УДК 519.1

С. С. АГАЯН

ПОСТРОЕНИЕ ПЛОСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ БЛОЧНЫХ МАТРИЦ АДАМАРА

§ 1. Введение и постановка задач

Матрицей Адамара, или матрицей Сильвестра [1—2], называется квадратная $(m \times m)$ матрица H_m, состоящая из -1 и $+1$, удовлетворяющая условию:

$$H_m H_m^T = m I_m, \tag{1.0}$$

где I_m — единичная матрица порядка m, T — знак транспонирования. Соотношение (1.0) означает, что строки, следовательно, и столбцы матрицы H_m попарно ортогональны, т. е. строки (столбцы) образуют ортогональную систему.

Из (1.0) получаем:

$$H_m^T H_m = m I_m. \tag{1.1}$$

Равенство (1.1) позволяет сказать, что H_m является матрицей Адамара только и только тогда, когда H_m^T является матрицей Адамара.

Равенство (1.0) имеет следующий геометрический смысл: если элементы строк матрицы H_m считать координатами векторов n-мерного Евклидова пространства в ортонормированной базе, то определитель $|H_m|$ с точностью до знака равен объему n-мерного параллелепипеда, построенного на этих векторах как на ребрах, а объем параллелепипеда равен (и только при (1.1)) произведению длин его ребер, выходящих из одной вершины.

Первые работы по построению матриц Адамара вышли еще в XIX веке — так, в 1867 г. Сильвестр предложил метод построения матриц Адамара порядка $m=2^k$, $k=1, 2 \ldots$ [3], в 1898 г. Скарпис доказал, что если $p \equiv 3 \pmod 4$ или $p \equiv 1 \pmod 4$, тогда существуют матрицы Адамара соответственно порядков $p+1$, $2(p+1)$ [4]. Интересна также работа Адамара [5].

В 1933 г. Пэли установил, что если H матрица Адамара порядкэ m, $m > 2$, то $m \equiv 0 \pmod 4$ [6]. Обратная задача, а именно, задача построения матриц Адамара всех порядков m, $m \equiv 0 \pmod 4$, остается нерешенной. Отметим, что список существующих матриц Адамара порядка m, $m \leqslant 4000$, полученный машинной обработкой, приведен в работе [7], и что к настоящему времени наименьшие порядки, для которых не известны существования матриц Адамара, есть 268, 412, 428.

Начиная с 50—60 гг. в связи с применением матриц Адамара во многих задачах теории планирования эксперимента, в теории кодирования, в численном анализе и комбинаторике возрос интерес к исследованию матриц Адамара [8—10].

Существует ряд методов построения матриц Адамара, сведения о которых можно найти в работах [2, 8—9]. Приводим два основных метода, получивших дальнейшее развитие.

Метод Вильямсона. Суть этого метода заключается в нахождении (построении) четырех $(-1, 1)$ матриц с заданными условиями и конструирование с их помощью по определенной схеме матриц Адамара. Или более точно, приведем теорему Вильямсона, сформулированную в 1944 г. [11], и ее последние обобщения [12].

Теорема Вильямсона 1.1 [11]. Пусть A, B, C, D — циклические попарно коммутативные симметрические $(-1, +1)$ матрицы порядка m, удовлетворяющие условию

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 4mI_m .$$

Тогда массив Вильямсона

$$\left\| \begin{matrix} A & B & C & D \\ -B & A & -D & C \\ -C & D & A & -B \\ -D & -C & B & A \end{matrix} \right\| \qquad (1.2)$$

является матрицей Адамара порядка $4m$.

Определение 12. Множество $(-1, +1)$ матриц $\{A_i\}_{i=1}^{l}$ порядка m назовем семейством матриц Вильямсона (С. М. В.) типа $(s_1, s_2, \ldots, s_l, B_m)$, если выполняются следующие условия:

а) существует такая $(0, 1)$ матрица B_m порядка m, что для любого i, j; $i, j = 1, 2, \ldots, l$, $i \neq j$ выполняется равенство

$$A_i B_m A_j^T = A_j B_m A_i^T,$$

$$\sum_{i=1}^{l} s_i A A_i^T = m \left(\sum_{i=1}^{l} s_i \right) I_m .$$

Замечание 1.1. Понятие семейств матриц Вильямсона совпадает с понятием

— матриц Вильямсона [8] при $l = 4$, $s_1 = s_2 = \ldots = s_4 = 1$, $B_m = I_m$

— восьми матриц Вильямсона [8] при $l = 8$, $B_m = I_m$, $s_1 = s_2 = \ldots = s_8 = 1$

— матриц Вильямсона, полученных Турином [13], при $l=4$, $s_1=s_2=1$, $B_m=I_m$

— матриц Гетале—Зейделя [8] при $s_1=s_2=\ldots=s_4=1$

A_i — циклические матрицы, $i=1, 2, 3, 4$, $B_m=R_m$

$$R_m=\{r_{ij}\}_{ij=1}^{m}$$

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } i+j=m+1\\ 0, & \text{в противном случае}\end{cases}$$

— с понятием обобщенных матриц типа Вильямсона [14].

Определение [15]. Ортогональной схемой порядка m типа $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, $s_i>0$ называется квадратная матрица O порядка m. с коммутирующимися между собой переменными из множества $\{0, \pm x_1, \pm x_2, \ldots, \pm x_m\}=M$, удовлетворяющая условию

$$OO^T=\sum_{i=1}^{n}(s_i x_i^2)\, I_m. \tag{1.3}$$

Другими словами, ортогональная схема — это формальная ортогональная матрица, каждая строка (столбец) которой содержит точно s_i-элементов типа x_i или $-x_i$.

Обобщенная теорема Вильямсона 1.2 [12]. Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{l}$ — семейство матриц Вильямсона типа $(s_1, s_2, \ldots, s_l, I_m)$ и пусть существует ортогональная схема $O(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ типа $(s_1, s_2, \ldots, s_l)$ порядка n и состоящая из элементов $\pm x_i$, $x_i\neq 0$. Тогда существует матрица Адамара порядка mn.

Доказательство теоремы производится по следующей схеме: заменяются элементы $x_1, x_2, \ldots, x_l$ ортогональной схемы O соответственно матрицами $A_1, A_2, \ldots, A_l$, принадлежащими семейству Вильямсона, далее, использованием свойства ортогональной схемы и свойства С. М. В. показывается, что полученная матрица является матрицей Адамара.

Замечание 1.2. Сформулированная теорема является обобщением теорем Вильямсона [11], Бомер—Холла [8], Янга [16], Дж. Валлиса [17], теоремы 3 работы [14].

Замечание 1.3. Просмотрев все доказательства указанных теорем, а именно: теорем Вильямсона, Бомер—Холла, Янга, Валлиса, обобщенной теоремы Вильямсона, приходим к выводу, что матрицы Адамара «собраны» из матриц типа Вильямсона, Янга, F-матриц, обобщенных матриц Вильямсона, семейства матриц Вильямсона [18] по некоторым схемам, в основном ортогональным.

Переходим теперь ко второму основному методу построения матриц Адамара.

Метод Пэли—Валлис—Уейтмана

Продемонстрируем указанный метод на простой, наглядной теореме Валлис—Уейтмана [8]. Справку об остальных теоремах, являющихся в разных направлениях усилением этого метода, можно найти в работах [1, 8, 9, 17—18].

Теорема Валлиса—Уейтмана [8]. Пусть X, Y, W, Z инцидентные матрицы первого типа [8], а Z — инцидентная матрица второго типа [8] разностного множества $4 - \{2m+1,\ m,\ 2(m-1)\}$ [1, 8] и пусть

$$A = 2X - J, \qquad C = 2Z - J,$$

$$B = 2Y - J, \qquad D = 2W - J.$$

$l = (11 \ldots 1)$ — вектор-строка, состоящая из $2m+1$ единиц.
Тогда

$$H = \left\| \begin{array}{cccccccc} -1 & -1 & -1 & -1 & l & l & l & l \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -l & l & -l & l \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -l & l & l & -l \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -l & -l & l & l \\ l^T & l^T & l^T & l^T & A & B & C & D \\ -l^T & l^T & -l^T & l^T & -B^T & A^T & -D & C \\ -l^T & l^T & l^T & -l^T & -C & D^T & A & -B^T \\ -l^T & -l^T & l^T & l^T & -D^T & -C & B & A^T \end{array} \right\| \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \text{Базовая} \\ \text{матрица} \end{array}$$

является матрицей Адамара порядка $8(m+1)$.

Замечание 1.4. Просмотрев доказательства теорем Пэли [1], Валлис—Уейтмана [8], Валлиса [8], Уейтмана [25] и др., приходим к выводу, что матрицы Адамара построены по следующей схеме: взята некоторая базовая матрица и добавлены к ней новые с фиксированной конструкцией матрицы. Отметим, что базовая матрица не может быть Адамаровой, так как максимальный порядок m_1 матрицы Адамара H_1, содержащейся в матрице Адамара порядка m, удовлетворяет условию $m_1 \leqslant \frac{m}{2}$ [19].

Таким образом, принимая во внимание замечание 1.3 и 1.4, придем к следующей задаче:

Можно ли «собрать» матрицы Адамара из таких же матриц меньших размеров? Возможность такого построения была продемонстрирована Сильвестром при построении матриц Адамара порядка 2^n, $n = 1, 2, \ldots$ [3]. Конструкция этого построения очень проста и имеет следующий вид:

$$H_{n+1} = \begin{Vmatrix} H_n & H_n \\ H_n & -H_n \end{Vmatrix}$$

Перейдем теперь к формулировке задачи:

Задача 1. Пусть Q_{ij}, $ij = 1, 2, \dots, n$, — матрицы Адамара порядка m. Какие условия нужно наложить на матрицы Q_{ij}, чтобы матрица

$$H_{mn} = \begin{Vmatrix} Q_{11} & Q_{12} \dots Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} \dots Q_{2n} \\ \vdots & \ddots \quad \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} \dots Q_{nn} \end{Vmatrix}$$

была матрицей Адамара порядка mn.

Представляет интерес исследование аналогичной задачи и относительно пространственных матриц Адамара.

Определение [20]. Трехмерная матрица

$$A = \{h_{ijk}\}, \qquad h_{ijk} = \pm 1$$

порядка m называется пространственной матрицей Адамара, если все ее двумерные составляющие, параллельные координатным плоскостям (ij), (i, k), (kj), удовлетворяют условиям:

$$\sum_i \sum_j h_{ija} h_{ijb} = m^2 \delta_{ab}, \tag{1.4}$$

$$\sum_i \sum_k h_{iak} h_{ibk} = m^2 \delta_{ab}, \tag{1.5}$$

$$\sum_j \sum_k h_{ajk} h_{bjk} = m^2 \delta_{ab}, \tag{1.6}$$

где

$$\delta_{ab} = \begin{cases} 1, & \text{если } a \neq b \\ 0, & \text{если } a = b \end{cases}$$

Отметим только, что трехмерные и четырехмерные матрицы Адамара впервые были построены в 1971 г. Шлихтом [21].

В работе [20] Шлихт привел ряд предположений о возможных приложениях пространственных матриц Адамара, а также сформулировал несколько нерешенных задач:

а) построить для многомерного случая алгебраический аппарат исследования, аналогичный двухмерному случаю;

б) построить многомерные аналоги кососимметрических матриц Адамара и матриц Вильямсона.

Настоящая работа посвящена исследованию выше сформулированных задач, а именно:

1) построению блочных, блочно-циклических,— блочно-симметрических двухмерных и пространственных матриц Адамара,

2) решению задач Шлихта,

3) приложению полученных результатов для оценки плотности максимального веса [22] и максимального излишка [22] матриц Адамара. В работе приведена конструкция блочно-циклических двухмерных и пространственных матриц Адамара.

§ 2. Необходимое и достаточное условие существования блочно-циклических матриц Адамара

Перейдем к исследованию задачи 1 более узкой постановки, а именно:

Задача: Пусть Q_i, $i=0, 1, \dots, n-1$, являются матрицей Адамара порядка m. Какие условия нужно наложить на матрицу Q_i, $i=0, 1, \dots, n-1$, чтобы

$$H_{mn}=\begin{Vmatrix} Q_0 & Q_1 & Q_2 \dots Q_{n-1} \\ Q_{n-1} & Q_0 & Q_1 \dots Q_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots \vdots \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 \dots Q_0 \end{Vmatrix} \tag{2.1}$$

была матрицей Адамара порядка mn.

Используя свойства прямого произведения двух матриц, соотношения (2.1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} H_{mn} &= I_m \otimes Q_0 + U \otimes Q_1 + \dots + u^{n-1} \otimes Q_{n-1} = \\ &= Q_0 \otimes I_m + Q_1 \otimes U + \dots + Q_n \otimes U^{n-1}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $\otimes$ — прямое (кронекерское) произведение [1]

$$U=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \dots \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \dots \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \dots \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \dots \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \dots \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \end{Vmatrix} \qquad U^m = I_m \tag{2.3}$$

Лемма 2.1. Пусть H_{mn} — блочно-циклическая матрица порядка mn, состоящая из матриц (блоков) Q_i, $i=0, 1, \dots, n-1$, порядка m. И пусть имеет место соотношение

$$\text{а)}\quad Q_i Q_j^T = Q_j Q_i^T \qquad i, j = 0, 1, \dots, n-1 \tag{2.4}$$

или

$$\text{б)}\quad Q_{n-i} = Q_i \qquad i = 1, 2, \dots, n-1. \tag{2.5}$$

Тогда

$$HH^T = I \otimes F_0 + U \otimes F_1 + \ldots + U^{n-1} \otimes F_{n-1}, \tag{2.6}$$

где

$$F_k = \sum_{l=k}^{n-1} Q_l Q_{l-k}^T + \sum_{l=0}^{k} Q_l Q_{n+l-k}^T \tag{2.7}$$

$$k = 0,\ 1, \ldots, n-1.$$

Доказательство. Составим произведения

$$HH^T = \left(\sum_{j=0}^{n-1} U^j \otimes Q_j\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} [U^j \otimes Q_j]^T\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \left[(U^j \otimes Q_j) \sum_{l=1}^{n-1} (Q_{n-l}^T \otimes U^l)\right]$$

откуда, используя свойства прямого произведения двух матриц [23], а также равенство

$$U^{n+k} = U^k \qquad k = 0,\ 1, \ldots, n-1,$$

получим:

$$HH^T = (Q_1 Q_0^T + Q_2 Q_1^T + Q_3 Q_2^T + \ldots + Q_{n-1} Q_{n-2}^T + Q_0 Q_{n-1}^T) \otimes I_m +$$

$$+ (Q_2 Q_0^T + Q_3 Q_1^T + Q_4 Q_2^T + \ldots + Q_0 Q_{n-2}^T + Q_1 Q_{n-1}^T) \otimes U +$$

$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots +$$

$$+ (Q_{n-2} Q_0^T + Q_{n-1} Q_1^T + Q_0 Q_2^T + \ldots + Q_{n-4} Q_{n-2}^T + Q_{n-3} Q_{n-1}^T) \otimes U^{n-2} +$$

$$+ (Q_{n-1} Q_0^T + Q_0 Q_1^T + Q_1 Q_2^T + \ldots + Q_{n-3} Q_{n-2}^T + Q_{n-2} Q_{n-1}^T) \otimes U^{n-1}.$$

Далее, введя обозначения

$$F_k = \sum_{l=k}^{n-1} Q_l Q_{l-k}^T + \sum_{l=0}^{k} Q_l Q_{n+l-k}^T,$$

имеем соотношение (2.6).

