{1,\ x_1,\ x_2\}$ корней 3-ей степени из единицы.

3. Пусть теперь $a_0 = 1$ и $a_3 = x_2$.

Система (5.2) запишется как:

$$\begin{cases} \overline{a}_5 + a_1 + a_2\overline{a}_1 + x_2\overline{a}_2 + x_1a_4 + a_5\overline{a}_4 = 0 \\ \overline{a}_4 + a_1\overline{a}_5 + a_2 + x_2\overline{a}_1 + a_4\overline{a}_2 + x_1a_5 = 0 \\ x_1 + a_1\overline{a}_4 + a_2\overline{a}_5 + x_2 + a_4\overline{a}_1 + a_5\overline{a}_2 = 0. \end{cases} \tag{5.5}$$

Последнее уравнение (5.5) выполнится при одном из следующих условий:

3.1. $\begin{cases} a_1 = x_1a_4 \\ a_2 = a_5 \end{cases}$ 3.2. $\begin{cases} a_1 = x_2a_4 \\ a_2 = a_5 \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} a_1 = a_4 \\ a_2 = x_1a_5 \end{cases}$ 3.4. $\begin{cases} a_1 = a_4 \\ a_2 = x_2a_5 \end{cases}$

Как и в случаях 1 и 2, система (5.5), при каждом из 3.1, 3.2, 3.3. 3.4, неразрешима, когда a_4 и a_5 берутся из $\{1,\ x_1,\ x_2\}$.

Если теперь $a_0 \neq 1$ и принимает одно из значений x_1 или x_2, то (5.2) может быть приведена к такому виду, где $a_0 = 1$ и $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ принадлежат $\{1,\ x_1,\ x_2\}$. А как мы показали в 1, 2 и 3 случаях, при данных a_j, $j = 0,\ 1, \dots, 5$ система (5.2) неразрешима.

Что и требовалось доказать.

Метод построения обобщенных матриц Адамара при помощи обобщенных гиперкаркасов, данный в § 3, можно применить и для получения блочно-циклических обобщенных матриц Адамара, с той лишь разницей, что $\Gamma\ (p,\ h) = \{X,\ У\}$ состоит из циклических X, $У$-матриц определенной конструкции, а именно:

$$\begin{cases} X = \sum\limits_{j=0}^{\frac{h}{2}-1} a_{2j+1} U^{2j+1} \\ Y = \sum\limits_{k=0}^{\frac{h}{2}-1} b_{2k} U^{2k}. \end{cases} \tag{5.6}$$

Утверждение 5.2. Пусть X, $У$ — квадратные матрицы порядка h, определенные по соотношению (5.6). Тогда для того, чтобы они образовали циклический обобщенный гиперкаркас, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$a_l \cdot b_l = 0, \qquad l = 0, 1, \ldots, h-1, \tag{5.7}$$

$$a_l + b_l \text{ принадлежит множеству корней } p\text{-ой степени из } 1. \tag{5.8}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{\frac{h}{2}-1} a_{2d+2j+1} \overline{b}_{2j} = \sum\limits_{k=0}^{\frac{h}{2}-1} b_{2d+2k+2} \overline{a}_{2k+1} \\ d = 0, 1, \ldots, \left]\frac{h}{4}\right[-1 \end{cases} \tag{5.9}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{\frac{h}{2}-1} a_{2f+2j+1} \overline{a}_{2j+1} + \sum\limits_{k=0}^{\frac{h}{2}-1} b_{2f+2k} \overline{b}_{2k} = 0 \\ f = 1, 2, \ldots, \left[\frac{h}{4}\right] \end{cases} \tag{5.10}$$

Доказательство можно получить из определения понятия двухэлементного обобщенного гиперкаркаса и из (5.6).

Следствие 5.3. Существуют двухэлементные циклические обобщенные гиперкаркасы $\Gamma(p, h)$ следующих параметров: $p = 2t$, $h = 4$; $p = 3t$, $h = 6$: $p = 4t$, $h = 8$, где $t = 1, 2, \ldots$

На самом деле можно проверить, что матрицы $\{X, Y\}$:

$$\begin{cases} X = \gamma_{2t}^{1} U^{1} + \gamma_{2t}^{1} U^{3} \\ Y = \gamma_{2t}^{t+1} U^{2} + \gamma_{2t}^{1} U^{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \gamma_{3t}^{1} U^{1} + \gamma_{3t}^{1} U^{3} + \gamma_{3t}^{2t+1} U^{5} \\ Y = \gamma_{3t}^{2t+1} U^{2} + \gamma_{3t}^{1} U^{4} + \gamma_{3t}^{1} U^{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \gamma_{4t}^{1} U^{1} + \gamma_{4t}^{t+1} U^{3} + \gamma_{4t}^{t+1} U^{5} + \gamma_{4t}^{1} U^{7} \\ Y = U^{2} + \gamma_{4t}^{1} U^{4} + U^{6} + \gamma_{4t}^{1} U^{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \gamma_{3t}^{1} U^{1} + U^{3} + \gamma_{3t}^{1} U^{5} \\ Y = \gamma_{3t}^{1} U^{2} + \gamma_{3t}^{1} U^{4} + U^{6} \end{cases}$$

удовлетворяют условиям утверждения 5.2, то есть являются двухэлементными циклическими обобщенными гиперкаркасами $\Gamma(2t, 4)$; $\Gamma(3t, 6)$; $\Gamma(4t, 8)$; $\Gamma(3t, 6)$ соответственно.

Следствие 5.4. Существуют блочно-циклические обобщенные матрицы Адамара следующих параметров:

$$H(p_3, 4^n m); \qquad H(p_4, 6^n m); \qquad H(p_5, 8^n m),$$

где m — порядок циклической обобщенной $H(p_2, m)$-матрицы Адамара, а

$p_3 =$ н. о. к. $(2p_1, p_2)$; $p_4 =$ н. о. к. $(3p_1, p_2)$; $p_5 =$ н. о. к. $(4p_1, p_2)$.

Доказательство. Построение вышеуказанных матриц ведется методом, указанным в теореме 3.3, когда двухэлементные обобщенные циклические гиперкаркасы берутся из следствия 1.

Перейдем к рассмотрению вопросов, связанных с обобщенными матрицами Адамара с циклическим ядром.

Вначале докажем

Утверждение 5.5. Существование $H(p, n+1)$ — нормализованной обобщенной матрицы Адамара эквивалентно условию:

$$H_c H_c^{\text{ст}} = nI_n - \sum_{l=1}^{n-1} U^l, \tag{5.11}$$

где H_c — ядро матрицы $H(p, n+1)$.

Доказательство. Пусть $H = H(p, n+1)$ имеет вид:

$$H = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \dots 1 \\ 1 & \\ \cdot & H_c \\ \cdot & \\ \cdot & \\ 1 & \end{Vmatrix} \qquad (*)$$

где

$$\begin{Vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \dots a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \dots a_{2,n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} \dots a_{n,n} \end{Vmatrix}$$

Тогда

$$H \cdot H^{\text{ст}} = \begin{Vmatrix} n+1 & 1 + \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{1,j} \dots 1 + \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{n,j} \\ 1 + \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} & n+1 \dots 1 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{1,j}\overline{a}_{n,k} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 1 + \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} & 1 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{n,j}\overline{a}_{2,k} \dots n+1 \end{Vmatrix}$$

С другой стороны,

$$H \cdot H^{\text{ст}} = (n+1) I_{n+1}$$

следовательно, имеем:

$$1 + \sum_{j+1}^{n} a_{ij} = 1 + \sum_{j=0}^{h} \overline{a}_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, n \tag{5.12}$$

$$1 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{rj}\overline{a}_{sk} = 0 \quad \text{при} \quad r \neq s, \quad r, s = 1, \dots, n \tag{5.13}$$

$$
H_c \cdot H_c^{\text{ст}} = \left\| \begin{array}{lll}
n & \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{1,j}\overline{a}_{2,k} \ldots & \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{1,j}\overline{a}_{n,k} \\
\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{2,j}\overline{a}_{1,k} & n \ldots & \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{2,j}\overline{a}_{n,k} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{n,j}\overline{a}_{1,k} & \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{n,j}\overline{a}_{2,k} \ldots & n
\end{array} \right\|
$$

Используя (5.13), получим (5.11):

$$
H_c \cdot H_c^{\text{ст}} = nI_n - \sum_{l=1}^{n-1} U^l .
$$

И, наоборот, из (5.11), беря H по ($*$), получим $H = H\ (p,\ n+1)$—нормализованную обобщенную матрицу Адамара.

Следствие 5.6. Для того чтобы существовала обобщенная матрица Адамара $H\ (p,\ n+1)$ с циклическим, симметрическим ядром, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$
\begin{cases}
1 + \sum\limits_{j=0}^{]\frac{t}{2}[-1} (a_j \overline{a}_{t-j} + a_{t-j}\overline{a}_j) + \sum\limits_{k=1}^{[\frac{n}{2}]-t} (a_{t+k}\overline{a}_k + a_k \overline{a}_{t+k}) + \\
+ \sum\limits_{l=0}^{[\frac{t}{2}]-1} (a_{[\frac{n}{2}]-l}\,\overline{a}_{[\frac{n}{2}]-t+l+1} + a_{[\frac{n}{2}]-t+l+1}\,\overline{a}_{[\frac{n}{2}]-l}) = -1 \\
\qquad t = 1,\ 2,\ \ldots,\ \left[\dfrac{n}{2}\right]; \quad n \text{ — нечетное число.}
\end{cases}
\tag{5.14}
$$

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{j=0}^{]\frac{t}{2}[-1} (a_j \overline{a}_{t-j} + a_{t-j}\overline{a}_j) + \sum\limits_{k=1}^{\frac{n}{2}-t} (a_{t+k}\overline{a}_k + a_k \overline{a}_{t+k}) + \\
\quad + \sum\limits_{l=1}^{[\frac{t}{2}]} (a_{\frac{n}{2}-l}\,\overline{a}_{\frac{n}{2}-t+l} + a_{\frac{n}{2}-t+l}\,\overline{a}_{\frac{n}{2}-l}) + \mu = -1; \\
\qquad t = 1,\ 2,\ \ldots,\ \dfrac{n}{2}; \quad n \text{ — четное число.} \\
\text{где} \qquad \mu = \begin{cases} 2, & \text{если } t \text{ — четное,} \\ 0, & \text{если } t \text{ — нечетное.} \end{cases}
\end{cases}
\tag{5.15}
$$

Доказательство. Используя утверждение 5.5 и запись:

$$
H_c = a_0 U^n + a_1 U^1 + \ldots + a_{[\frac{n}{2}]} U^{[\frac{n}{2}]} + a_{[\frac{n}{2}]} U^{[\frac{n}{2}]+1} + \ldots + a_1 U^{n-1}
$$

для n-нечетных;

$$H_c = a_0U^n + a_1U^1 + \dots a_{\frac{n}{2}-1}U^{\frac{n}{2}-1} + a_{\frac{n}{2}}U^{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}-1}U^{\frac{n}{2}+1} + \dots + a_1U^{n-1}$$

для n-четных; получим (5.14) и (5.15).

Имеет место теорема Дубенко, Зайцева:

Теорема 5.7. Существует циклическая $H(2k,\ 4k)$ обобщенная матрица Адамара для любого натурального числа k.

Доказательство. Покажем, что циклическая матрица

$$H = H(2k,\ 4k) = a_0U^{4k} + a_1U^1 + \dots + a_{4k-1}U^{4k-1},$$

где $a_0, a_2, \dots, a_{4j-2}$ — корни $2k$-ой степени из единицы, взятые из главной диагонали $H_1 = H(2k,\ 2k) = [U_{ij} = \gamma_{2k}^{ik \bmod 2k}]_{i,j=0}^{2k-1}$ обобщенной матрицы Адамара, построенной с помощью матрицы Вандермонда,

γ_{2k}^1 — первообразный корень $2k$-ой степени из 1,

$a_1, a_3, \dots, a_{4k-1}$ — корни $2k$-ой степени из единицы, взятые из побочной диагонали матрицы H_1;

будет являться циклической обобщенной матрицей Адамара, т. е.

$$H \cdot H^{\text{ст}} = 4kI_{4k}$$

или

$$\left\{\begin{array}{l} S = \sum\limits_{i=0}^{4k-1} a_i\, a_{(i-t)\bmod 4k} = 0 \\ t = 1,\ 2,\ \dots,\ 2k. \end{array}\right. \tag{5.16}$$

Элементы матрицы H:

$$a_{2j} = \gamma_{2k}^{j^2(\bmod 2k)}, \qquad j = 0,\ 1,\ \dots,\ 2k-1;$$

$$a_{2j+1} = \gamma_{2k}^{-j^2-j(\bmod 2k)}, \qquad j = 0,\ 1.\ \dots,\ 2k-1.$$

Систему (5.16) можно переписать в виде:

$$\left\{\begin{array}{l} S = \sum\limits_{j=0}^{2k-1} a_{2j}\,\overline{a}_{(2j-t)\bmod 4k} + \sum\limits_{j=0}^{2k-1} a_{2j+1}\,\overline{a}_{(2j+1-t)\bmod 4k} = 0. \\ t = 1,\ 2,\ \dots,\ 2k \end{array}\right. \tag{5.17}$$

Докажем выполнение (5.17) для четных и нечетных t.