Лемма доказана.

Теорема 2.1. Пусть H_{mn} блочно-циклическая матрица порядка mn, n — нечетное число, состоящее из матриц Адамара Q_l, $l = 0$, $1, \ldots, n-1$ порядка m. И пусть имеем соотношение (2.4) или (2.6). Тогда, для того, чтобы H_{mn} была матрицей Адамара, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\sum_{l=k}^{n-1} Q_l Q_{l-k}^T + \sum_{l=0}^{k} Q_l Q_{n+l-k}^T = 0, \qquad k = 1,\ 2, \ldots, n-1. \tag{2.8}$$

Необходимость. Пусть H_{mn} — блочно-циклическая матрица порядка mn, следовательно, имеем

$$H_{mn} = \sum_{l=0}^{n-1} U^l \otimes Q_l. \tag{2.9}$$

Далее, с одной стороны, согласно лемме (2.1),

$$H_{mn} H_{mn}^T = \sum_{k=0}^{n-1} U^k \otimes F_k, \tag{2.10}$$

где

$$F_k = \sum_{l=k}^{n-1} Q_l Q_{l-k}^T + \sum_{l=0}^{k} Q_l Q_{n+l-k}^T,$$

а с другой стороны, так как H_{mn} — матрица Адамара порядка mn, имеем

$$HH^T = nmI_{nm}. \tag{2.11}$$

Теперь, сопоставляя соотношения (2.10) и (2.11), получим

$$I \otimes F_0 + U \otimes F_1 + \ldots + U^{n-1} \otimes F_{n-1} = mnI_{mn}, \tag{2.12}$$

но из структуры матрицы

$$(U^k \otimes F_k) * (U^q \otimes F_q) = 0, \qquad k \neq q.$$

где $*$ — произведение Адамара [8], откуда из (2.12) получаем

$$\text{а)} \quad U^p \otimes F_p = 0, \qquad p = 1, 2, \ldots, n-1,$$

следовательно,

$$F_p = 0, \qquad p = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Необходимость доказана.

Достаточность сразу получим из леммы 2.1.

Теорема доказана.

Приведем теперь необходимое и достаточное условие построения блочно-циклических матриц Адамара, где участвуют только элементы матрицы Q_l.

Определение [24]. Квадратная матрица $H(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ порядка m, каждый элемент которой принимает одно из $2l$ значений $\pm x_i$, $i = 1, 2, \ldots, l$, называется A-матрицей, если для различных значений параметров $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выполняется соотношение

$$H(x_1^{(1)} x_2^{(1)} \ldots x_l^{(1)}) H^T (x_1^{(2)} x_2^{(2)} \ldots x_l^{(2)}) + H(x_1^{(2)} x_2^{(2)} \ldots x_l^{(2)}).$$

$$H^T (x_1^{(1)} x_2^{(1)} \ldots x_l^{(1)}) = \frac{2m}{l} \sum_{i=1}^{l} (x_i^{(1)} x_i^{(2)}) I_m. \tag{2.13}$$

Замечание. Очевидно, что если $H(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ — произвольная A-матрица, то при постановке в H значений 1 вместо всех переменных x_i получается матрица Адамара; эту матрицу Адамара мы будем называть матрицей, порожденной матрицей H.

Обозначим через

$$Q_k = H(x_1^{(p)} x_2^{(p)} \ldots x_l^{(p)}), \qquad x_i^{(p)} \in \{-1, 1\}, \qquad p = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Теорема 2.2. Для того, чтобы существовала блочно-циклическая, блочно-симметрическая матрица Адамара порядка mk, состоящая из блоков Q_k, $k=0, 1, \ldots, m-1$, порождаемых из некоторой матрицы $H(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ типа A порядка k, состоящей из l параметров, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$1.\quad x_i^p = x_{m-i}^p,\quad i=1, 2, \ldots, m-1,\quad p=1, 2, \ldots, l, \tag{2.14}$$

$$2.\quad |x_i^p| = 1,\quad i=1, 2, \ldots, m-1,\quad p=1, 2, \ldots, l, \tag{2.15}$$

3. а) для нечетных m

$$\sum_{\substack{i+j \;\; i+m-j \\ i+j=k \text{ или } i+j=m+k}} \left(\sum_{q=1}^{l} x_i^q x_j^q\right) = -l. \tag{2.16}$$

б) для четных m

$$\sum_{\substack{i+j=2p \\ \text{или } i+j=m+2p}} \left(\sum_{k=1}^{l} x_i^k x_j^k\right) = 2k \quad \text{и} \quad \sum_{\substack{i+j=2p+1 \\ \text{или } i+j=m+2p+1}} \left(\sum_{k=1}^{l} x_i^k x_j^k\right) = 0. \quad (2.17) \text{ и } (2.18)$$

Необходимость. Пусть H_{mk} — блочно-циклическая, блочно-симметрическая матрица Адамара порядка mk, состоящая из матриц (блоков), порожденных из некоторой матрицы типа A порядка k, зависящей от l-параметров. Согласно теореме (2.1), имеем соотношение (2.8) и $F_0 = mI_m$, а в силу блочно-симметричности, также и соотношения $Q_i = Q_{m-i}$.

Далее, так как Q_i, $i=0, 1, \ldots m-1$, получены из некоторой матрицы типа A, то это означает, что справедливо равенство

$$Q_i Q_j^T + Q_j Q_i^T = \frac{2k}{l}\left(x_1^{(i)} x_1^{(j)} + x_2^{(i)} x_2^{(j)} + \ldots x_l^{(i)} x_l^{(j)}\right) I_k,\quad i \neq j. \tag{2.19}$$

Соотношение (2.8) можем переписать в виде:

$$\frac{2k}{l} \sum_{\substack{i+j=k \\ i+j=m+k}} \left(x_1^{(i)} x_1^{(j)} + x_2^{(i)} x_2^{(j)} + \ldots + x_l^{(i)} x_l^{(j)}\right) I_k = 0. \tag{2.20}$$

$$k = 1, 2, \ldots, m-1.$$

Рассмотрим 2 случая:

1) когда m — нечетное число,

2) когда m — четное число.

В первом случае для каждого k в выражении (2.20) участвует одно слагаемое вида

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_l^2 = l,$$

что равно l, так как $|x_i| = 1$, $i = 1, 2, \ldots, l$ и оно входит в сумму

$$\sum_{i+j=k} \left(x_1^{(i)} x_1^{(j)} + \ldots + x_l^{(i)} x_l^{(j)}\right),$$

когда k — нечетное число, и в сумму

$$\sum_{i+j=m-k} (x_1^{(i)} x_1^{(j)} + \ldots + x_l^{(i)} x_l^{(j)}),$$

когда k — четное число.

Следовательно, для каждого k выражение (2.20) содержит слагаемое, равное l, при $i=j$ или $i+j=m$, а это означает, что равенство (2.20) можно переписать в виде:

$$\sum_{\substack{i\neq j,\ i\neq m-j \\ i+j=k \text{ или } i+j=m+k}} (x_1^{(i)} x_1^{(j)} + x_2^{(i)} x_2^{(j)} + \ldots + x_l^{(i)} x_l^{(j)}) = -l.$$

2) пункт теоремы сразу вытекает из того условия, что матрица H — Адамарова.

Итак, при нечетных m необходимость доказана. Перейдем теперь ко второму случаю, а именно к случаю, когда m — четное число. Снова рассмотрим два случая

$$\text{а)}\quad k=2q,$$

$$\text{б)}\quad k=2q+1, \qquad q=1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{m}{2}.$$

Пусть $k = 2q$, тогда выражение (2.20) содержит два слагаемых, равных l:

$$(x_1^{(q)})^2 + (x_2^{(q)})^2 + \ldots + (x_l^{(q)})^2 = l,$$

следовательно, при $m = 2q$, $q = 1,2, \ldots \frac{m}{2}$ имеем

$$\sum_{i\neq j,\ i\neq m-j} (x_1^{(i)} x_1^{(j)} + x_2^{(i)} x_2^{(j)} + \ldots + x_l^{(i)} x_l^{(j)}) = -2l.$$

Рассмотрим случай, когда $k = 2q + 1$. Тогда, с одной стороны, в первую часть (2.20) входят слагаемые, сумма индексов которых нечетна, а с другой — при $i = j$, $i = m-j$ сумма индексов всегда четна, следовательно, к равенству (2.20) можно добавить и условия $i\neq j$, $i\neq m-j$, т. е.

$$\sum_{\substack{i\neq j,\ i\neq m-j \\ i+j=2q+1 \text{ или } i+j=m+2q+1}} (x_1^{(i)} x_1^{(j)} + x_2^{(i)} x_2^{(j)} + \ldots + x_l^{(i)} x_l^{(j)}) = 0.$$

Таким образом, объединив пункты а) и б), получим доказательство необходимости и при четных m.

Достаточность. Пусть существуют последовательности $\{x_1^{(i)}\}_{i=0}^{m-1}$, $\{x_2^{(i)}\}_{i=0}^{m-1}, \ldots, \{x_l^{(i)}\}_{i=0}^{m-1}$, удовлетворяющие условиям теоремы, и пусть m — нечетное число (при четных m — доказательство аналогично).

Представим выражение (2.20) в виде

$$\left\{\sum_{\substack{i\neq j,\ i\neq m-j \\ i+j=k \text{ или } i+j=m+k}} (x_1^{(i)} x_1^{(j)} + x_2^{(i)} x_2^{(j)} + \ldots + x_l^{(i)} x_l^{(j)})\right\} I_k - l = 0.$$

Далее, заменяя l на $(x_1^{(i)})^2+\ldots+x_l^{(i)})^2$ и умножая обе части на $\frac{2k}{l}$, получим

$$\left\{\sum_{\substack{i+j=k \\ \text{или } i+j=m+k}} \frac{2k}{l}\left(x_1^{(i)}x_1^{(j)}+x_2^{(i)}x_2^{(j)}+\ldots+x_l^{(i)}x_l^{(j)}\right)\right\} I_k=0. \quad (2.21)$$

Теперь составим последовательность матриц $\{Q_i\}_{i=0}^{m-1}$ порядка k по конструкции матриц типа A, заменяя переменные $x_1, x_2, \ldots, x_l$ соответственно на числа

$$x_1^{(i)}\in\{x_1^{(i)}\}_{i=0}^{m-1},\ x_2^{(i)}\in\{x_2^{(i)}\}_{i=0}^{m-1},\ldots, x_l^{(i)}\in\{x_l^{(i)}\}_{i=0}^{m-1}.$$

Построенные матрицы Q_i, $i=0, 1, \ldots, m-1$, будут удовлетворять равенству $Q_i=Q_{m-i}$, так как $x_i=x_{m-i}$, $i=0, 1, \ldots, m-1$, следовательно, используя то, что матрицы Q_i получены из матриц типа A, соотношение (2.21) можем переписать в виде

$$\sum_{i+j=k \text{ или } i+j=m+k} Q_i Q_j^T=0,$$

или, что то же,

$$\sum_{i=0}^{k} Q_i Q_k^T+\sum_{i=k+1}^{m-1} Q_i Q_{k+m-i}^T=0,$$

т. е. условие (2.8) теоремы выполнено.

Легко проверяется, что и условие (2.8) теоремы 2.1 выполнено. Таким образом, получили, что матрица

$$H=\sum_{i=0}^{m-1} U^i\otimes Q_i$$

блочно-циклическая матрица Адамара.

А условие блочно-симметричности вытекает из равенства

$$Q_i=Q_{m-i}, \qquad i=1, 2, \ldots, m-1.$$

Итак, достаточность доказана.

Теорема полностью доказана.

Следствие 1. Пусть $\{x_i^j\}$, $|x_i^j|=1$, $i=1, 2, \ldots, l$, $j=0, 1, 2, \ldots, m-1$, и пусть

$$1)\quad x_1^0x_1^j+x_2^0x_2^j+\ldots+x_l^0x_l^j=-\frac{l}{2}; \qquad l=2p$$

$$2)\quad x_1^ix_1^k+x_2^ix_2^k+\ldots+x_l^ix_l^k=0, \qquad i\neq k$$

$$i=1, 2, \ldots, m-1.$$

И, наконец, пусть существует матрица $O(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ типа A порядка k, зависящая от l-параметров, тогда существует матрица Адамара порядка mk.

Доказательство. Обозначим через H следующую блочно-циклическую матрицу

$$H = \sum_{i=1}^{m-1} U^i \otimes Q_i, \quad \text{где} \quad Q_i = Q_{m-i}, \quad i = 1, 2, \ldots, m-1. \tag{2.22}$$

Q_i — матрицы, поставленные вместо соответствующих элементов $x_1, x_2, \ldots, x_l$ — последовательности $\{x_j^i\}$.

Далее, согласно лемме 2.1 и условиям 1) и 2) следствия 1, имеем:

а) при $k = 2p$

$$F_k = Q_0 Q_k^T + Q_k Q_0^T + Q_{\frac{k}{2}} Q_{\frac{k}{2}}^T, \tag{2.23}$$

т. е.

б) при $k = 2l + 1$

$$F_k = Q_0 Q_k^T + Q_k Q_0^T + Q_{k(\mathrm{mod}\, m)} Q_{k(\mathrm{mod}\, m)}^T, \tag{2.24}$$

которые, при условии следствия также равны нулю.

Далее, легко проверить, что

$$F_0 = mkI_k. \tag{2.25}$$

Итак, учитывая представления (2.22), (2.8), а также соотношения (2.23), (2.24), (2.25), получим справедливость следствия 1.

Таким образом, построение блочно-циклических матриц Адамара (БЦМА) привели, с одной стороны, к построению A-матриц, зависящих от l-параметров и, с другой стороны, к нахождению схем, по которым можно собрать БЦМА из порожденных A-матриц.

§ 3. Параметрические матрицы Адамара, А-матрицы

В этом параграфе введем понятия параметрических матриц Адамара, а также приведем некоторые свойства параметрических матриц Адамара и A-матриц с целью их использования при построении БЦМА.

Определение 3.1. Квадратная матрица $\Pi = \Pi(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ порядка m, каждый элемент которой принимает одно из $2l$-значений $\pm x_i$, $i = 1, 2, \ldots, l$, называется параметрической матрицей Адамара, если для любых значений $x_i^0 \in \{-1, 1\}$, $i = 1, 2, \ldots, l$ выполняется соотношение

$$\Pi(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_l^0)\, \Pi^T(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_l^0) = mI_m. \tag{3.1}$$

Замечание 3.1. Массивы Вильямсона [8], Бомер—Холла [8], Янга [8] являются параметрическими матрицами Адамара. Обратное неверно, так как матрица

$$\Pi_{12} = \left\| \begin{matrix} Q_0 & Q_1 & Q_1 \\ Q_1 & Q_0 & Q_1 \\ Q_1 & Q_1 & Q_0 \end{matrix} \right\| \tag{3.2}$$

где

$$Q_0 = \left\| \begin{matrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{matrix} \right\|, \quad Q_1 = \left\| \begin{matrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{matrix} \right\| \tag{3.3}$$

является параметрической матрицей Адамара, но не является массивом указанных типов.

Замечание 3.2. A-матрица является параметрической матрицей Адамара и содержит в себе понятия:

— массива Янга при $l = 2$ [8],
— массива Вильямсона при $l = 4$ [8],
— массива Бомер—Холла при $l = 4$ [8],
— массива Плоткина при $l = 8$ [30].

Замечание 3.3. Существует A-матрица, не совпадающая с массивами указанных типов. На самом деле, легко проверить, что нижеприведенная матрица A_{12} является A-матрицей, но не является массивом указанных типов.

$$A_{12} = A_{12}(x_1 x_2 x_3) =$$

$$= \left\| \begin{matrix} B(x_1\ x_2\ x_3) & D(x_2\ -x_3\ x_1) & D(x_3\ x_2\ -x_1) & D(x_3\ x_1\ -x_2) \\ D(-x_2\ x_3\ -x_1) & B(x_1\ x_2\ x_3) & D(-x_3\ x_2\ -x_1) & D(x_3\ -x_1\ x_2) \\ D(-x_3\ -x_2\ -x_1) & D(x_3\ -x_2\ x_1) & B(x_1\ x_2\ x_3) & D(-x_2\ -x_1\ x_3) \\ D(-x_3\ -x_1\ x_2) & D(-x_3\ x_1\ -x_2) & D(x_2\ x_1\ -x_3) & B(x_1\ x_2\ x_3) \end{matrix} \right\| \tag{3.4}$$

где

$$B(a,\ b,\ c) = \left\| \begin{matrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{matrix} \right\|, \quad D(a,\ b,\ c) = \left\| \begin{matrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{matrix} \right\| \tag{3.5}$$

В работе мы не остановимся на построении A-матриц, в качестве таких матриц будем использовать отмеченные массивы, а именно массивы Вильямсона, Янга, Бомер—Холла, Плоткина.

Отметим, что построенная A-матрица $A_{12}\ (x_1,\ x_2,\ x_3)$ с 3 параметрами интересна также по следующим причинам:

Во-первых, в работе [15] А. В. Герамитой, Дж. Герамитой и Дж. С. Валлисом было высказано предположение о том, что если $m = 4t$, t — нечетное число, то для существования ортогональной схемы типа $(a,\ a,\ x)$ необходимо и достаточно, чтобы $\frac{x}{a} = q_1^2 + q_2^2$, где q_1, q_2 — натуральные числа.

2—698

Во-вторых, анализируя все построенные ортогональные схемы и имеющиеся теоремы о существовании ортогональных схем: теорему М. Плоткина [30], теорему Купер—Валлиса [8], теорему Валлиса [31], утверждение Сторера [32] о том, что ортогональная схема типа $(\underbrace{11\ldots 1}_{l})$, $l = 4m$ (l — равен порядку ортогональной схемы) может существовать в том и только в том случае, если $m = 1, 2, 4, 8$, и, наконец, построенные ортогональные схемы, имеющие тип (ss), $(ssss)$, $(ssssssss)$, $x_i \neq 0$, совпадающий соответственно с известными массивами Янга, Бомер—Холла, М. Плоткина, дают основание предположить, что ортогональная схема порядка m $m \equiv O \pmod 4$ типа $(\underbrace{ss\ldots s}_{l})$, $ls = m$ может существовать в том и только в том случае, когда $n = 1, 2, 4, 8$.

Вернемся теперь к нахождению количества матриц, из которых можно «собрать» БЦБСМА. Заметим, что количество матриц Адамара, полученных (порожденных) из A-матриц, зависящих от l-параметров (заменяя x_i, $i = 1, 2, \ldots, l$ на числа $+1$ или -1), равно 2^l. Естественно, возникает:

вопрос 1. Каким соотношениям удовлетворяет параметр l?

вопрос 2. Найти те условия, которые позволили бы выделить минимальное количество матриц из множества матриц, порожденных из A-матриц, необходимых для конструирования БЦМА.

Чтобы ответить на первый вопрос, отметим:

Замечание 3.4 $A = A(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ — матрица является ортогональной схемой $O(x_1, x_2, \ldots, x_l)\, x_i \neq 0$ типа $(\underbrace{a, a, \ldots, a}_{l})$.

Справку об ортогональных схемах можно найти в [15, 26—31].

В работе [15] показано, что

$$l \leqslant \rho(m), \tag{3.6}$$

где $\rho(m)$ — функция Радоне, т. е.

$$\rho(m) = 8c + 2^d,$$

$m = 2^a b$, b — нечетное число, $a = 4c + d$.
Отметим также, что

$$\rho(m) = m \quad \text{при} \quad m = 1, 2, 4, 8.$$

Откуда число параметров l A-матрицы порядка m зависит от m ($l = l(m)$) и ограничено сверху функцией Радона.

Утверждение 3.1. Для произвольной матрицы Адамара порядка m существует ортогональная схема порядка $12m$ типа $(4m, 4m, 4m)$.

Доказательство. Пусть H — матрица Адамара порядка m. Составим прямое произвольное (кронекерское) произведение матриц $A_{12}(a, b, c)$ и H, т. е.

$$O_{12}(a, b, c) = A_{12}(a, b, c) \otimes H,$$

далее, легко проверить, используя свойства прямого произведения двух матриц [8] и A-матриц, что $O_{12}(a, b, c)$ является ортогональной схемой типа $(4m, 4m, 4m)$.

Следствие 3.1. Для матриц Адамара A_{12} (111) можно построить ортогональную схему порядка 12 типа $(\underbrace{sss \ldots s}_{l})$ для всех $l \leqslant \rho(12)$, так что

$$Q_{12}(x_1, x_2, \ldots, x_l)\Big|_{\underbrace{11 \ldots 1}_{l}} = A_{12}(111 \ldots 1).$$

Следствие 3.2. Для любых натуральных чисел p и q $p = 2l$, $1 \leqslant l \leqslant 33$, существует ортогональная схема типа (a, a, x) порядка $12p^q$, так что в равенстве

$$\frac{x}{a} = q_1^2 + q_2^2$$

q_i, $i = 1, 2$, должны равняться соответственно нулю и единице.

Следствие 3.3. Предположение о том, что для любого m, $m \equiv 0 \pmod 4$ необходимым и достаточным условием существования ортогональной схемы порядка m, типа $(\underbrace{ss \ldots s}_{l})$, $ls = m$ является соотношение

$$l = 1, 2, 4, 8$$

неверно.

Ответ на второй вопрос будет дан в § 4 и 5.

§ 4. Достаточные условия существования БЦМА

Настоящий параграф посвящен нахождению условий, позволяющих выделить из множества матриц, порожденных из A-матриц, минимальное (имеется в виду разное) количество матриц с целью конструирования блочно-циклических матриц Адамара (БЦМА), блочно-циклических—блочно-симметрических матриц Адамара (БЦБСМА).

Предположим, что матрицы Q_i—матрицы Адамара порядка k, из которых необходимо собрать БЦМА или БЦБСМА, получены из некоторой A-матрицы, имеющей 4 параметра, или из ортогональной схемы типа (p, p, p, p).

Справедливы в классе эквивалентных матриц Адамара следующие утверждения.

Говорят, что матрицы H_1 и H_2 эквивалентны, если

$$H_2 = PH_1Q,$$

где P и Q — мономиальные матрицы перестановки с элементами $+1$ и -1, т. е. матрица P совершает перестановку и меняет знаки у строк, а Q — у столбцов.

Утверждение 4.1. Пусть в представлении

$$H_{mk} = I \otimes Q_0 + u \otimes Q_1 + \ldots + u^{m-1} \otimes Q_{m-1} \tag{4.1}$$

m — нечетное число, а $Q_i = Q_{m-i}$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$; и пусть первая строка Q_0 содержит $\frac{k}{p} q_1$, $q_1 = 2, 4$ положительных элементов, тогда первые строки остальных блоков Q_i, $i = 1, 2, \ldots, m-1$ содержат $\frac{k}{p} q_2$, $q_2 = 1, 3$ положительных элементов.

Утверждение 4.2. Пусть в (4.1) m—нечетное число, а $Q_i = Q_{m-i}$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$ и пусть первая строка матрицы Q_0 содержит $\frac{k}{p} q_2$, $q_2 = 1, 3$ положительных элемента, тогда первые строки остальных блоков Q_i, $i = 1, 2, \ldots, m-1$ содержат $\frac{k}{p} q$, $q = 2, 4$ положительных элементов

Замечание 4.1. Если матрицы Q_i, $i = 1, 2, \ldots, 16$ порождены из массива Вильямсона, т. е. имеют следующий вид:

$$Q_0 = \begin{Vmatrix} - & - & - & - \\ + & - & + & - \\ + & - & - & + \\ + & + & - & - \end{Vmatrix} \qquad Q_1 = \begin{Vmatrix} - & - & - & + \\ + & - & - & - \\ + & + & - & + \\ - & + & - & - \end{Vmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{Vmatrix} - & - & + & - \\ + & - & + & + \\ - & - & - & + \\ + & - & - & - \end{Vmatrix} \qquad Q_3 = \begin{Vmatrix} - & - & + & + \\ + & - & - & + \\ - & + & - & + \\ - & - & - & - \end{Vmatrix}$$

$$Q_4 = \begin{Vmatrix} - & + & - & - \\ - & - & + & - \\ + & - & - & - \\ + & + & + & - \end{Vmatrix} \qquad Q_5 = \begin{Vmatrix} - & + & - & + \\ - & - & - & - \\ + & + & - & - \\ - & + & + & - \end{Vmatrix} \tag{4.2}$$

$$Q_6 = \begin{Vmatrix} - & + & + & - \\ - & - & + & + \\ - & - & - & - \\ + & - & + & - \end{Vmatrix} \qquad {}_7 = \begin{Vmatrix} - & + & + & + \\ - & - & - & + \\ - & + & - & - \\ - & - & + & - \end{Vmatrix}$$

$$Q_8 = \left\| \begin{matrix} + & - & - & - \\ + & + & + & - \\ + & - & + & + \\ + & + & - & + \end{matrix} \right\| \qquad Q_9 = \left\| \begin{matrix} + & - & - & + \\ + & + & - & - \\ + & + & + & + \\ - & + & - & + \end{matrix} \right\|$$

$$Q_{10} = \left\| \begin{matrix} + & - & + & - \\ + & + & + & + \\ - & - & + & + \\ + & - & - & + \end{matrix} \right\| \qquad Q_{11} = \left\| \begin{matrix} + & - & + & + \\ + & + & + & - \\ - & + & + & + \\ - & - & - & + \end{matrix} \right\|$$

$$Q_{12} = \left\| \begin{matrix} + & + & - & - \\ - & + & + & - \\ + & - & + & - \\ + & + & + & + \end{matrix} \right\| \qquad Q_{13} = \left\| \begin{matrix} + & + & - & + \\ - & + & - & - \\ + & + & + & - \\ - & + & + & + \end{matrix} \right\| \tag{4.2}$$

$$Q_{14} = \left\| \begin{matrix} + & + & + & - \\ - & + & + & + \\ - & - & + & - \\ + & - & + & + \end{matrix} \right\| \qquad Q_{15} = \left\| \begin{matrix} + & + & + & + \\ - & + & - & + \\ - & + & + & - \\ - & - & + & + \end{matrix} \right\|$$

то из утверждений (4.1) и (4.2) получим, что для конструирования БЦБСМА нужно всего 9 разных типов матриц Адамара (Q_i), причем одни из этих матриц появляются только один раз и то на первом месте в первой блок-строке. Возникает также вопрос следующего типа: пусть одна из этих матриц фиксирована (предположим, что она является первым элементом, т. е. Q_0 в представлении 4.1). Тогда H_{mk} — доопределяется единственным образом или нет?

Теперь приведем метод, позволяющий при заданной $4m$ определить количество каждого типа $Q_i \in \{Q_0, Q_1, \ldots, Q_{16}\} = Q$, необходимого для „собрания" по схеме (4.1) БЦБСМА.

Далее, обозначим через μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 число единиц, находящихся на $j = 1$, 2, 3, 4-ом месте матриц $Q_i \in Q$, соответствующих первой строке БЦБСМА.

Справедлива

Лемма 4.1. Пусть m — любое натуральное число, тогда

$$m(m-1) = \sum_{i=1}^{4} \mu_i (m - \mu_i), \tag{4.3}$$

причем, если m — нечетное число, тогда или μ_i, или $m - \mu_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ — нечетное число.

Замечание 4.2. Представление (4.3) не единственно: например, для $m = 25$

$$\mu_1^1 = 13, \quad \mu_2^1 = \mu_3^1 = 15, \quad \mu_4^1 = 9, \qquad \mu_1^2 = \mu_2^2 = \mu_3^2 = \mu_4^2 = 15.$$

Доказательство. Пусть m — некоторое натуральное число. Рассмотрим два случая:

1. пусть $m \equiv 0 \pmod 2$, тогда согласно теореме Лагранжа [1] существуют натуральные числа m_i, $i = 1, 2, 3, 4$, так что

$$m = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2.$$

Составим соотношение

$$m(m-1) = m^2 - (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2) =$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \left[\left(\frac{m}{2}\right)^2 - m_i^2 \right] = \sum_{i=1}^{4} \left(\frac{m}{2} - m_i\right)\left(\frac{m}{2} - m_i\right).$$

Положим,

$$\mu_i = \frac{m}{2} - m_i; \qquad i = 1, 2, 3, 4,$$

получим

$$m(m-1) = \sum_{i=1}^{4} (m - \mu_i)\,\mu_i.$$

2. пусть $m \equiv 1 \pmod 2$, тогда согласно теореме Лагранжа [1] существуют m_i, $m_i \equiv 1 \pmod 2$, так что

$$m = \left(\frac{m_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{m_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{m_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{m_4}{2}\right)^2.$$

Составим соотношения

$$m(m-1) = \sum_{i=1}^{4} \left(\frac{m - m_i}{2}\right)\left(\frac{m + m_i}{2}\right).$$

Положим,

$$\mu_i = \frac{m - m_i}{2},$$

получим

$$m(m-1) = \sum_{i=1}^{4} \mu_i\,(m - \mu_i), \tag{4.4}$$

откуда или μ_i, или $m - \mu_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ — нечетное число.