а) Пусть $t = 2l$, где $l = 1,\ 2,\ \dots,\ k$.

Имеем

$$S = \sum_{j=0}^{2k-1} \gamma_{2k}^{j^2(\bmod 2k)} \cdot \overline{\gamma}_{2k}^{(j-l)^2 \bmod 2k} + \sum_{j=0}^{2k-1} \gamma_{2k}^{-j^2-j(\bmod 2k)} \cdot \overline{\gamma}_{2k}^{-(j-l)^2-(j-l)\bmod 2k} =$$

$$= \sum_{j=0}^{2k-1} \gamma_{2k}^{2jl-l^2(\bmod 2k)} + \sum_{j=0}^{2k-1} \gamma_{2k}^{-2jl+l^2-l(\bmod 2k} = 2\gamma_{2k}^{-l^2(\bmod 2k)} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_k^{jl(\bmod k)} +$$

$$+ 2\gamma_{2k}^{l^2-l(\bmod 2k)} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_{2k}^{-jl(\bmod k)}.$$

Пусть н. о. д. $(l, k) = r$, тогда

$$k = rt_1; \quad l = rt_2 \text{ и н. о. д. } (t_1, t_2) = 1.$$

$$S = 2r\gamma_{2t_1}^{-rt_2^2 (\mathrm{mod}\, 2t_1)} \cdot \sum_{j=0}^{t_1-1} \gamma_{t}^{jt_2 (\mathrm{mod}\, t_1)} + 2r\gamma_{2t_1}^{rt_2^2 - t_2 (\mathrm{mod}\, 2t_1)} \cdot \sum_{j=0}^{t_1-1} \gamma_t^{-jt_2 (\mathrm{mod}\, t_1)}.$$

Если $k = l$, то $t_1 = t_2 = 1$,

$$S = 2k \cdot \gamma_2^{-k (\mathrm{mod}\, 2)} + 2k \cdot \gamma_2^{k-1 (\mathrm{mod}\, 2)} = 0.$$

Если $k \neq l$, то $t_1 \neq t_2$ и $t_1 \neq 1$, так как $l \leqslant k$.

Тогда рассмотрим множество

$$T = \{ jt_2 (\mathrm{mod}\, t_1 \}_{j=0}^{t_1-1},$$

в котором все элементы различны:
для любых $j_1 \neq j_2$; $j_1, j_2 = 0, 1, \ldots, t_1 - 1$,

$$j_1 t_2 (\mathrm{mod}\, t_1) \neq j_2 t_2 (\mathrm{mod}\, t_1)$$

или

$$(j_1 - j_2) t_2 (\mathrm{mod}\, t_1) \neq 0,$$

что верно, так как н. о. д. $(t_1, t_2) = 1$.

Следовательно,

$$\sum_{j=0}^{t_1-1} \gamma_{t_1}^{jt_2 (\mathrm{mod}\, t_1)} = \sum_{j=0}^{t_1-1} \gamma_{t_1}^{-jt_2 (\mathrm{mod}\, t_1)} = \sum_{l=0}^{t_1-1} \gamma_{t_1}^{l} = 0,$$

и поэтому $S = 0$.

Для а) система (5.17) выполняется.

б) Пусть $t = 2l - 1$, где $l = 1, 2, \ldots, k$. Тогда

$$S = \sum_{j=0}^{2k-1} \gamma_{2k}^{j^2 (\mathrm{mod}\, 2k)} \cdot \overline{\gamma}_{2k}^{-(j-l)^2 - (j-l) \mathrm{mod}\, 2k} + \sum_{j=0}^{2k-1} \gamma_{2k}^{-j^2 - j (\mathrm{mod}\, 2k)} \cdot \overline{\gamma}_{2k}^{(j-l+1)^2 \mathrm{mod}\, 2k} =$$

$$= \sum_{j=0}^{2k-1} \gamma_{2k}^{2j^2 - (2l-1)j + l^2 - l (\mathrm{mod}\, 2k)} + \sum_{j=0}^{2k-1} \gamma_{2k}^{-2j^2 + (2l-3)j - (l-1)^2 \mathrm{mod}\, 2k} = \sum_{j=0}^{2k-1} \gamma_{2k}^{m_j} + \sum_{j=0}^{2k-1} \gamma_{2k}^{n_j}.$$

Рассмотрим

$$m_{j+k} = 2(j+k)^2 - (2l-1)(j+k) + l^2 - l (\mathrm{mod}\, 2k) = 2j^2 + 4jk +$$

$$+ 2k^2 + j + k - 2jl - 2lk + l^2 - l (\mathrm{mod}\, 2k) = m_j + k$$

$$n_{j+k} = -2(j+k)^2 + (2l-3)(j+k) - (l-1)^2 (\mathrm{mod}\, 2k) =$$

$$= -2j^2 + (2l-3)j - (l-1)^2 (\mathrm{mod}\, 2k) + k = n_j + k.$$

Поэтому

$$S = \sum_{j=0}^{k-1} (\gamma_{2k}^{m_j} + \gamma_{2k}^{m_j + k}) + \sum_{j=0}^{k-1} (\gamma_{2k}^{n_j} + \gamma_{2k}^{n_j + k}) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} (\gamma_{2k}^{m_j} - \gamma_{2k}^{m_j}) + \sum_{j=0}^{j-1} (\gamma_{2k}^{n_j} - \gamma_{2k}^{n_j}) = 0.$$

Что и требовалось доказать.