Лемма доказана.

Определение. Числа $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ назовем нормальными, представление 4.1 нормальным по отношению Q_i, $i = 0, 1, \ldots, 8$, если они удовлетворяют равенству (4.3) и из соответствующих матриц Q_i можно собрать БЦБСМА.

Замечание 4.3. Нечетность μ_i, $i = 1, 2, 3, 4$ нормальных чисел зависит от знака соответствующего элемента матриц, находящихся на первом месте первой строки БЦБСМА, причем если в j, $j=1, 2, 3$, 4-ом месте знак „$+$", то μ_i — нечетное, а если „минус", то μ_i — четное.

Утверждение 4.3. Пусть в представлении (4.1) фиксирована матрица $F_0 = Q_{15}$ и пусть из каждого F_i, $i=1, 2, \dots, 8$ необходимо для построения блок-строки БЦБСМА x_i, $i=1, 2, \dots, 8$ штук. Тогда числа x_i удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=m-\mu_1 \\ x_1+x_2+x_5+x_6=m-\mu_2 \\ x_1+x_3+x_5+x_7=m-\mu_3 \\ x_2+x_3+x_5+x_8=m-\mu_4 \\ x_1+x_4+x_6+x_7=\mu_4-1 \\ x_2+x_4+x_6+x_8=\mu_3-1 \\ x_3+x_4+x_7+x_8=\mu_2-1 \\ x_5+x_6+x_7+x_8=\mu_1-1 \end{cases} \tag{4.5}$$

Итак, объединяя утверждения 4.1, 4.2, 4.9 и теорему 2.1, мы перейдем к следующей задаче: имеем $m=\sum_{i=0}^{8} x_i$, $x_0=1$ штук 8 Q_i, $i=0, 1, \dots, 8$ матриц, нужно их перенумеровать таким образом, чтобы выполнялись условия (2.8).

Замечание 4.4. Существует пример матрицы Адамара порядка 4.25, (см. табл. 1) у которых в представлении 4.1 матрицы Q_0 совпадают, а остальные Q_i различны, а это означает, что фиксирование диагональных блок-матриц недостаточно для определения единственным образом остальных блоков БЦМА.

Возникает вопрос: найти первые матрицы (может быть, в зависимости от порядка БЦМА), необходимые для восстановления единственным образом БЦМА.

Теперь, используя вышесказанное, приведем БЦБСМА порядка 4.37.

Легко вычислить, что

$$\mu_1=13, \quad \mu_2=17, \quad \mu_3=17, \quad \mu_4=17,$$

$$x_1=8, \quad x_2=8, \quad x_3=8, \quad x_4=x_5=0, \quad x_6=4, \quad x_7=4, \quad x_8=4,$$

откуда

$$\begin{aligned} H_{4\cdot 37} = {} & I\otimes Q_0+U\otimes Q_3+U^2\otimes Q_3+U^3\otimes Q_7+U^4\otimes Q_8+U^5\otimes Q_6+ \\ & +U^6\otimes Q_3+U^7\otimes Q_6+U^8\otimes Q_2+U^9\otimes Q_1+U^{10}\otimes Q_1+U^{11}\otimes Q_2+ \\ & +U^{12}\otimes Q_3+U^{13}\otimes Q_8+U^{14}\otimes Q+U^{15}\otimes Q_2+U^{16}\otimes Q_2+U^{17}\otimes Q_1+ \\ & +U^{18}\otimes Q_7+U^{19}\otimes Q_7+U^{20}\otimes Q_1+U^{21}\otimes Q_2+U^{22}\otimes Q_2+ \end{aligned}$$

$$+U^{23}\otimes Q_1+U^{24}\otimes Q_8+U^{25}\otimes Q_3+U^{26}\otimes Q_2+U^{27}\otimes Q_1+$$
$$+U^{28}\otimes Q_1+U^{29}\otimes Q_2+U^{30}\otimes Q_6+U^{31}\otimes Q_3+U^{32}\otimes Q_6+$$
$$+U^{33}\otimes Q_8+U^{34}\otimes Q_7+U^{35}\otimes Q_3+U^{36}\otimes Q_3. \tag{4.6}$$

Справедливо также

утверждение 4.4. Если существует БЦМА порядка $4m$, то существует блочно-циклическая параметрическая матрица Адамара порядка $4m$.

Доказательство очень просто: заменим в соотношении (4.1) матрицы Q_i, $i = 0, 1, \dots, m-1$ на матрицы $F_i\ (a, b, c, d)$, $i = 0, 2, \dots, m-1$, определенные следующим образом:

$$F_i=F_i(a,\ b,\ c,\ d)=Q_i * A, \qquad i=0,\ 1,\ \dots,\ m-1,$$

где $*$ — произведения Адамара [8].

$$A=\begin{Vmatrix} a & b & c & d\\ b & a & d & c\\ c & d & a & b\\ d & c & b & a\end{Vmatrix}$$

Далее легко проверить, что

$$H_{4m}(a,\ b,\ c,\ d)=I_0\otimes F_0(a,\ b,\ c,\ d)+$$
$$+U\otimes F_1(a,\ b,\ c,\ d)+\dots+U^{m-1}\otimes F_{m-1}(a,\ b,\ c,\ d)$$

является параметрической матрицей Адамара порядка $4m$.

Замечание 4.5. Полученные параметрические матрицы (4.8) порядка $4m$, $m\geqslant 3$ не являются A-матрицами.

§ 5. Построение блочных матриц Адамара

Перейдем теперь к построению блочных матриц Адамара (БМА), БЦМА, БЦБСМА.

Легко заметить, что прямое произведение двух блочных матриц Адамара H_m и H_n, соответственно порядков m и n, есть БМА порядка mn, состоящая из блоков (матриц Адамара) порядка m или n, в зависимости от того, рассматриваются произведения $H_m\otimes H_n$ или произведения $H_n\otimes H_m$, которые сами (блоки) также являются блочными матрицами Адамара.

Отметим, что метод, предложенный в работе [24], позволяет построить блочные матрицы Адамара. Здесь мы не приводим полностью упомянутый метод, а лишь касаемся сути этого метода. Пусть H^1 — блочная матрица Адамара порядка m и пусть H^2-матрица Адамара, полученная из H^1 перестановкой строк четных номеров на нечетные номера, предварительно умножая их на —1, а строки с нечетными номерами на четные номера без умножения их на—1. Далее, при помощи гиперкаркаса $\{X, Y\}$ порядка [24] по формулам

$$H_{n+1}^1 = H_n^1 \otimes X + H_n^2 \otimes Y,$$

$$H_{n+1}^2 = H_n^1 \otimes Y - H_n^2 \otimes X, \quad n = 1, 2, \ldots$$

строится БМА порядка $m \cdot k^n$,

Справедливы

Теорема 5.1. Пусть $A_{pq}^{(l)} = \{a_{pq}^{(l)}\}_{l=1}^{n-1}$ $p, q = 1, 2, \ldots, m$ циркулянт порядка n. Для того, чтобы матрица

$$H_{mn} = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \ldots A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} \ldots A_{2m} \\ \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} \quad A_{mm} \end{Vmatrix} \qquad (5{,}1)$$

представлялась блочно-циклически состоящей из блоков порядка m, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение:

$$H_{mn} = I \otimes Q_0 + U \otimes Q_1 + \ldots + U^{n-1} \otimes Q_{n-1}, \qquad (5.2)$$

где

$$Q_i = \begin{Vmatrix} a_{11}^{(i)} & a_{12}^{(i)} \ldots a_{1m}^{(i)} \\ a_{21}^{(i)} & a_{22}^{(i)} \ldots a_{2m}^{(i)} \\ \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{m1}^{(i)} & a_{m2}^{(i)} \ldots a_{mm}^{(i)} \end{Vmatrix}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \qquad (5.3)$$

Необходимость. Так как матрица $A_{pq} = \{a_{pq}^{(l)}\}_{l=0}^{n-1}$, $p, q = 1, 2, \ldots, m$ циркулянт, следовательно,

$$A_{pq} = a_{pq}^0 I + a_{pq}^1 U + \ldots + a_{pq}^{(n-1)} U^{n-1}. \qquad (5.4)$$

Подставляя (5.4) в (5.1), получим:

$$H_{mn} = \sum_{l=0}^{n-1} \begin{Vmatrix} a_{11}^{(l)} u^l & a_{12}^{(l)} u^l \ldots a_{1m}^{(l)} u^l \\ a_{21}^{(l)} u^l & a_{22}^{(l)} u^l \ldots a_{2m}^{(l)} u^l \\ \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{m1}^{(l)} u^l & a_{m2}^{(l)} u^l \ldots a_{mm}^{(l)} u^l \end{Vmatrix}.$$

Далее, введя обозначения (5.3) и используя свойства прямого произведения двух матриц, получим:

$$H_{mn} = \sum_{l=0}^{n-1} U^l \otimes Q_l,$$

откуда, еще раз используя свойства прямого произведения двух матриц [23], заключаем:

$$H_{mn} = \sum_{l=0}^{n-1} Q_l \otimes U^l .$$

Итак, необходимость доказана.

Достаточность очевидна.

Замечание 5.1. Если $\{A^l_{pq}\}_{l=1}^{n-1}$, $p, q = 0,1, \ldots, m-1$ — циклические симметрические матрицы, то имеет место следующее представление:

$$H^T_{mn} = I \otimes Q^T_0 + \ldots + U^{n-1} \otimes Q^T_{n-1},$$

т. е. H^T_{mn} БЦБСМ порядка mn.

Следствие 5.1. Если существует матрица Адамара типа Вильямсона порядка $4m$, то существует БЦМА порядка $4m$, сконструированная из матриц Адамара, порожденных из массивов Вильямсона, т. е. из матриц Адамара порядка 4.

Следствие 5.2. Существует БЦБСМА порядка $p_0, p_1^{\alpha_1}, \ldots, p_n^{\alpha_n}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_n$, в частности, удвоенные порядки матриц Вильямсона, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ произвольные натуральные числа, а p_0 — порядок некоторой матрицы Адамара.

Следствие 5.3. Если существует матрица Адамара типа Бомер—Холла порядка mn, то существует БЦМА порядка mn, сконструированная из матриц Адамара, порожденных из массива Бомер—Холла.

Следствие 5.4. Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{l}$ — семейство матриц Вильямсона типа $(s_1, s_2, \ldots, s_l, I_m)$ и пусть существует ортогональная схема $O(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ типа $(s_1, s_2, \ldots, s_l)$ порядка m, состоящая из элементов $\pm x_i$, $x_i \neq 0$. Тогда существует БЦМА порядка mn, состоящая из блоков (матриц Адамара) порядка m, порожденных из ортогональной схемы $O(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Используя вышеприведенное, получим интересный факт, связанный с семейством матриц Вильямсона.

Утверждение 5.2. Не существует семейства матриц Вильямсона типа $(1,3, I_3)$.

Доказательство. На самом деле, если бы существовало семейство упомянутого типа, то, согласно следствию (5.4), можно было построить БЦМА порядка 36, имеющую следующий вид:

$$H_{36} = I \otimes Q_0 + U \otimes Q_1 + U^2 \otimes Q_1, \tag{5.8}$$

где Q_0 и Q_1 — матрицы Адамара порядка 12, порожденные из A-матриц (3.4).

Далее, матрицы Q_0 и Q_1 должны удовлетворять условиям теоремы 2.1, которая для нашего случая принимает вид

$$Q_0 Q_1^T + Q_1 Q_0^T + Q_1 Q_1^T = 0. \tag{5.9}$$

Теперь, так как Q_1 — матрица Адамара, то

$$Q_1 Q_1^T = 36 I_{36}.$$

Следовательно, чтобы уравнение (5.9) имело решение, должно иметь решение следующее уравнение:

$$\frac{2}{3} 36 (x_1^0 x_1^1 + x_2^0 x_2^1 + x_3^0 x_3^1) + 36 = 0,$$

так как матрицы Q_0 и Q_1 порождены из A-матрицы $A(x_1, x_2, x_3)$.

Но уравнение (5.10) не имеет решения в целых числах, так как

$$x_1^0 x_1^1 + x_2^0 x_2^1 + x_3^0 x_3^1 = -\frac{3}{2},$$

а

$$|x_1| = |x_2| = |x_3| = 1.$$

Следовательно, ни для каких значений x_1, x_2, x_3 равенство (5.11) не будет выполняться, а это означает, что не имеет решения и уравнение (5.9). Противоречие.

Утверждение 5.2 доказано.

Нам представляется, что не существует также семейство матриц Вильямсона типа $(1, 3, I_m)$, m — натуральное число.

§ 6. Пространственные матрицы Адамара

Перейдем теперь к построению пространственных матриц Адамара (регулярных и нерегулярных), в частности, к конструированию блочных «циклических» пространственных матриц Адамара, а также к решению задачи Шлихта.

Начиная с 1970 г. в связи с применением пространственных матриц Адамара в теории кодирования (так, к примеру, регулярные пространственные матрицы Адамара размерности $m \geqslant 3$ существенно улучшают характеристики координирующих кодов [20]) возрос интерес к исследованию отмеченных матриц.

Интересно, что пространственные матрицы Адамара можно встретить и в природе. Так, типичная модель кристалла каменной соли, приведенная на рис. 1, является пространственной регулярной матрицей Адамара порядка 4, где черные кружки изображают атомы натрия, а белые — атомы хлора.

Определение [20]. Кубические матрицы порядка m, для которых двухмерные составляющие, параллельные координатным осям

(i, j, k), сами являются матрицами Адамара, а именно, для всех значений r параметра k, всех p и q справедливы равенства

$$\sum_i h_{iar} h_{ibr} = \sum_j h_{ajr} h_{bjr} = m\delta_{ab} \quad (6.1)$$

$$\sum_i h_{iqa} h_{iqb} = \sum_k h_{aqk} h_{bqk} = m\delta_{ab} \quad (6.2)$$

$$\sum_j h_{pja} h_{pjb} = \sum_k h_{pak} h_{pbk} = m\delta_{ab}, \quad (6.3)$$

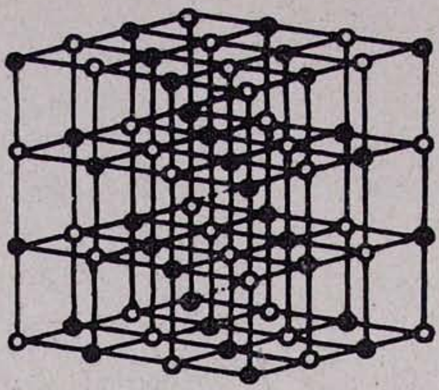


Рис. 1.