§ 6. Многомерные обобщенные матрицы Адамара

Любая система из m^n элементов $A_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$ $(i_1, i_2, \ldots, i_n = 1, 2, \ldots, m)$ числового поля P, расположенных в точках n-мерного пространства, определяемых координатами $i_1, i_2, \ldots, i_n$, образуют n-мерную матрицу порядка m над P:

$$A = \| A_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \| \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_n = 1, 2, \ldots, m) \tag{6.1}$$

Совокупность элементов матрицы (6.1) с фиксированными значениями $\bar{i}_{\alpha_1}, \bar{i}_{\alpha_2}, \ldots, \bar{i}_{\alpha_k}$ индексов $i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \ldots, i_{\alpha_k}$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1;\ 1 \leqslant \alpha_1 < \ldots < \alpha_k \leqslant n)$ образуют сечение (k-кратное) ориентации $(i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \ldots, i_{\alpha_k})$, являющееся $(n-k)$-мерной матрицей m-го порядка, представляющее совокупность элементов, общих k сечениям ориентаций $(i_{\alpha_1}), \ldots, (i_{\alpha_k})$ являющихся $(n-1)$-мерными матрицами порядка m.

Матрица $A' = \| A'_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \|$ $(i_1, i_2, \ldots, i_n = 1, 2, \ldots, m)$, элементы которой связаны с элементами матрицы (6,1) соотношениями

$$A'_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = A_{i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \ldots, i_{\alpha_n}}$$

где $i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \ldots, i_{\alpha_n}$ — какая-то перестановка из индексов $i_1, i_2, \ldots, i_n$ называется транспонированной относительно матрицы (6.1) соответственно подстановке $\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \ldots, & i_n \\ i_{\alpha_1}, & i_{\alpha_2}, & \ldots, & i_{\alpha_n} \end{pmatrix}$. Эту матрицу обозначают также символом $\overset{\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_n \\ i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \ldots, i_{\alpha_n} \end{pmatrix}}{A}$ [20].

Пусть $[A]_n = \| A_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \|$ и $[B]_r = \| B_{j_1, j_2, \ldots, j_r} \|$ соответственно n-мерная и r-мерная матрицы порядка m $(i_1, \ldots, i_n, j_1, \ldots, j_r = 1, 2, \ldots, m)$.

Определение 9 [20] (λ, μ)-свернутым произведением матрицы $[A]_n$ на $[B]_r$ по индексам разбиений s и c, называется t-мерная матрица $[D]_t$ порядка m, если

$$[D]_t = \| D_{lsk} \| = {}^{\lambda, \mu}([A]_n [B]_r) = \left\| \sum_{(c)} A_{lsc} \underbrace{B_{csk}} \right\| \tag{6.2}$$

где $n = \varkappa + \lambda + \mu$; $r = \lambda + \mu + \nu$; $l = (l_1, l_2, \ldots, l_\varkappa)$; $s = (s_1, s_2, \ldots, s_\lambda)$;

$$c = (c_1, c_2, \ldots, c_\mu); \quad k = (k_1, k_2, \ldots, k_\nu) \quad t = n + r - (\lambda + 2\mu)$$

Введем теперь понятие многомерной обобщенной матрицы Адамара.

Определение 10. n-мерной обобщенной матрицей Адамара $[H]_n = \| H_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \|$ $(i_1, i_2, \ldots, i_n = 1, 2, \ldots, m)$ называется такая матрица, состоящая из корней p-ой степени из 1, в которой все параллельные $(n-1)$-мерные сечения (сечения ориентаций (i_l) $1 \leqslant l \leqslant n$) взаимно ортогональны, то есть

$$\sum_{r}\cdots\sum_{t}\cdots\sum_{z} H_{r\ldots\alpha\ldots z}\,\overline{H}_{r\ldots\beta\ldots z} = m^{(n-1)}\,\delta_{\alpha,\beta} \tag{6.3}$$

где $(r\ldots t\ldots z)$ представляют все перестановки $(i_1\ldots i_t\ldots i_n)$, $\delta_{\alpha,\beta}$ — символ Кронекера.

Пусть H' — n-мерная матрица порядка m, а H'' — сопряженная матрица H', транспонированная по каким-то индексам.

Определение 11. Матрицу H'_t порядка m назовем (λ, μ) — ортогональной по всем осевым направлениям, с параметрами λ, μ, если для фиксированных λ, μ $(\mu \neq 0)$ выполняется система уравнений

$$\begin{cases} {}^{\lambda,\mu}(H'_t H^{*}_t) = m^{\mu} E(\lambda, k) \\ \quad t = 1, 2, \ldots, N \end{cases} \tag{6.4}$$

где $k = n - \lambda - \mu$; $E(\lambda, k)$ — $(\lambda + 2k)$-мерная единичная матрица [20], а

$$N = \begin{cases} n!/\lambda!\,\mu!\,k!, & \text{если } \mu \neq k \\ n!/2\lambda!\,\mu!\,k!, & \text{если } \mu = k \end{cases}$$

Замечание 6.1. Понятие (λ, μ) — ортогональной пространственной матрицы совпадает с понятиями:

а) пространственной обобщенной матрицы Адамара $[H(p, m)]_n$, если $\lambda + \mu = n - 1$ и элементы матрицы H'_t суть корни p-ой степени из 1.

Выделим также следующие случаи:

— при $\lambda = 0$, $\mu = n - 1$ имеем (общую) n-мерную обобщенную матрицу Адамара $[H(p, m)]_n$. Тогда система уравнений (6.4) примет вид

$$\begin{cases} {}^{0,n-1}(H'_t H^{*}_t) = m^{(n-1)} E(0, 1) \\ \text{где } H'_t = H'^{\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_{t-1}, i_t \\ i_2, i_3, \ldots, i_t, i_1 \end{pmatrix}}; \quad H^{*}_t = H''^{\begin{pmatrix} i_t, i_{t+1}, \ldots, i_n \\ i_n, i_t, \ldots, i_{n-1} \end{pmatrix}} \\ \qquad t = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \tag{6.5}$$

— при $\lambda = n - 2$, $\mu = 1$ получим полностью правильную (см. определение 4) n-мерную обобщенную матрицу Адамара $[H(p, m)]_n$, удовлетворяющую соотношению

$$\begin{cases} {}^{n-2,1}(H'_{t_1,t_2} H^{*}_{t_1,t_2}) = mE(n-2, 1) \\ \text{где } H'_{t_1,t_2} = H'^{\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_{t_1-1}, i_{t_1}, i_{t_2}, i_{t_2+1}, \ldots, i_n \\ i_2, \ldots, i_{t_1}, i_1, i_n, i_{t_2}, \ldots, i_{n-1} \end{pmatrix}} \\ H^{*}_{t_1,t_2} = H''^{\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_{t_1-1}, i_{t_1}, i_{t_2}, i_{t_2+1}, \ldots, i_n \\ i_2, \ldots, i_{t_1}, i_n, i_1, i_{t_2}, \ldots, i_{n-1} \end{pmatrix}} \\ t_1 = 1, 2, \ldots, n; \quad t_2 = t_1 + 1, \ldots, n \end{cases} \tag{6.6}$$

Между указанными двумя случаями существует множество частично правильных n-мерных обобщенных матриц Адамара. Заметим также, что при $n = 2$ система (6.4) совпадает с известным (уравнение (1.1)) матричным уравнением в определении обобщенной матрицы Адамара;

б) пространственной (специальной) ортогональной матрицы, исследованной в работе [18], при $k = 2, 3, \dots, n-1$, а ортогональность — по множеству направлений i_l $(l = 1, 2, \dots, n)$.