называются правильными (регулярными) матрицами Адамара порядка m. В противном случае, а именно, если выполняется хотя бы одно из условий (6.1), (6,2) или (6.3), говорят о нерегулярных (неправильных) матрицах Адамара.

Условия (6.1), (6.2), (6.3) являются частными случаями условий (1.4) и (1.5), (1.6) выполняются всегда, когда имеют место (6.1)—(6.3).

В 1971 г. П. Шлихтом впервые были построены трехмерные и четырехмерные матрицы Адамара [21].

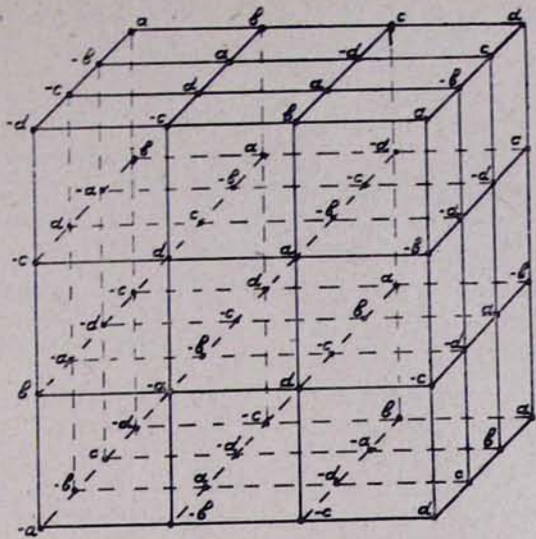
В работе [33] Эндрюсом построены неправильные трехмерные матрицы Адамара, основанные на конструкции прямого произведения трех матриц Адамара одинакового порядка, ориентированных в разных направлениях (i, j, k).

В [20] приведены также пример пространственной матрицы Адамара, не являющейся правильной, алгоритм построения пространственных матриц Адамара порядка 2^n (единственный найденный до сих пор класс правильных матриц Адамара), конструкции многомерных неправильных матриц Адамара определенных порядков.

И, наконец, в работе [34] введено понятие пространственной матрицы Вильямсона, сформулирована теорема об эквивалентности существования плоских и пространственных матриц Вильямсона.

Напомним основную задачу о многомерных матрицах Адамара: для любого натурального числа N построить многомерную матрицу Адамара порядка N. Заметим, что если H_m — правильная пространственная матрица Адамара, то $m \equiv 0 \pmod 4$ (сразу вытекает из определения 5.1), но в общем случае справедливость $m \equiv \pmod 4$ остается открытой.

В настоящем параграфе будет предложено два метода исследования сформулированной выше задачи, причем один из них новый, а второй распространяет известные «плоские» методы на пространственный случай. Чтобы перейти к четкой формулировке рассматриваемой в этом параграфе задачи, введем понятия «плоского» аналога массива Вильямсона пространственного массива Вильямсона, а именно:



$$(6.4)$$

Рис. 2.

или другая запись упомянутого массива [35]

$$\left\| \begin{array}{rrrr|rrrr} -d & -c & b & a & -c & d & a & -b \\ -c & d & a & -b & d & c & -b & -a \\ b & -a & d & -c & -a & -b & -c & -d \\ a & -b & -c & d & -b & a & -d & c \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{rrrr|rrrr} -b & a & -d & c & a & b & c & d \\ -a & -b & -c & -d & -b & a & -d & c \\ -d & -c & b & a & -c & d & a & -b \\ -c & -d & -a & b & -d & -c & b & a \end{array} \right\| \begin{array}{c} \xrightarrow{+} \\ (i) \\ (k) \\ \xrightarrow{} \\ \downarrow (j) \end{array} \qquad (6.5)$$

Задача. Пусть $F_{ijk} = \{F_i, F_j, F_k\}$ $i, j, k = 0, 1, \ldots, n-1$ являются пространственными матрицами Адамара порядка m (в частности матрицы, полученные из ПВ (a, b, c, d) при значении $a, b, c, d \in \{-1, 1\}$). Какие условия нужно положить на матрицу F_{ijk}, чтобы кубическая матрица $H = \{F_{ijk}\}_{ijk=0}^{n-1}$ была пространственной матрицей Адамара порядка mn?

Обозначим через

$$V_0 = \left\| \begin{array}{c|c|c|c} 100\ldots00 & 010\ldots00 & & 000\ldots001 \\ 010\ldots00 & 001\ldots00 & & 100\ldots000 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & 010\ldots000 \\ & & & \cdots\cdots \\ 000\ldots10 & 000\ldots01 & & 000\ldots100 \\ 000\ldots01 & 100\ldots00 & & 000\ldots010 \end{array} \right\| =$$

$$=\| J | U | U^2 | \dots | U^{n-1} \| \qquad (6.6)$$

$$V_1 = \| U | U^2 | \dots | U^{n-1} | J \| \qquad (6.7)$$

$$V_2 = \| U^2 | U^3 | \dots \qquad (6.8)$$

$$V_{n-1} = \| U^{n-1} | U^{n-2} | \dots | U | J \| \qquad (6.9)$$

$$\begin{array}{ll}
P_0 = \text{ПВ}(-1\ -1\ -1\ -1) & P_8 = \text{ПВ}(+1\ -1\ -1\ -1) \\
P_1 = \text{ПВ}(-1\ -1\ +1\ -1) & P_9 = \text{ПВ}(+1\ -1\ -1\ +1) \\
P_2 = \text{ПВ}(-1\ -1\ +1\ -1) & P_{10} = \text{ПВ}(+1\ -1\ +1\ -1) \\
P_3 = \text{ПВ}(-1\ -1\ +1\ +1) & P_{11} = \text{ПВ}(+1\ -1\ +1\ +1) \\
P_4 = \text{ПВ}(-1\ +1\ -1\ -1) & P_{12} = \text{ПВ}(+1\ +1\ -1\ -1) \\
P_5 = \text{ПВ}(-1\ +1\ -1\ +1) & P_{13} = \text{ПВ}(+1\ +1\ -1\ +1) \\
P_6 = \text{ПВ}(-1\ +1\ +1\ -1) & P_{14} = \text{ПВ}(+1\ +1\ +1\ -1) \\
P_7 = \text{ПВ}(-1\ +1\ +1\ +1) & P_{15} \equiv \text{ПВ}(+1\ +1\ +1\ +1)
\end{array} \qquad (6.10)$$

Теперь по аналогии «плоского» случая исследуем более узкую задачу.

Пусть

$$\text{ПН}_{mn} = V_0 \otimes \Pi_0 + V' \otimes \Pi_1 + V^2 \otimes \Pi_2 + \dots + V^{m-1} \otimes \Pi_{m-1}. \qquad (6.11)$$

Какие условия нужно наложить на матрицы Π_0, Π_1, Π_2, ..., Π_{m-1} порядка n, чтобы ПН_m была пространственной матрицей Адамара?

Справедлив аналог утверждения 4.1 (приводится в более простой формулировке).

Утверждение 6.1. Пусть в представлении (6.11) m — нечетное число, а $\Pi_i = \Pi_{m-i}$, $\Pi_i \in \{P_0, P_1, \dots, P_{15}\} = P$, $i = 0, 1, \dots, m-1$. Тогда, если

$$\Pi_0 \in \{P_0, P_3, P_5, P_6, P_9, P_{10}, P_{12}, P_{15}\} = P^1,$$

то

$$\Pi_i \in \{P_1, P_2, P_4, P_7, P_8, P_{11}, P_{13}, P_{14}\} = P^2$$

$$i = 1, 2, \dots, m-1$$

и, наоборот, если $\Pi_0 \in P^2$, то $\Pi_i \in P^1$. $\quad i = 1, 2, \dots, m-1$.

Справедлива также следующая

Теорема 6.1. Если существует БЦБСМА порядка $4m$, то существует правильная пространственная матрица Адамара порядка $4m$. И, наоборот, если существует правильная пространственная матрица порядка $4m$, имеющая представление (6.11), то существует БЦБСМА порядка $4m$.

Доказательство очень просто. Пусть существует БЦБСМА порядка $4m$, тогда справедливо представление 4.19, где

$$Q_i \in \{Q_0, Q_1, \ldots, Q_{15}\}, \qquad i = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Теперь в соотношении (6.11) заменим Π_i на матрицу $P_i \in P$ с соответствующим индексом, что и матрицы Q_i. Далее легко проверить, что полученная кубическая матрица будет пространственной матрицей Адамара порядка $4m$. Легко заметить, что при такой конструкции построение матрицы будет правильным. Обратное доказывается аналогичным образом.

Замечание 6.1. Теорема 6.1 позволяет построить бесконечный класс правильных пространственных матриц Адамара. В конце работы приводится таблица конструкции правильных пространственных матриц Адамара.

Таблица приведена таким образом, что она позволит получить также БЦБСМА.

Перейдем теперь к решению задач Шлихта.

Определение [34]. Трехмерные матрицы

$$A_m = \{A_i, A_j, A_k\}_{ijk=1}^{m} = \{a_{ijk}\}, \ a_{ijk} \in \{-1, +1\} \qquad (6.12)$$

назовем пространственной матрицей Вильямсона, если все ее соответствующие двумерные составляющие, параллельные координатным плоскостям (i, j, k), являются двумерными матрицами Вильямсона, т. е. выполняются следующие условия:

$$\text{а)} \quad \sum_{n=1}^{4} A_p^n (A_p^n)^T = mI_m, \qquad p \in \{i, j, k\}, \qquad (6.13)$$

$$\text{б)} \quad A_p^f (A_p^q)^T = A_p^q (A_p^f)^T. \qquad (6.14)$$

Справедливы:

Лемма 6.1. Если A_m^i, $i = 1, 2, 3, 4$ — двумерные матрицы Вильямсона порядка m, то

$$A_m^i F, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad F \in \{U^k, R, U^k R, \ k = 1, 2, \ldots, m-1\}$$

также являются матрицами Вильямсона.

Доказательство. Проверим условия (6.13), (6.14). С этой целью составим соотношения

$$\sum_{i=1}^{4} (A_i F)(A_i F)^T = \sum_{i=1}^{4} (A_i F)(F^T A_i^T) = mI_m,$$

так как

$$\sum_{i=1}^{4} A_i A_i^T = mI_m,$$

а

$$(A_i F)^T = (A_i F)(F^T A_i^T) = A_i A_i^T.$$

Лемма доказана.

Утверждение 6.2. Для того, чтобы существовали пространственные матрицы Вильямсона порядка n, необходимо и достаточно существование двумерных матриц Вильямсона порядка n.

Необходимость вытекает сразу из определения пространственной матрицы Вильямсона.

Достаточность. Пусть A_i, $i=1, 2, 3, 4$ — матрица Вильямсона. Приведем алгоритм построения пространственной матрицы Вильямсона.

Возьмем в трехмерном пространстве (i, j, k) параллельные сечения и на первом сечении положим матрицу A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ $\overrightarrow{\downarrow(i, k)}$, на втором сечении положим UA_i $\overrightarrow{\downarrow(i, k)}$, и, наконец, на n-ом сечении положим матрицу $U^{n-1} A_i$. Тогда на сечениях параллельных плоскостей (i, j) получим соответственно матрицы

$$A_i R,\ (A_i R) K,\ \ldots,\ (A_i R) K^{n-1},$$

где

$$K = UR,$$

а на сечении (j, k) получим матрицы

$$A_i U A_i,\ \ldots,\ U^{n-1} A_i.$$

Используя лемму 5.1, легко проверить, что полученные матрицы A_i, $i = 1, 2, 3, 4$ образуются пространственной матрицей Вильямсона.

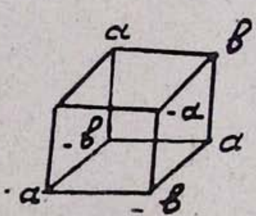
Аналогичным образом доказывается:

Утверждение 6.3. Для того, чтобы существовала пространственная матрица Янга порядка n, необходимо и достаточно существования двумерных матриц Янга [16] порядка n.

Доказательство аналогично доказательству утверждений 6.2.

Теорема 6.2. (Обобщенная теорема Янга).
Если существует матрица Янга порядка $2n$, то массив

ПН (a, b) =



является регулярной пространственной матрицей Адамара порядка $4n$.

Теорема 6.3. (Обобщенная теорема Вильямсона). Если существуют пространственнные матрицы Вильямсона {A, B. C, D} порядка n, то массив ПН (A, B, C, D) (6.4) определяет регулярную пространственную матрицу Адамара порядка $4n$.

§ 7. Верхние и нижние оценки плотности веса и излишка матриц Адамара

В настоящем параграфе вводится понятие плотности веса и излишка матриц Адамара (плоских и пространственных), найдены верхние и нижние оценки введенных величин.

Определение 7.1 [37]. Весом $W(H_n)$ матрицы Адамара H_n порядка n называется число единиц, содержащихся в H_n.

Определение 7.2 [38]. Излишком $\sigma(H_n)$ матрицы Адамара называется сумма всех элементов матрицы H_n.

Обозначим через:

$\Gamma_n^{(i)}$, $i=2, 3$ — совокупность всех матриц Адамара (плоских, пространственных) порядка n.

$[H_n^{(i)}]$, $i=2, 3$ — совокупность всех эквивалентных матриц Адамара порядка n.

$[HB_n^{(i)}]$, $i=2, 3$ — совокупность матриц Адамара типа Вильямсона порядка n.

$W^{(i)}(n)=\max\{W(H_n),\ H_n\in[H_n^{(i)}]\}$, — назовем весом матриц Адамара порядка n.

$$W^{(i)}([H_n])=\max\{W^{(i)}(H_n),\quad H_n\in[H_n^{(i)}]\}.$$

$$W^{(i)}([HB_n])=\max\{W^{(i)}(H_n);\quad H_n\in[HB_n^{(i)}]\},$$

— назовем максимальным излишком матрицы Адамара порядка n.

$$\sigma^{(i)}([H_n])=\max\{\sigma(H_n),\quad H\in H_n\};$$

$$\sigma^{(i)}([HB])=\sigma^{(i)}([HB_n^i])=\max\{\sigma(H_n),\quad H\in[HB_n^i]\}$$

В работе [36] Шмидом был поставлен вопрос о нахождении для данного n значения $W(n)$.

В [37] Шмидом и Янгом доказаны:

1. $W(n)\geqslant\frac{1}{2}(n+4)(n-1)$.

2, $W(n)\geqslant\frac{1}{2}(n+6)(n-2)$, при $n\equiv 4t$, $t>1$ — нечетное число.

3. $W(n)\leqslant\frac{(n-1)n}{2}+\left[\frac{n(2n+1)^{\frac{1}{2}}}{2}\right]$ при $n>1$.

В [38] Бестом доказаны:

4. $\frac{n^2}{2^n}\binom{n}{\frac{1}{2}n}\leqslant\sigma(n)\leqslant n\sqrt{n}$,

5. $\frac{n\sqrt{n}}{2}\leqslant\sigma(n)\leqslant n\sqrt{n}$ для достаточно больших n.

6. $\sigma(n)=n\sqrt{n}$ для регулярных матриц Адамара и только для них, т. е. для матриц Адамара, сумма строк которых постоянна.

В [39] Эмомота и Миямото доказали, что для больших n справедливо

7. $\sigma([H])\geqslant n\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$.

И, наконец, в [40] Гаммером и др. доказаны:

8. $\sigma(n)\geqslant\dfrac{n^2\left(\binom{n}{4n}-2\right)}{2^n-2n}$,

9. $\sigma(2^{2r})=2^{3r}$, $\quad W(2^{2r})=2^{3r-1}(2^r+1)$,

10. $\sigma(2^{2s}\cdot q^2)=2^{2s}q^4$, при $q>3$, $s\geqslant 2\log_2(q-3)$.

Отметим также известные значения $W(n)$ и $\sigma(n)$ для следующих n.

n	$W(n)$	$\sigma(n)$
2	3	2
4	12	8
8	42	20
12	90	36
16	160	64
20	240	80
24	244	112
28	462	140
36	756	216
40	920	240
44	?	?
48	?	?
52	?	364
56	?	392
60	?	?
64	2304	512

Приведем некоторые свойства веса и излишка матриц Адамара:

1. $\sigma^{(i)}(H_1\otimes H_2)=\sigma^{(i)}(H_1)\,\sigma^{(i)}(H_2)$, $\quad i=2,3$,

2. $\sigma^{(2)}(n)\equiv 0\pmod 4$, $\quad n>2$ [37],

3. $\sigma^{(i)}(H_n)=2W^{(i)}(H_n)-n^i$, $i=2,3$ для любой матрицы Адамара,

4. $\sigma^{(i)}(-H_n) = n^i - 2W^{(i)}(-H_n)$,

5. $W^{(2)}(n) \equiv 0 \pmod 2$, $n > 1$,

6. $W^{(i)}(H) = \frac{1}{2} n^{i-1}(n+1)$, $i = 2, 3$, если H — нормализованная матрица Адамара,

7. $W^{(2)}(mn) \geqslant m^2n^2 - n^2 W^{(2)}(m) - m^2 W^{(2)}(n) + 2W^{(2)}(m) W^{(2)}(n)$ [37],

8. $W^{(2)}(n^2) \geqslant [n^2 - W^{(2)}(n)]^2 + [W^{(2)}(n)]^2$,

9. $W^{(i)}(-H_n) = n^i - W^{(i)}(H_n)$, $i = 2, 3$.

10. Если

$$H = Q_0 \otimes I + Q_1 \otimes U + \ldots + Q_{n-1} \otimes U^{n-1},$$

то

$$\sigma^{(2)}(H) = n[\sigma^{(2)}(Q_0) + \ldots + \sigma^{(2)}(Q_{n-1})],$$

а

$$W^{(2)}(H) = n[W^{(2)}(Q_0) + \ldots + W^{(2)}(Q_{n-1})].$$

На самом деле,

$$\sigma^{(2)}(H) = \sigma^{(2)}\left(\sum_{k=0}^{n-1} Q_k \otimes U^k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma^{(2)}(Q_k \otimes U^k) = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma^{(2)}(Q_k)\, \sigma^{(2)}(U^k),$$

где

$$U^0 = I,$$

далее, так как

$$\sigma^{(2)}(I) = \sigma^{(2)}(U) = \ldots = \sigma^{(2)}(U^{n-1}) = n,$$

получим

$$\sigma^{(2)}(H) = n \sum_{k=0}^{n-1} \sigma^{(2)}(Q_k).$$

Аналогичным образом получим справедливость представления для $W^{(2)}(H)$.

11. Если пространственная матрица Адамара имеет вид:

$$H = P_0 \otimes V_0 + P_1 \otimes V_1 + \ldots + P_{n-1} \otimes V^{n-1},$$

то

$$\sigma^{(3)}(H) = n^2 \sum_{k=0}^{n-1} \sigma^{(3)}(P_k),$$

$$W^{(3)}(H) = n^2 \sum_{k=0}^{n-1} W^{(3)}(P_k).$$

Доказательство аналогично доказательству свойства 10.

12. Приведем таблицу значений $W^{(i)}(H)$ и $\sigma^{(i)}(H)$ $i = 2, 3$, $H \in [HB_4^{(i)}]$. Заметим, что $[HB_4^i]$ содержит при $i = 2$ матрицы $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{15}$, а при $i = 3$ — матрицы $\Pi_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_{15}$.

j	$W^{(2)}(Q_j)$	$\sigma^{(2)}(Q_j)$	$W^{(3)}(P_j)$	$\sigma^{(3)}(P_j)$
0	6	−4	32	0
1	6	−4	32	0
2	6	−4	32	0
3	6	−4	28	− 8
4	6	−4	32	0
5	6	−4	24	−16
6	6	−4	28	− 8
7	6	−4	24	−16
8	10	4	40	16
9	10	4	36	8
10	10	4	36	8
11	10	4	32	0
12	10	4	36	8
13	10	4	32	0
14	10	4	32	0
15	10	4	28	− 8

13. $\sigma^{(2)}([HB_{4t}]) \equiv 0 \pmod{4t}$,

$\sigma^{(3)}([HB_{4t}]) \equiv 0 \pmod{4t^2}$,

Доказательство свойства 13 сразу вытекает из свойств 10, 11, 12.

14. $-4t^2 \leqslant \sigma^{(2)}([HB_{4t}]) \leqslant 4t^2$.

$-16t^3 \leqslant \sigma^{(3)}([HB_{4t}]) \leqslant 16t^3$.

15. $6t^2 \leqslant W^{(2)}([HB_{4t}]) \leqslant 10t^2$,

$24t^3 \leqslant W^{(3)}([HB_{4t}]) \leqslant 40t^3$.

Свойства 15 доказываются сразу, используя свойства 10, 11 и 12.

16. $\frac{n}{2}(n+4)(n-1) \leqslant W^{(3)}(n) \leqslant \frac{n^2(n-1)}{2} + n\left[\frac{n(2n+1)^{\frac{1}{2}}}{2}\right]$

$$n^3 2^{-n}\binom{n}{\frac{1}{2}n} \leqslant \sigma_p^{(3)}(n) \leqslant n^2\sqrt{n},$$

где p означает, что рассматриваются только пространственные регулярные матрицы Адамара.

Доказательство свойства 16 вытекает из определения регулярных матриц Адамара, теоремы 1.3 работы [38] и из леммы работы [37].

Определение 7.3 [22]. Плотностью веса (максимального) $PW^{(i)}(H_n)$ матрицы Адамара H_n (при $i=2$ плоской, при $i=3$ пространственной) порядка n называется выражение

$$PW^{(i)}(H_n)=\frac{W^{(i)}(H_n)}{n^i}\left(PW^{(i)}(n)=\frac{W^{(i)}(n)}{n^i}\right).$$

Определение 7.4 [22]. Плотностью $P\sigma^{(i)}(H_n)$ $i=2,3$ (максимального $P\sigma^{(i)}(n)$) матрицы Адамара H_n порядка n называется выражение

$$\sigma P^{(i)}(H_n)=\frac{\sigma^{(i)}(H_n)}{n^i}\quad\left(P\sigma^{(i)}(n)=\frac{\sigma^{(i)}(n)}{n^i}\right).$$

Замечание: Между плотностью веса и излишком матриц Адамара справедливо соотношение

$$PW^{(i)}(H_n)=\frac{1}{2}\{1+P\sigma^{(i)}(H_n)\}.$$

Утверждение 7.1. Пусть H_n — нормализованная (плоская) матрица Адамара порядка n, тогда

$$PW^{(2)}(H)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

$$P\sigma^{(2)}(H)=\frac{1}{n}.$$

Утверждение 7.2. Справедливо неравенство

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\leqslant PW^{(i)}([HB_n])\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{8},\qquad i=2,\ 3,$$

$$-\frac{1}{4}\leqslant\sigma W^{(i)}([HB_n])\leqslant\frac{1}{4},\qquad i=2,\ 3.$$

Доказательство вытекает из свойств 14 и 15.

Утверждение 7.3. Справедливо равенство

1. $\lim\limits_{n\to\infty}PW^{(i)}(n)=\frac{1}{2},\qquad i=2,\ 3,$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}P\sigma^{(i)}(n)=0.$

Доказательство вытекает из свойств 6 и 16 и из пункта 5.

В заключение приводим несколько нерешенных задач:

1. Для любых чисел m и n построить блочную матрицу Адамара порядка $4mn$, состоящую из матриц (блоков) Адамара порядка $4m$.

2. Сколько неэквивалентных блочных матриц Адамара можно собрать из одних и тех же матриц Адамара?

3. Пусть H_1 и H_2 — матрицы Адамара соответственно порядков $4m$ и $4n$. Найти алгоритм, по которому из H_1 и H_2 можно получить матрицу Адамара порядка $4mn$ и $8mn$.

4. Доказать, что для любого $4n$ существует матрица Адамара порядка $4n$, удовлетворяющая условиям:

$$PW(H_n)=\frac{1}{2}, \qquad P\sigma(H_n)=0,$$

или привести контрпример.

Определение. Матрицу Адамара H порядка $4m$ назовем (m, k_1, k_2, k_3, k_4) регулярной, если существуют в матрице m строк, в которых сумма каждой строки равна k_1, m строк, сумма каждой строки равна k_2; m строк, сумма каждой строки равна k_3, m строк, сумма каждой строки равна k_4.

5. Пусть $H(m, k_1, k_2, k_3, k_4)$ — регулярная матрица Адамара. Доказать, что

$$4m=\sum_{i=1}^{4}(n-2k_i)^2.$$

6. Получить аналогичные к утверждениям 4.1 и 4.2 утверждения для четных чисел m и для ортогональных схем типа (p, p), (p, p, p, p, p, p, p, p).

Рассмотреть аналогичные задачи для пространственного случая.

Приведем также задачи Беста и Дж. Гаммера, Р. Левистона и Дж. Валлиса на языке плотности веса и плотности излишка.

7. [38] (Беста). Доказать, что

$$PW(n)=\frac{1}{2}[1+P\sigma(n)]=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(1+\frac{4(2\sqrt{n})}{n}\right), & n\equiv 0 \pmod 8\\ \frac{1}{2}\left(1+\frac{[\sqrt{n}]}{n}\right), & n\equiv 4 \pmod 8,\end{cases}$$

или

$$P\sigma(n)=\begin{cases}\frac{4[2\sqrt{n}]}{n}, & n\equiv 0 \pmod 8\\ \frac{[\sqrt{n}]}{n}, & n\equiv 4 \pmod 8).\end{cases}$$

8. [40] (Дж. Гаммера, Р. Левистона, Дж. Валлиса). Доказать, что

$$P\sigma(n)=\frac{1}{n}\max\{2x_1,\ x_1+x_2+x_3+x_4\},$$

где

$$n=4(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2) \quad \text{и} \quad x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant x_4$$

$\frac{n}{4}$ — нечетное число.

ТАБЛИЦЫ БЛОЧНО-ЦИКЛИЧЕСКИХ, БЛОЧНО-СИММЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЦ АДАМАРА (ПЛОСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ) ПОРЯДКА $4n$

При $n = 3$

15	1	1*
14	0	0
13	3	3
12	2	2
11	5	5
10	4	4
9	7	7
8	6	6
7	9	9
6	8	8
5	11	11
4	10	10
3	13	13
2	12	12
1	15	15
0	14	14

$n = 5$

15	2	1	1	2
14	3	0	0	3
13	0	3	3	0
12	1	2	2	1
11	6	5	5	6
10	7	4	4	7
9	4	7	7	4
8	5	6	6	5
7	10	9	9	10
6	11	8	8	11
5	8	11	11	8
4	9	10	10	9
3	14	13	13	14
2	15	12	12	15
1	12	15	15	12
0	13	14	14	13

* $H_{12} = Q_{15} \otimes I + Q_1 \otimes U + Q_1 \otimes U^2,$

где индексы (15, 1, 1) соответствуют числам, написанным в таблице.

$$H_{12} = \Pi_{15} \otimes V^0 + \Pi_1 \otimes V^1 + \Pi_1 \otimes V^2$$

$n = 7$

15	4	2	1	1	2	4
14	5	3	0		3	5
13	6	0	3	3	0	6
12	7	1	2	2	1	7
11	0	6	5	5	6	0
10	1	7	4	4	7	1
9	2	4	7	7	4	2
8	3	5	6	6	5	3
7	12	10	9	9	10	12
6	13	11	8	8	11	13
5	14	8	11	11	8	14
4	15	9	10	10	9	15
3	8	14	13	13	14	8
2	9	15	12	12	15	9
1	10	12	15	15	12	10
0	11	13	14	14	13	11

$n = 9$

15	8	4	2	1	1	2	4	8
14	9	5	3	0	0	3	5	9
13	10	6	0	3	3	0	6	10
12	11	7	1	2	2	1	7	11
11	12	0	6	5	5	6	0	12
10	13	1	7	4	4	7	1	13
9	14	2	4	7	7	4	2	14
8	15	3	5	6	6	5	3	15
7	0	12	10	9	9	10	12	0
6	1	13	11	8	8	11	13	1
5	2	14	8	11	11	8	14	2
4	3	15	9	10	10	9	15	3
3	4	8	14	13	13	14	8	4
2	5	9	15	12	12	15	9	5
1	6	10	12	15	15	12	10	6
0	7	11	13	14	14	13	11	7

$n = 11$

15	7	8	14	4	2	2	4	14	8	7
14	6	9	15	5	3	3	5	15	9	6
13	5	10	12	6	0	0	6	12	10	5
12	4	11	13	7	1	1	7	13	11	4
11	3	12	10	0	6	6	0	10	12	3
10	2	13	11	1	7	7	1	11	13	2
9	1	14	8	2	4	4	2	8	14	1
8	0	15	9	3	5	5	3	9	15	0
7	15	0	6	12	10	10	12	6	0	15
6	14	1	7	13	11	11	13	7	1	14
5	13	2	4	14	8	8	14	4	2	13
4	12	3	5	15	9	9	15	5	3	12
3	11	4	2	8	14	14	8	2	4	11
2	10	5	3	9	15	15	9	3	5	10
1	9	6	0	10	12	12	10	0	6	9
0	8	7	1	11	13	13	11	1	7	8