Перейдем теперь к алгоритмам построения пространственных (полностью правильных и частично правильных) матриц Адамара.

Утверждение 6.1. Если существует обобщенная матрица Адамара $H(p, m)$, то существует трехмерная (кубическая) обобщенная матрица Адамара $[H(p, m)]_3$ с теми же параметрами p и m.

Доказательство. Пусть $H_1 = H(p, m)$ — обобщенная матрица Адамара

$$H_1 = \| h_{ij} \| = \| \gamma_p^{\varphi(i, j)} \| \qquad (i, j = 0, 1, \dots, m-1) \tag{6.7}$$

Согласно определению 1, имеем, что

$$\sum_{j=0}^{m-1} \gamma_p^{\varphi(i_1, j) - \varphi(i_2, j)} = \begin{cases} 0, & \text{если } i_1 \neq i_2 \\ m, & \text{если } i_1 = i_2 \end{cases} \tag{6.8}$$

Тогда матрица $H_1^{(2)} = H_1 \otimes H_1 = \{h_{i,j}^{(2)}\}_{i,j=0}^{m^2-1}$ будет определяться

$$\| h_{i,j}^{(2)} \| = \| h_{mi_1+i_0,\, mj_1+j_0}^{(2)} \| = \| h_{i_1, j_1} \cdot h_{i_0, j_0} \| = \gamma_p^{\varphi(i_1, j_1) + \varphi(i_0, j_0)} \tag{6.9}$$

где $i, j = 0, 1, \dots, m^2 - 1$; $i_0, i_1, j_0, j_1 = 0, 1, \dots, m-1$

Теперь кубическую матрицу $A = [H(p, m)]_3$ с элементами $A_{i_1 i_2 i_3}$ $(i_1, i_2, i_3 = 0, 1, \dots, m-1)$ строим следующим образом:

$$A = \| A_{i_1 i_2 i_3} \| = \| h_{i_1(m+1),\, mi_2+i_3}^{(2)} \| = \| \gamma_p^{\varphi(i_1, i_2) + \varphi(i_1, i_3)} \| \tag{6.10}$$

Иными словами, развертка каждого сечения ориентации i_1 (плоскости) матрицы $A = \| A_{i_1 i_2 i_3} \|$ является $i_1(m+1)$-строкой матрицы $H_1^{(2)}$.

Покажем, что матрица A является кубической обобщенной матрицей Адамара $[H(p, m)]_3$. Для этого проверим при $n = 3$ выполнение матричной системы уравнений (6.5).

Систему (6.5), учитывая вышеприведенное, можно переписать

$$^{0,2}(A_t' A_t'') = m^2 E(0, 1) \qquad t = 1, 2, 3 \tag{6.11}$$

а) $A_1' = A$; $\quad A_1'' = \bar{A}^{\binom{i_1 i_2 i_3}{i_2 i_1 i_3}}$

б) $A_2' = A^{\binom{i_1 i_2}{i_2 i_1}}$; $\quad A_2'' = \bar{A}^{\binom{i_2 i_3}{i_3 i_2}}$

в) $A_3' = A^{\binom{i_1 i_2 i_3}{i_2 i_3 i_1}}$; $\quad A_3'' = \bar{A}$

где $E(0, 1)$ — единичная матрица порядка m.

6—698

Проверим выполнение системы (6.11) при определении матрицы A по (6.10).

а) $$^{0,2}\left(A\bar{A}^{\binom{l_1l_2l_3}{l_2l_1l_3}}\right)=m^2E(0,\ 1),$$

т. е.

$$\sum_{l_2=0}^{m-1}\sum_{l_3=0}^{m-1}A_{l_1l_2l_3}\bar{A}_{j_1l_2l_3}=m^2\delta_{l_1,j_1}$$

или же по (6.10) и (6.8):

$$\sum_{l_2=0}^{m-1}\sum_{l_3=0}^{m-1}\{\gamma_p^{\varphi(l_1,l_2)+\varphi(j_1,l_3)-\varphi(j_1,l_2)-\varphi(j_1,l_3)}\}=m^3\delta_{l_1,j_1}$$

б) $$^{0,2}\left(A^{\binom{l_1l_2}{l_2l_1}}\bar{A}^{\binom{l_3l_2}{l_3l_2}}\right)=m^2E(0,\ 1)$$

$$\sum_{l_1=0}^{m-1}\sum_{l_3=0}^{m-1}A_{l_1l_2l_3}\bar{A}_{l_1j_2l_3}=m^2\delta_{l_2,j_2}$$

$$\sum_{l_1=0}^{m-1}\sum_{l_3=0}^{m-1}\{\gamma_p^{\varphi(l_1,l_2)+\varphi(l_1,l_3)-\varphi(l_1,j_2)-\varphi(l_1,l_3)}\}=m^2\delta_{l_2,j_2}$$

в) $$^{0,2}\left(A^{\binom{l_1l_2l_3}{l_2l_3l_1}}\bar{A}\right)=m^2E(0,\ 1)$$

$$\sum_{l_1=0}^{m-1}\sum_{l_2=0}^{m-1}A_{l_1l_2l_3}A_{l_1l_2j_3}=m^2\delta_{l_3,j_3}$$

$$\sum_{l_1=0}^{m-1}\sum_{l_2=0}^{m-1}\{\gamma_p^{\varphi(l_1,l_2)+\varphi(l_1,l_3)-\varphi(l_1,l_2)-\varphi(l_1,j_3)}\}=m^2\delta_{l_3,j_3}$$

Таким образом, матрица A, определенная по (6.10), является кубической обобщенной матрицей Адамара $[H(p,\ m)]_3$.

Приведем пример построения $[H(3,\ 3)]_3$ матрицы. Пусть $H_1 = H(3,\ 3)$ — обобщенная матрица Адамара

$$H_1=\begin{Vmatrix}1 & x_1 & x_1\\ x_1 & 1 & x_1\\ x_1 & x_1 & 1\end{Vmatrix}$$

где $1,\ x_1,\ x_2$ — корни 3-ей степени из 1. Тогда $H_1^{(2)}$ примет вид

$$
H_1^{(2)} = \left\| \begin{array}{ccccccccc}
1 & x_1 & x_1 & x_1 & x_2 & x_2 & x_1 & x_2 & x_2 \\
x_1 & 1 & x_1 & x_2 & x_1 & x_2 & x_2 & x_1 & x_2 \\
x_1 & x_1 & 1 & x_2 & x_2 & x_1 & x_2 & x_2 & x_1 \\
\hline
x_1 & x_2 & x_2 & 1 & x_1 & x_1 & x_1 & x_2 & x_2 \\
x_2 & x_1 & x_2 & x_1 & 1 & x_1 & x_2 & x_1 & x_2 \\
x_2 & x_2 & x_1 & x_1 & x_1 & 1 & x_2 & x_2 & x_1 \\
x_1 & x_2 & x_2 & x_1 & x_2 & x_2 & 1 & x_1 & x_1 \\
x_2 & x_1 & x_2 & x_2 & x_1 & x_2 & x_1 & 1 & x_1 \\
x_2 & x_2 & x_1 & x_2 & x_2 & x_1 & x_1 & x_1 & 1
\end{array} \right\|
$$

Используя запись кубических матриц [20], матрицу A приведем к виду

$$
A = \| A_{i_1 i_2 i_3} \| = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc}
1 & x_1 & x_1 & x_2 & x_1 & x_2 & x_2 & x_2 & x_1 \\
x_1 & x_2 & x_2 & x_1 & 1 & x_1 & x_2 & x_2 & x_1 \\
x_1 & x_2 & x_2 & x_2 & x_1 & x_2 & x_1 & x_1 & 1
\end{array} \right\| \begin{array}{l} \to (i_1) \\ \to (i_3) \\ \downarrow (i_2) \end{array}
$$

$$(i_1,\ i_2,\ i_3 = 0,\ 1,\ 2)$$

Развертка сечения ориентации i_1 (при $i_1 = 0$, $i_1 = 1$, $i_1 = 2$) кубической обобщенной матрицы Адамара $A = [H(3,\ 3)]_3$ является первой, пятой, девятой строками соответственно матрицы $H_1^{(2)}$.

Утверждение 6.2. Существуют полностью правильные кубические обобщенные матрицы Адамара $[H(p,\ p)]_3$.

Доказательство. Пусть $H_2 = H(p,\ p)$ — обобщенная матрица Адамара, построенная при помощи матрицы Вандермонда

$$
H_2 = \| h_{ij} \| = \| \gamma_p^{ij} \| \qquad (i,\ j = 0,\ 1,\ \ldots,\ p-1) \tag{6.12}
$$

Определим кубическую матрицу $B = \| B_{i_1 i_2 i_3} \|$, $(i_1,\ i_2,\ i_3 = 0,\ 1,\ \ldots,\ p-1)$ с элементами

$$
B_{i_1 i_2 i_3} = h_{i_1 + i_2,\ i_1 + i_3} = \gamma_p^{(i_1 + i_2)(i_1 + i_3)} \tag{6.13}
$$

или, по-другому, каждое сечение ориентации i_1 матрицы $B = \| B_{i_1 i_2 i_3} \|$ является матрицей H_3, полученной из H_2 определенной перестановкой в ней строк и столбцов. Для доказательства того, что B — правильная кубическая обобщенная матрица Адамара, проверим выполнение системы (6.6) при $n = 3$ и $m = p$, т. е. системы

$$
\left\{ \begin{array}{l}
{}^{1,1}(B'_{t_1,\,t_2} B''_{t_1,\,t_2}) = pE(1,\ 1) \qquad t_1 = 1,\ 2;\quad t_2 = t_1 + 1,\ \ldots,\ 3 \\[2ex]
\text{а)}\ \ B'_{1,2} = B^{(i_2,\ i_3)};\quad B''_{1,2} = \overline{B}^{\binom{i_1 i_2 i_3}{i_2 i_1 i_3}} \\[2ex]
\text{б)}\ \ B'_{1,3} = B;\quad B''_{1,3} = \overline{B}^{(i_1,\ i_3)} \\[2ex]
\text{в)}\ \ B'_{2,3} = B^{(i_1,\ i_2)};\quad B''_{2,3} = \overline{B}^{\binom{i_1 i_2 i_3}{i_1 i_3 i_2}}
\end{array} \right. \tag{6.14}
$$

где
$$E(1,\ 1) = \left\| \begin{vmatrix} 10\dots0 \\ 01\dots0 \\ 00\dots1 \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} 10\dots0 \\ 01\dots0 \\ 00\dots1 \end{vmatrix} \right\| \qquad [21]$$

Проверим теперь выполнение системы (6.14), используя запись матрицы $B = \| B_{l_1 l_2 l_3} \|$ по (6.13).

а) $^{1,1}\left(B^{(l_1,\ l_3)} \overline{B}^{\binom{l_1 l_2 l_3}{l_3 l_1 l_2}} \right) = pE(1,\ 1)$ или $\sum\limits_{l_2=0}^{p-1} B_{j_1 l_2 l_3} \overline{B}_{j_1 l_2 l_3} = p\,\delta_{l_1,\ j_1}$, что то же, по (6.13), что

$$\sum_{l_2=0}^{p-1} \gamma_p^{(l_1+l_3)(l_1+l_2)-(j_1+l_3)(j_1+l_2)} = \sum_{l_2=0}^{p-1} \gamma_p^{(l_2+l_3)(l_1-j_1)+l_1^2-j_1^2} = p\,\delta_{l_1,\ j_1}$$

б) $^{1,1}(B\overline{B}^{(l_1,\ l_3)} = pE(1,\ 1)$

$$\sum_{l_3=0}^{p-1} B_{i_1 l_2 i_3} \overline{B}_{j_1 l_2 l_3} = p\delta_{l_1,\ j_1}$$

$$\sum_{l_3=0}^{p-1} \gamma_p^{(l_1+l_3)(l_1+l_2)-(j_1+l_3)(j_1+l_2)} = \gamma_p^{l_2(l_1-j_1)+l_1^2-j_1^2} \cdot \sum_{l_3=0}^{p-1} \gamma_p^{l_3(l_1-j_1)} = p\,\delta_{l_1,\ j_1}$$