$n = 13$

15	13	1	1	2	13	2	2	13	2	1	1	13
14	12	0	0	3	12	3	3	12	3	0	0	12
13	15	3	3	0	15	0	0	15	0	3	3	15
12	14	2	2	1	14	1	1	14	1	2	2	14
11	9	5	5	6	9	6	6	9	6	5	5	9
10	8	4	4	7	8	7	7	8	7	4	4	8
9	11	7	7	4	11	4	4	11	4	7	7	11
8	10	6	6	5	10	5	5	10	5	6	6	10
7	5	9	9	10	5	10	10	5	10	9	9	5
6	4	8	8	11	4	11	11	4	11	8	8	4
5	7	11	11	8	7	8	8	7	8	11	11	7
4	6	10	10	9	6	9	9	6	9	10	10	6
3	1	13	13	14	1	14	14	1	14	13	13	1
2	0	12	12	15	0	15	15	0	15	12	12	0
1	3	15	15	12	3	12	12	3	12	15	15	3
0	2	14	14	13	2	13	13	2	14	14	24	2

$n = 15$

15	14	1	14	14	4	13	1	1	13	4	14	14	1	14
14	15	0	15	15	5	12	0	0	12	5	15	15	0	15
13	12	3	12	12	6	15	3	3	15	6	12	12	3	12
12	13	2	13	13	7	14	2	2	14	7	13	13	2	13
11	10	5	10	10	0	9	5	5	9	0	10	10	5	10
10	11	4	11	11	1	8	4	4	8	1	11	11	4	11
9	8	7	8	8	2	11	7	7	11	2	8	8	7	8
8	9	6	9	9	3	10	6	6	10	3	9	9	6	9
7	6	9	6	6	12	5	9	9	5	12	6	6	9	6
6	7	8	8	7	13	4	8	8	4	13	7	7	8	7
5	4	11	4	4	14	7	11	11	7	14	4	4	11	4
4	5	10	5	5	15	6	10	10	6	15	5	5	10	5
3	2	13	2	2	8	1	13	13	1	8	2	2	13	2
2	3	12	3	3	9	0	12	12	0	9	3	3	12	3
1	0	15	0	0	10	3	15	15	3	10	0	0	15	0
0	1	14	1	1	11	2	14	14	2	11	1	1	14	1

$n = 17$

15	2	1	2	4	4	11	13	1	1	13	11	4	4	2	1	2
14	3	0	3	5	5	10	12	0	0	12	10	5	5	3	0	3
13	0	3	0	6	6	9	15	3	3	15	9	6	6	0	3	0
12	1	2	1	7	7	8	14	2	2	14	8	7	7	1	2	1
11	6	5	6	0	0	15	9	5	5	9	15	0	0	6	5	6
10	7	4	7	1	1	14	8	4	4	8	14	1	1	7	4	7
9	4	7	4	2	2	13	11	7	7	11	13	2	2	4	7	4
8	5	6	5	3	3	12	10	6	6	10	12	3	3	5	6	5
7	10	9	10	12	12	3	5	9	9	5	3	12	12	10	9	10
6	11	8	11	13	13	2	4	8	8	4	2	13	13	11	8	11
5	8	11	8	14	14	1	7	11	11	7	1	14	14	8	11	8
4	9	10	9	15	15	0	6	10	10	6	0	15	15	9	10	9
3	14	13	14	8	8	7	11	13	13	11	7	8	8	14	13	14
2	15	12	15	9	9	6	0	12	12	0	6	9	9	15	12	15
1	12	15	12	10	10	5	3	15	15	3	5	10	10	12	15	12
0	13	14	13	11	11	4	2	14	14	2	4	11	11	13	14	13

$n = 17$

15	13	4	8	7	14	11	11	14	7	8	4	13
14	12	5	9	6	15	10	10	15	6	9	5	12
13	15	6	10	5	12	9	9	12	5	10	6	15
12	14	7	11	4	13	8	8	13	4	11	7	14
11	9	0	12	3	10	10	15	10	3	12	0	9
10	8	1	13	2	11	14	14	11	2	13	1	8
9	11	2	14	1	8	13	13	8	1	14	2	11
8	10	3	15	0	9	12	12	9	0	15	3	10
7	5	12	0	15	6	3	3	6	15	0	12	5
6	4	13	1	14	7	2	2	7	14	1	13	4
5	7	14	2	13	4	1	1	4	13	2	14	4
4	6	15	3	12	5	0	0	5	12	3	15	6
3	1	8	4	11	2	7	7	2	11	4	8	1
2	0	9	5	10	3	6	6	3	10	5	9	0
1	3	10	6	9	0	5	5	0	9	6	10	3
0	2	11	7	8	1	4	4	1	8	7	11	2

$n = 19$

$\overline{15}$	13	14	2	1	1	14	1	13	1	1	13	1	14	1	1	2	14	13
14	12	15	3	0	0	15	0	12	0	0	12	0	15	0	0	3	15	12
13	15	12	0	3	3	12	3	15	3	3	15	3	12	3	3	0	12	15
12	14	13	1	2	2	13	2	14	2	2	14	2	13	2	2	1	13	14
11	9	10	6	5	5	10	5	9	5	5	9	5	10	5	5	6	10	9
10	8	11	7	4	4	11	4	8	4	4	8	4	11	4	4	7	11	8
9	11	8	4	7	7	8	7	11	7	7	11	7	8	7	7	4	8	11
8	10	9	5	6	6	9	6	10	6	6	10	6	9	6	6	5	9	10
7	5	6	10	9	9	6	9	5	9	9	5	9	6	9	9	10	6	5
6	4	7	11	8	8	7	8	4	8	8	4	8	7	8	8	11	7	4
5	7	4	8	11	11	4	11	7	11	11	7	11	4	11	11	8	4	7
4	6	5	9	10	10	5	10	6	10	10	6	10	5	10	10	9	5	6
3	1	2	14	13	13	2	13	1	13	13	1	13	2	13	13	14	2	1
2	0	3	15	12	12	3	12	0	12	12	0	12	3	12	12	15	3	0
1	3	0	12	15	15	0	15	3	15	15	3	15	0	15	15	12	0	3
0	2	1	13	14	14	1	14	2	14	14	2	14	1	14	14	13	1	2

$n = 21$

15	1	11	1	4	8	13	13	2	7	4	4	7	2	13	13	8	4	1	11	1
14	0	10	0	5	9	12	12	3	6	5	5	6	3	12	12	9	5	0	10	0
13	3	9	3	6	10	15	15	0	5	6	6	5	0	15	15	10	6	3	9	3
12	2	8	2	7	11	14	14	1	4	7	7	4	1	14	14	11	7	2	8	2
11	5	15	5	0	12	9	9	6	3	0	0	3	6	9	9	12	0	5	15	5
10	4	14	4	1	13	8	8	7	2	1	1	2	7	8	8	13	1	4	14	4
9	7	13	7	2	14	11	11	4	1	2	2	1	4	11	11	14	2	7	13	7
8	6	12	6	3	15	10	10	5	0	3	3	0	5	10	10	15	3	6	12	6
7	9	3	9	12	0	5	5	10	15	12	12	15	10	5	5	0	12	9	3	9
6	8	2	8	13	1	4	4	11	14	13	13	14	11	4	4	1	13	8	2	8
5	11	1	11	14	2	7	7	8	13	14	14	13	8	7	7	2	14	11	1	11
4	10	0	10	15	3	6	6	9	12	15	15	12	9	6	6	3	15	10	0	10
3	13	7	13	8	4	1	1	14	11	8	8	11	14	1	1	4	8	13	7	13
2	12	6	12	9	5	0	0	15	10	9	9	10	15	0	0	5	9	12	6	12
1	15	5	15	10	6	3	3	12	9	10	10	9	12	3	3	6	10	15	5	15
0	14	4	14	11	7	2	2	13	8	11	11	8	13	2	2	7	11	14	4	14

15	1	11	1	4	13	8	13	7	2	4	4	2	7	13	8	13	4	1	11	1
14	0	10	0	5	12	9	12	6	3	5	5	3	6	12	9	12	5	0	10	0
13	3	9	3	6	15	10	15	5	0	6	6	0	5	15	10	15	6	3	9	3
12	2	8	2	7	14	11	14	4	1	7	7	1	4	14	11	14	7	2	8	2
11	5	15	5	0	9	12	9	3	6	0	0	6	3	9	12	9	0	5	15	5
10	4	14	4	1	8	13	8	2	7	1	1	7	2	8	13	8	1	4	14	4
9	7	13	7	2	11	14	11	1	4	2	2	4	1	11	14	11	2	7	13	7
8	6	12	6	3	10	15	10	0	5	3	3	5	0	10	15	10	3	6	12	6
7	9	3	9	12	5	0	5	15	10	12	12	10	15	5	0	5	12	9	3	9
6	8	2	8	13	4	1	4	14	11	13	13	11	14	4	1	4	13	8	2	8
5	11	1	11	14	7	2	7	13	8	14	14	8	13	7	2	7	14	11	1	11
4	10	0	10	15	6	3	6	12	9	15	15	9	12	6	3	6	15	10	0	10
3	13	7	13	8	1	4	1	11	14	8	8	14	11	1	4	1	8	13	7	13
2	12	6	12	9	0	5	0	10	15	9	9	15	10	0	5	0	9	12	6	12
1	15	5	15	10	3	6	3	9	12	10	10	12	9	3	6	3	10	15	5	15
0	14	4	14	11	2	7	2	8	13	11	11	13	8	2	7	2	11	14	4	14

$n = 23$

15	13	14	2	8	11	1	4	8	7	2	7	7	2	7	8	4	14	11	8	2	14	13
14	12	15	3	9	10	15	5	9	6	3	6	6	3	6	9	5	15	10	9	3	15	12
13	15	12	0	10	9	12	6	10	5	0	5	5	0	5	10	6	12	9	10	0	12	15
12	14	13	1	11	8	13	7	11	4	1	4	4	1	4	11	7	13	8	11	1	13	14
11	9	10	6	12	15	10	0	12	3	6	3	3	6	3	12	0	10	15	12	6	10	9
10	8	11	7	13	14	11	1	13	2	7	2	2	7	2	13	1	11	14	13	7	11	8
9	11	8	4	14	13	8	2	14	1	4	1	1	4	1	14	2	8	13	14	4	8	11
8	10	9	5	15	12	9	3	15	0	5	0	0	5	0	15	3	9	12	15	5	9	10
7	5	6	10	0	3	6	12	0	15	10	15	15	10	15	15	0	12	6	3	0	10	6
6	4	7	11	1	2	7	12	1	14	11	14	14	11	14	1	13	7	2	1	11	7	4
5	7	4	8	2	1	4	14	2	13	8	13	8	13	2	14	4	1	2	1	8	4	7
4	6	5	9	3	5	15	3	12	12	9	12	12	9	12	3	3	3	2	0	9	5	4
3	1	2	14	4	7	8	4	11	11	14	11	11	11	14	4	4	4	8	7	14	2	1
2	0	3	15	5	6	9	5	10	10	15	10	10	10	15	5	5	5	9	6	15	3	0
1	3	0	12	6	5	10	6	9	9	12	9	9	12	9	6	6	10	0	5	12	0	3
0	2	1	13	7	4	11	7	8	8	13	8	8	13	8	7	7	10	1	4	13	1	2

$n = 25$

15	4	1	7	11	1	14	8	13	2	2	2	1	1	2	2	2	13	8	14	1	11	7	1	4
14	5	0	6	10	0	15	9	12	3	3	3	0	0	3	3	3	12	9	15	0	10	6	0	5
13	6	3	5	9	3	12	10	15	0	0	0	3	3	0	0	0	15	10	12	3	9	5	3	6
12	7	2	4	8	2	13	11	14	1	1	1	2	2	1	1	1	14	11	13	2	8	4	2	7
11	0	5	3	15	5	10	12	9	6	6	6	5	5	6	6	6	9	12	10	5	15	3	5	0
10	1	4	2	14	4	11	13	8	7	7	7	4	4	7	7	7	8	13	11	4	14	2	4	1
9	2	7	1	13	7	8	14	11	4	4	4	7	7	4	4	4	11	14	8	7	13	1	7	2
8	3	6	0	12	6	9	15	10	5	5	5	6	6	5	5	5	10	15	9	6	12	0	6	3
7	12	9	15	3	9	6	0	5	10	10	10	9	9	10	10	10	5	0	6	9	3	15	9	12
6	13	8	14	2	8	7	1	4	11	11	11	8	8	11	11	11	4	1	7	8	2	14	8	13
5	14	11	13	1	11	4	2	7	8	8	8	11	11	8	8	7	2	4	11	13	11	14	14	14
4	15	10	12	0	10	5	3	6	9	9	9	10	10	9	9	6	3	5	10	12	0	12	10	15
3	8	13	11	7	13	2	4	1	14	14	14	13	13	14	14	14	1	4	2	13	7	11	13	8
2	9	12	10	6	12	3	5	0	15	15	15	12	12	15	15	15	0	5	3	12	6	10	12	9
1	10	15	9	5	15	0	6	3	12	12	12	15	15	12	12	12	3	6	0	15	5	9	15	10
0	11	14	8	4	14	1	7	2	13	13	13	14	14	13	13	13	2	7	1	14	4	8	14	1
																								1

15	4	14	11	13	14	7	2	1	2	14	8	4	4	8	14	2	1	2	7	14	13	11	14	4
14	5	15	10	12	15	6	3	0	3	15	9	5	5	9	15	3	0	3	6	15	12	10	15	5
13	6	12	9	15	12	5	0	3	0	12	10	6	6	10	12	0	3	0	5	12	15	9	12	6
12	7	13	8	14	13	4	1	2	1	13	11	7	7	11	13	1	2	1	4	13	14	8	13	7
11	0	10	15	9	10	3	6	5	6	10	12	0	0	12	10	6	5	6	3	10	9	15	10	0
10	1	11	14	8	11	2	7	4	7	11	13	1	1	13	11	7	4	7	2	11	8	14	11	1
9	2	8	13	11	8	1	4	7	4	8	14	2	2	14	8	4	7	4	1	8	11	13	8	2
8	3	9	12	10	9	0	5	6	5	9	15	3	3	15	9	5	6	5	0	9	10	12	9	3
7	12	6	3	5	6	15	10	9	10	6	0	12	12	0	6	10	9	10	15	6	5	3	6	12
6	13	7	2	4	7	14	11	8	11	7	1	13	13	1	7	11	8	11	14	7	4	2	7	13
5	14	4	1	7	4	13	8	11	8	4	2	14	14	2	4	8	11	8	13	4	7	1	4	14
4	15	5	0	6	5	12	9	10	9	5	3	15	15	3	5	9	10	9	12	5	6	0	5	15
3	8	2	7	1	2	11	14	13	14	2	4	8	8	4	2	13	14	11	2	5	1	7	2	8
2	10	0	5	3	0	9	12	15	12	0	6	10	10	6	0	12	15	12	9	0	3	5	0	10
1	9	3	6	0	3	10	15	12	15	3	5	9	9	5	3	15	12	15	10	3	0	6	3	9
0	11	1	4	2	1	8	13	14	13	1	7	11	11	7	1	13	14	13	8	1	2	4	1	11