в) $^{1,1}\left(B^{(l_1,\ l_2)} \overline{B}^{\binom{l_1 l_2 l_3}{l_3 l_2 l_1}} \right) = pE(1,\ 1)$

$$\sum_{l_3=0}^{p-1} B_{l_1 i_2 l_3} \overline{B}_{l_1 j_2 l_3} = p\,\delta_{l_2,\ j_2}$$

$$\sum_{l_3=0}^{p-1} \gamma_p^{(l_1+l_3)(l_1+l_2)-(l_1+l_3)(l_1+j_2)} = \sum_{l_3=0}^{p-1} \gamma_p^{(l_1+l_3)(l_2-j_2)} = p\,\delta_{l_2,\ j_2}$$

Приведем пример построения полностью правильной $[H(3,\ 3)]_3$ матрицы. Пусть

$$H_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_2 & x_1 \end{Vmatrix}$$

обобщенная $H(3,\ 3)$ матрица Адамара. Тогда

$$B = \| B_{l_1 l_2 l_3} \| \qquad (l_1,\ l_1,\ l_3 = 0,\ 1,\ 2):$$

$$\| B_{0 l_2 l_3} \| = \| \gamma_p^{l_2 l_3} \| = H_2$$

$$\| B_{1 l_2 l_3} \| = \| \gamma_p^{(l_2+1)(l_3+1)} \| = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ x_2 & x_1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\| B_{2 l_2 l_3} \| = \| \gamma_p^{(l_2+2)(l_3+2)} \| = \begin{Vmatrix} x_1 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & x_1 \end{Vmatrix} \qquad (l_2,\ l_3 = 0,\ 1,\ 2)$$

Окончательно получим

$$\|B_{i_1 i_2 i_3}\| = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & x_1 & x_2 & 1 & x_1 & 1 & x_2 \\ 1 & x_1 & x_2 & x_2 & x_1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_2 & x_1 & 1 & 1 & 1 & x_2 & 1 & x_1 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \to (i_1) \\ \to (i_3) \\ \downarrow (i_2) \end{array}$$

Замечание 6.1. Нами найдены также алгоритмы построения как полностью, так и частично правильных многомерных обобщенных матриц Адамара, аналогичные приведенным алгоритмам.

§ 7 Применения пространственных обобщенных матриц Адамара

В параграфе дадим некоторые приложения пространственных обобщенных матриц Адамара в дискретных ортогональных преобразованиях, в частности, пространственных унитарных преобразованиях.

Представим многомерное дискретное ортогональное преобразование в матричном виде:

$$[A]_s = {}^{\lambda, \mu}([W]_n [X]_s), \tag{7.1}$$

где $n = \lambda + 2\mu$, $s \geqslant \lambda + \mu$, здесь $[X]_s$ — входная, а $[A]_s$ — выходная s-мерные матрицы порядка m, $[W]_n$ — ортогональная матрица, в частности, n-мерная обобщенная матрица Адамара.

Обратное преобразование от (7.1) запишем в следующем виде

$$[X]_s = {}^{\lambda', \mu'}([W]_n^{-1} [A]_s), \tag{7.2}$$

где $n = \lambda' + 2\mu'$, причем

$${}^{\lambda', \mu'}([W]_n^{-1} [W]_n) = E(\lambda, \mu). \tag{7.3}$$

В работе [18] описано дискретное преобразование Адамара от двух переменных, являющееся частным случаем представленного (7.1) преобразования, и которое записывалось следующим матричным уравнением:

$$[A]_2 = [W]_3 [X]_2, \tag{7.4}$$

где $[A]_2$, $[X]_2$ соответственно входная и выходная (квадратная) матрицы порядка m, и $[W]_3$ — Уолш 3-куб (или Хаар 3-куб, или другая ортогональная кубическая матрица). Обратное преобразование от (7.4) записывалось как

$$[X]_2 = [W]_3^{-1} [A]_2, \tag{7.5}$$

где $[W]_3^{-1}$ — обратная матрица $[W]_3$.

Рассмотрим пример пространственного дискретного ортогонального преобразования кубических обобщенных матриц Адамара.

Имеем входную s-мерную матрицу $[X]_s$. Уравнение (7.1) запишется в виде

$$[A]_s = {}^{1,1}([W]_3 [X]_s) \tag{7.6}$$

и, если выполняется

$$^{1,1}([W]_3^{-1} [W]_3) = E(1, 1), \tag{7.7}$$

то, умножив обе части (7.6) слева ((1.1)-свернутым произведением) на $[W]_3^{-1}$, получим обратное преобразование к (7.6):

$$^{1,1}([W]_3^{-1} [A]_s) = {}^{1,1}([W]_3^{-1}\ {}^{1,1}([W]_3 [X]_s)) =$$

$$= {}^{1,1}({}^{1,1}([W]_3^{-1} [W]_3) [X]_s) = {}^{1,1}(E(1, 1) [X]_s) = [X]_s \tag{7.8}$$

Пусть теперь

$$[W]_3 = \| W_{i_1 i_2 i_3} \| = \{\gamma_p^{i_3(i_1+i_2)}\} \tag{7.9}$$

$$(i_1, i_2, i_3 = 0, 1, \ldots, m-1)$$

Обратная матрица к ней будет

$$[W]_3^{-1} = \| W^{-1}_{j_1 j_2 j_3} \| = \left\{\frac{1}{m}\gamma_p^{-j_3(j_1+j_2)}\right\} \tag{7.10}$$

$$(j_1, j_2, j_3 = 0, 1, \ldots, m-1)$$

ибо выполняется уравнение (7.7):

$$\left\| \sum_{j_3=0}^{m-1} W^{-1}_{i_1 j_3 i_3} W_{j_3 j_2 j_1} \right\| = \frac{1}{m} \left\| \gamma_p^{j_3(i_1-j_1)} \sum_{j_3=0}^{m-1} \gamma_p^{j_3(i_1-j_1)} \right\| = \frac{1}{m} \cdot mE(1, 1) = E(1, 1)$$

Запишем (7.8), используя (7.10):

$$\| X_{i_1, i_2, \ldots, i_s} \| = \left\| \sum_{j=0}^{m-1} W^{-1}_{i_1 i_2 j} A_{j, i_2, \ldots, i_s} \right\| = \left\| \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \gamma_p^{-i_1(i_2+j)} A_{j, i_2, \ldots, i_s} \right\| \tag{7.11}$$

Раскроем матричное уравнение (7.6):

$$\| A_{j, i_2, \ldots, i_s} \| = \left\| \sum_{l=0}^{m-1} W_{j i_2 l} X_{l, i_2, \ldots, i_s} \right\| = \left\| \sum_{l=0}^{m-1} \gamma_p^{l(i_2+j)} X_{l, i_2, \ldots, i_s} \right\|$$

Подставив полученное в (7.11), придем к тождеству

$$\| X_{i_1, i_2, \ldots, i_s} \| = \left\| \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \gamma_p^{-i_1(i_2+j)} \sum_{l=0}^{m-1} \gamma_p^{l(i_2+j)} X_{l, i_2, \ldots, i_s} \right\| =$$

$$= \left\| \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} \gamma_p^{i_2(l-i_1)} X_{l, i_2, \ldots, i_s} \sum_{j=0}^{m-1} \gamma_p^{j(l-i_1)} \right\| = \| X_{l, i_2, \ldots, i_s} \|$$

$$(i_1, i_2, \ldots, i_s = 0, 1, \ldots, m-1),$$

которое доказывает правильность выбора ортогональной кубической матрицы $[W_3]$, определенной по (7.9), являющейся кубической обобщенной матрицей Адамара. Действительно, по (6.11) система уравнений

$$^{0,2}(([W]_3)'_t\,([W]_3)^{*}_t) = m^2 E(0,\ 1), \qquad t = 1,\ 2,\ 3.$$

$$\text{а)}\ \ ([W]_3)'_1 = [W]_3; \qquad ([W]_3)^{*}_1 = [\overline{W}]_3^{\binom{i_1 i_2 i_3}{i_3 i_2 i_1}}$$

$$\text{б)}\ \ ([W]_3)'_2 = [W]_3^{(i_1,\, i_2)}; \qquad ([W]_3)^{*}_2 = [\overline{W}]_3^{(i_2,\, i_1)}$$

$$\text{в)}\ \ ([W]_3)'_3 = [W]_3^{\binom{i_1 i_2 i_3}{i_2 i_3 i_1}}; \qquad ([W]_3)^{*}_3 = [\overline{W}]_3$$

справедлива.

Ս. Ս. ԱՂԱՅԱՆ, Կ. Օ. ԵՂԻԱԶԱՐՅԱՆ

ՀԱԴԱՄԱՐԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ՄԱՏՐԻՑԱՆԵՐ

Ամփոփում

Աշխատանքը նվիրված է Հադամարի ընդհանրացված երկչափանի ու տարածական մատրիցաների կառուցման խնդրին։ Գտնված են Հադամարի ընդհանրացված մատրիցաների գոյության անհրաժեշտ պայմաններ. ապացուցված է, եթե $H(p^\alpha, h)$-ը որոշակի պայմաններին բավարարող Հադամարի նորմալիզացված մատրիցա է, ապա $h = pt$, p — պարզ թիվ է, α, t — բնական թվեր են։

Բերված են նոր կարգի Հադամարի ընդհանրացված մատրիցաների տրոհում թույլատրող կառուցման ալգորիթմներ։ Գտնված են Հադամարի ընդհանրացված ցիկլիկ կորիզով և ցիկլիկ մատրիցաների գոյության պայմաններն ու կառուցման ալգորիթմները։

Տրված է Հադամարի ընդհանրացված տարածական մատրիցաների ընդհանուր սահմանումը, բերված են տարածական լրիվ և մասամբ ռեգուլյար ընդհանրացված Հադամարի մատրիցաների կառուցման արագ Հադամարի ձևափոխության ալգորիթմներ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Butson A. T.* Generalized Hadamard matrices, Proc.: Amer. Math. Soc., 13 (1962), 894—898.
2. *Beauchamp K. G.* Walsh functions and their applications, 1975.
3. *Холл М.* «Комбинаторика», М., 1970.
4. *Turyn R. J.* Complex Hadamard matrices, Combinatorial Structures and their Applications, Gordon and Breach, New-York, 1970, 435—437.
5. *Good I. J.* The interaction algorithm and practiced Fourier analysis. „J. Royal Stat. Soc. (London). 1958. V B-20, 361—372.
6. *Трахтман А. М., Трахтман В. А.* «Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах», Сов. радио, 1975.
7. *Sylvester J. H.* Thoughts on inverse orthogonal matrices. Philos. Mag. (4), 24 (1867), 461—475.
8. *Butson A. T.* Relations among generalized Hadamard matrices.... Canad. J. Math, 15 (1963), 42—48.

9. *Shrikhande S. S.* Generalized Hadamard matrices and orthogonal arrays of strength two. Can. J. Math. 16 (1964), 736—740.
10. *Yamamoto K.* Generalized Williamson matrices, SIXTH Hungarian colloquium on, Combinatorics. July 6—11, 1981, Eger, Hungary.
11. *Ахмед, Рао.* «Комплексное двоичное преобразование Адамара», зарубежная радиоэлектроника, 1973, № 3.
12. *Агаян С. С., Матевосян А. К.* «Быстрое преобразование Адамара», Труды ВЦ АН АрмССР, II, 1982.
13. *Yang C. H.* Maximal Binary Matrices and Sum of Two Squares, Math. of Comput. Vol. 30. No. 133. Jan. 1976, 148—153.
14. *Helmiller R. C.* "Phase shift codes with good periodic correlated properties", IRE Trans. on Information Theory, Vol. IT-7, pp. 254—257; October, 1961.
15. *Frank R.* and *Zadoff S.* Phase shift codes with good periodic correlation properties, IRE TRANS on Information theory. Vol. IT-8, pp. 381—382. October, 1962.
16. *Shlichta P. J.* Bull. Amer. Phys. Soc., ser. II, v. 16, pp. 825—826, 1971.
17. *Shlichta P. J.* IEEE Trans. on Information Theory, v. IT-25. No. 5, September, pp. 566—572, 1979.
18. *Hammer J.*, *Seberry J. R.* IEEE Trans. on Inform. Theory, v. IT-27, No. 6, November, pp, 772—779, 1981.
19. *Агаян С. С.* «О пространственной матрице Адамара типа Вильямсона», Докл. АН Арм. ССР, 72, № 3, 131—134, 1981.
20. *Соколов Н. П.* «Введение в теорию многомерных матриц», Киев, 1972.