$n = 27$

15	1	1	2	13	13	14	13	14	2	14	1	13	14	14	13	1	14	2	14	13	14	13	13	2	1	1
14	0	0	3	12	12	15	12	15	3	15	0	12	15	15	12	0	15	3	15	12	15	12	12	3	0	[illegible]
13	3	3	0	15	15	12	15	12	0	12	3	15	12	12	15	3	12	0	12	15	12	15	15	0	3	3
12	2	2	1	14	14	13	14	13	1	13	2	14	13	13	14	2	13	1	13	14	13	14	14	1	2	2
11	5	5	6	9	9	10	9	10	6	10	5	9	10	10	9	5	10	6	10	9	10	9	9	6	5	5
10	4	4	7	8	8	11	8	11	7	11	4	8	11	11	8	4	11	7	11	8	11	8	8	7	4	4
9	7	7	4	11	11	8	11	8	4	8	7	11	8	8	11	7	8	4	8	11	8	11	11	4	7	7
8	6	6	5	10	10	9	10	9	5	9	6	10	9	9	10	6	9	5	9	10	9	10	10	5	6	6
7	9	9	10	5	5	6	5	6	10	6	9	5	6	6	5	9	6	10	6	5	6	5	5	10	9	9
6	8	8	11	4	4	7	4	7	11	7	8	4	7	7	4	8	7	11	7	4	7	4	4	11	8	8
5	11	11	8	7	7	4	7	4	8	4	11	7	4	4	7	11	4	8	4	7	4	7	7	8	11	11
4	10	10	9	6	6	5	6	5	9	5	10	6	5	5	6	10	5	9	5	6	5	6	6	9	10	10
3	13	13	14	1	1	2	1	2	14	2	13	1	2	2	1	13	2	14	2	1	2	1	1	14	13	13
2	12	12	15	0	0	3	0	3	15	3	12	0	3	3	0	12	3	15	3	0	3	0	0	15	12	12
1	15	15	12	3	3	0	3	0	12	0	15	3	0	0	3	15	0	12	0	3	0	3	3	12	15	15
0	14	14	13	2	2	1	2	1	13	1	14	2	1	1	2	14	1	13	1	2	1	2	2	13	14	14

$n = 29$

15	13	7	4	8	4	7	11	4	8	11	8	7	14	14	14	14	7	8	11	8	4	11	7	4	8	4	7	13
14	12	6	5	9	5	6	10	5	9	10	9	6	15	15	15	15	6	9	10	9	5	10	6	5	9	5	6	12
13	15	5	6	10	6	5	9	6	10	9	10	5	12	12	12	12	5	10	9	10	6	9	5	6	10	6	5	15
12	14	4	7	11	7	4	8	7	11	8	11	4	13	13	13	13	4	11	8	11	7	8	4	7	11	7	4	14
11	9	3	0	12	0	3	15	0	12	15	12	3	10	10	10	10	3	12	15	12	0	15	3	0	12	0	3	9
10	8	2	1	13	1	2	14	1	13	14	13	2	11	11	11	11	2	13	14	13	1	14	2	1	13	1	2	8
9	11	1	2	14	2	1	13	2	14	13	14	1	8	8	8	8	1	14	13	14	2	13	1	2	14	2	1	11
8	10	0	3	15	3	0	12	3	15	12	15	0	9	9	9	9	0	15	12	15	3	12	0	3	15	3	0	10
7	5	15	12	0	12	15	3	12	0	3	0	15	6	6	6	6	15	0	3	0	12	3	15	12	0	12	15	5
6	4	14	13	1	13	14	2	13	1	2	1	14	7	7	7	7	14	1	2	1	13	2	14	13	1	13	14	4
5	7	13	14	2	14	13	1	14	2	1	2	13	4	4	4	4	13	2	1	2	14	1	13	14	2	14	13	7
4	6	12	15	3	15	12	0	15	3	0	3	12	5	5	5	5	12	3	0	3	15	0	12	15	3	15	12	6
3	1	11	8	4	8	11	7	8	4	7	4	11	2	2	2	2	11	4	7	4	8	7	11	8	4	8	11	1
2	0	10	9	5	9	10	6	9	5	6	5	10	3	3	3	3	10	5	6	5	9	6	10	9	5	9	10	0
1	3	9	10	6	10	9	5	10	6	5	6	9	0	0	0	0	9	6	5	6	10	5	9	10	6	10	9	3
0	2	8	11	7	11	8	4	11	7	4	7	8	1	1	1	1	8	7	4	7	11	4	8	11	7	11	8	2

$n = 37$

15	4	4	13	14	11	4	11	2	1	1	2	4	14	1	2	2	1	13	13	1	2	2	1	14	4	2	1	1	2	11	4	11	14	13	4	4
14	5	5	12	15	10	5	10	3	0	0	3	5	15	0	3	3	0	12	12	0	3	3	0	15	5	3	0	0	3	10	5	10	15	12	5	5
13	6	6	15	12	9	6	9	0	3	3	0	6	12	3	0	0	3	15	15	3	0	0	3	12	6	0	3	3	0	9	6	9	12	15	6	6
12	7	7	14	13	8	7	8	1	2	2	1	7	13	2	1	1	2	14	14	2	1	1	2	13	7	1	2	2	1	8	7	8	13	14	7	7
11	0	0	9	10	15	0	15	6	5	5	6	0	10	5	6	6	5	9	9	5	6	6	5	10	0	6	5	5	6	15	0	15	10	9	0	0
10	1	1	8	11	14	1	14	7	4	4	7	1	11	4	7	7	4	8	8	4	7	7	4	11	1	7	4	4	7	14	1	14	11	8	1	1
9	2	2	11	8	13	2	13	4	7	7	4	2	8	7	4	4	7	11	11	7	4	4	7	8	2	4	7	4	13	2	13	8	11	2	2	
8	3	3	10	9	12	3	12	5	6	6	5	3	9	6	5	5	6	10	10	6	5	5	6	9	3	5	6	6	5	12	3	12	9	10	3	3
7	12	12	5	6	3	12	3	10	9	9	10	12	6	9	10	10	9	5	5	9	10	10	9	6	12	10	9	9	10	3	12	3	6	5	12	12
6	13	13	4	7	2	13	2	11	8	8	11	13	7	8	11	11	8	4	4	8	11	11	8	7	13	11	8	8	11	2	13	2	7	4	13	13
5	14	14	7	4	1	14	1	8	11	11	8	14	4	11	8	8	11	7	7	11	8	8	11	4	14	8	11	11	8	1	14	1	4	7	14	14
4	15	15	6	5	0	15	0	9	10	10	9	15	5	10	9	9	10	6	6	10	9	9	10	5	15	9	10	10	9	0	15	0	5	6	15	15
3	8	8	1	2	7	8	7	14	13	13	14	8	2	13	14	14	13	1	1	13	14	14	13	2	8	14	13	13	14	7	8	7	2	1	8	8
2	9	9	0	3	6	9	6	15	12	12	15	9	3	12	15	15	12	0	0	12	15	15	12	3	9	15	12	12	15	6	9	6	3	0	9	9
1	10	10	3	0	5	10	5	12	15	15	12	10	0	15	12	12	15	3	3	15	12	12	15	0	10	12	15	15	12	5	10	5	0	3	10	10
0	11	11	2	1	4	11	4	13	14	14	13	11	1	14	13	13	14	2	2	14	13	13	14	1	11	13	14	14	13	4	11	4	1	2	11	11

Ս. Ս. ԱՂԱՅԱՆ

ՀԱԴԱՄԱՐԻ ՀԱՐԹ ԵՎ ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ԲԼՈԿԱՅԻՆ ՄԱՏՐԻՑԱՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ

Ամփոփում

Աշխատանքում առաջարկվում է Հադամարի մատրիցաների կառուցման նոր մեթոդ՝ Հադամարի հարթ և տարածական մատրիցաների «հավաքումը» փոքր կարգի Հադամարի մատրիցաներից։ Գտնված են երկչափանի և տարածական բլոկ-ցիկլային (ԲՑ) Հադամարի մատրիցաների կառուցման բավարար, անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ։ Կառուցված են Վիլյամսոնի մատրիցաների բազմաչափ անալոգները, բերված է Շլիխտի խնդրի լուծումը, Հադամարի մատրիցաների կառուցման հանրահաշվական ապարատը տարածված է բազմաչափ դեպքի համար։ Գտնված են Հադամարի հարթ և տարածական մատրիցաների խտության կշռի և մնացորդի վերին և ստորին գնահատականներ։ Բերված են Հադամարի հարթ և տարածական ԲՑ մատրիցաների կոնստրուկցիաները։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Холл М.* Комбинаторика. Изд. «Мир», 1970.
2. *Эрдёш П.* Некоторые нерешенные проблемы. «Математика», Периодический сборник переводов иностранных статей, 7 : 4 (1963), 109—143.
3. *Sylvester J. J.* Thoughts on inverse orthogonal matrices, simultaneous sign-successions, and tesselated pavements in two or more colors, with applications to Newton's rule, ornamented tile-work and the theory of numbers. Phil Mag. (4) 34 (1867) 461—475.
4. *Scarpis U.* Sul Determinants di valore massim. Rend R. Inst. Lombardo Sci. e. Lett. (2) 31 (1898) 1441—1446.
5. *Hadamard J.* Resolution d'une question relative aux determinants. Bull. Sci, Math. 17 (pari 1) (1893) 240—246.
6. *Paley R. E.* On orthogonal matrices. J. Math. and Physics (1933) (311—320).
7. *Seberry J.* A computer listing of Hadamard matrices. Lecture notes in Mathematics. Vol. № 686 (1978) 275—281.
8. *Wallis W. D., Street A. P., Wallis J. S.* Combinatorics: Room Squares, Sum-Free Sets, Hadamard Matrices. Lecture Notes in Mathematics, Vol, 292, Berlin, Heidelberg, New-York. 1972.
9. *Hedayat A., Wallis W. D.* Hadamard matrices and their applications. The annals of Statistics, Vol. 6, № 6 (1978) 1184—1238.
10. *Beachump K.* Walsh functions and their applications, Acad. Press, 1975.
11. *Williamson J.* Hadamard's determinent theorem and the sum of four squares. Duke Math. J. 11 (1944) 65—81.
12. *Агаян С. С.* «Семейства Вильямсона» и матрицы Адамара. V Всесоюзная конференция по проблемам теоретической кибернетики, Новосибирск, 1980.
13. *Turyn R. J.* An infinite class of Williamson matrices, J. Combinatorial Theory. Ser, A. 12 (1972) 309—321.
14. *Саруханян А. Г.* Обобщенные матрицы типа Вильямсона. Уч. записки ЕГУ, № 2 (1978), 3—11.
15. *Gerämita A. V., Geramita J. M.* and *Wallis J. S.* Orthogonal design, Lin Mulitilin Alg. 3 (1976) 281—306.

16. *Yang C. H.* On Hadamard matrices constructible by circulant submatrices. Math. of computation 25 (1971).
17. *Wallis J.* On Hadamard Matrices. J. Comb. Theory. 1975 (A) 18, 2, 149—164.
18. *Агаян С. С., Саруханян А. Г.* Рекуррентные формулы построения матриц типа Вильямсона, Мат. записки, т. 30, № 4, (1981), 603—617.
19. *Cohn J. H.* Hadamard matrices and some generalisations. Amer. Math. Monthly 72 (1965) 515—518.
20. *Shlichta P. I.* Higber dimensional Hadamard matrices. IEEE Trans. Inf. Theory, 25, № 5 (1979) 566—572.
21. *Shlichta P. I.* Bull. Amer. Phys. Sci. Ser. 11, Vol. 16, (1971).
22. *Agaian S. S.* On the new method of Hadamard's construction and solution of Schichta problem.
23. *Ланкастор П.* Теория матриц. М., «Наука», 1978.
24. *Agaian S. S.* Algorithm of Orthogonal matrices Fast Transform. Progress in Cybernetics and systems Research, v. 8, 1981.
25. *Whiteman A. L.* Hadamard matrices of Order $4(2p+1)$. J. of number theory 8, 1—11 (1976) 1—11.
26. *Geramita A. V.* Orthogonal designs 11. Queen's Par Pure and Appl. Math. (1974) 165—196.
27. *Geramita A. V., Wallis J.* Orthogonal designs III Weighing matrices. Queen's Mathematical Preprint No. 1974, 10.
28. *Robinson P. J.* Amicable orthogonal designs. Bull. Austral. Math. soc. Vol. 14 (1976) 303—314.
29. *Robinson P. J.* A non-existence theorem for orthogonal designs. Utilitas Mathematica, Vol. 10, (1976), 179—184.
30. *Plotkin M.* Decomposition of Hadamard matrices. J. Combinatorial Theory (A), 13 (1972), 127—130.
31. *Wallis J.* Hadamard designs. Bull. Aust. Math. Soc. 2 (1970) 45—54.
32. *Storer T.* Hurwitz on Hadamard designs. Bull. Austral. Math, Soc. 4, (1971), 109—112.
33. *Wallis J.* On integer matrices obeying certain matrix equations. J. Combinatorial Theory, Ser. A, 12 (1972) 112—118.
34. *Агаян С. С.* О пространственной матрице Адамара типа Вильямсона. ДАН АрмССР, № 3, (1981), 131—135.
35. *Соколов.* Пространственная матрица.
36. *Schmidt K. W.* Problem 863. Math. Mag. 46, (1973) 103.
37. *Schmidt K. W.* The Weights of Hadamard Matrices. J. of combinatorial theory series A 23, (1977) 257—263.
38. *Best M. R.* The excess of a Hadamard matrix. Indag Mathematics 39, (1977) 357—361.
39. *Enomoto H.* and *Miyamoto M.* On maximal Weights of Hadamard Matrices. J. of combinatorial Theory, series A 29, (1980) 94—100.
40. *Hammer J.* Livingston and J. Seberry. A remark on the excess of Hadamard matrices and orthogonal designs, Arc Combinatorica 5 (1978) 237—254.