М. Х. ГУКАСЯН

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В основе большинства методов нахождения приближенных решений уравнений математической физики лежит идея замены граничных и краевых условий правой части уравнения, а также самого дифференциального оператора некими близкими к ним так, что вновь полученная задача оказывается легче разрешимой.

Пусть задано дифференциальное уравнение

$$A\varphi = f,$$

решение которого разыскивается в области Ω, ограниченной контуром Γ.

На части Γ' контура Γ, где $\Gamma' \subseteq \Gamma$, заданы граничные и краевые условия на искомое решение

$$\varphi|_{\Gamma'} = \overline{\varphi}.$$

Решение этой задачи заменяется решением задачи

$$A_h \varphi_h = f_h, \quad \varphi_h|_{\Gamma'} = \overline{\varphi}_h,$$

где $A_h \to A$, $f_h \to f$ и $\overline{\varphi}_h \to \varphi$ при $h \to 0$. Здесь h—параметр.

Применяя различные аппроксимации для A_h, f_h и накладывая при этом определенные условия на класс рассматриваемых задач, можно показать, что

$$\lim_{h \to 0} \varphi_h^J = \varphi^J,$$

где φ—точное решение исходной задачи.

Через J здесь обозначено множество точек, в которых ищется решение аппроксимирующей задачи.

При машинной реализации этих методов часто возникает необходимость решения системы алгебраических уравнений, количество которых определяется числом узлов выбранной сетки. При этом близость полученного таким образом приближенного решения и точного решения зависит от количества этих узлов и в конечном счете мало отражает качественный характер последнего. Кроме того, возникает так называемая „проблема граничных условий“, для разрешения которой приходится прибегать к довольно-таки искусственному доопределению значений оператора A вне рассматриваемой области Ω.

Ниже, на примере уравнения колебания струны и уравнения теплопроводности предлагается метод, позволяющий свести нахождение решений вышеуказанных уравнений к отысканию оптимальной функции состояния некоторой оптимизационной задачи. Тем самым оказывается возможным подключить к решению уравнений математической физики мощный аппарат теории оптимального управления. В конце работы будут приведены численные результаты по нахождению приближенного решения уравнения теплопроводности с использованием алгоритма, основанного на теории достаточных условий оптимальности В. Ф. Кротова. Применение этого алгоритма позволяет получать приближенные значения искомой функции с заданной точностью без решения какой-либо системы вообще. Единственно сложной операцией в этом алгоритме является операция максимизации, которая для рассматриваемых здесь задач оказывается элементарной.

Рассмотрим уравнение колебания струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \begin{array}{l} 0\leqslant t\leqslant T \\ 0\leqslant x\leqslant l \end{array} \tag{1}$$

с краевыми и граничными условиями

$$\begin{array}{ll} u(x,\ 0)=\varphi(x) & u(0,\ t)=\mu_1(t) \\ u_t(x,\ 0)=\psi(x) & u(l,\ t)=\mu_2(t) \end{array} \tag{2}$$

Через $\bar{u}(x,\ t)$ обозначим решение задачи [(1), (2)].

Как известно, уравнение (1) допускает обращение по времени, что, в частности означает следующее: решение уравнения (1) с заменой $t=-t$ и условиями на границе вида

$$\begin{array}{ll} u(x, T)=\bar{u}(x, T) & u(0,\ t)=\mu_1(t) \\ u_t(x, T)=\bar{u}(x, T) & u(l, t)=\mu_2)t) \end{array} \tag{2'}$$

совпадает с решением $\bar{u}(x,\ t)$ задачи [(1), (2)].

Более того, имеет место следующее предложение: пусть $u_n(t, x)$ — решение обращенного по времени уравнения (1) с прежними граничными условиями $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ и такое, что выполняются условия:

$$\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} u_n(0,\ x)=\varphi(x), \\ \lim\limits_{n\to\infty} u_{nt}(0,\ x)=\psi(x). \end{array} \tag{3}$$

Тогда $\lim u_n(t, x)=\bar{u}(t,\ x)$ при всех $0\leqslant t\leqslant T$.

Действительно, в силу непрерывной зависимости решений уравнения (1) от начальных условий, по любому $\varepsilon>0$ можно найти такое $\delta(x)$, что из условия

$$\max[|u(0, x)-\varphi(x)|,\ \ |u_t(0,\ x)-\psi(x)|]<\delta(x)$$

будет следовать

$$|u(t, x)-\bar{u}(t, x)|<\varepsilon,$$

где $u(t, x)$ — произвольная функция, удовлетворяющая уравнению (1), а также граничным условиям $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$.

Так как условия (3) выполнены, то для данного $\delta(x)$ существует номер N, такой, что при $n>N$ выполнены неравенства:

$$|u_n(0, x)-\bar{u}(0, x)|<\delta(x)$$
$$|u_{nt}(0, x)-\bar{u}_t(0, x)|<\delta(x), \qquad (4)$$

а тогда при этих же номерах будет выполнено условие $|u_n(t, x)-\bar{u}(t, x)|<\varepsilon$. Это наводит на мысль в задаче [(1), (2′)] искать такие начальные условия, при которых решения удовлетворяют условиям (4) при достаточно малых по модулю функциях $\delta(x)$.

Для применения аппарата теории достаточных условий оптимальности перепишем задачу [(1), (2′)] в следующем виде:

$$\begin{array}{lllll}
\dfrac{\partial y_1}{\partial t}=y_2 & \dfrac{\partial y_1}{\partial x}=y_3 & & y_1(t, 0)=\mu_1(t) & \\
 & & & & y_1(0, x)=\varphi(x) \\
\dfrac{\partial y_2}{\partial t}=u_1 & \dfrac{\partial y_2}{\partial x}=u_2 & (S) & \begin{array}{l} y_1(t, l)=\mu_2(t) \\ y_2(t, 0)=\mu_1'(t)\end{array} \quad (B^1) & y_2(0, x)=\psi(x) \quad (B^2) \\
 & & & & y_3(0, x)=\varphi'(x). \\
\dfrac{\partial y_3}{\partial t}=u_2 & \dfrac{\partial y_3}{\partial x}=u_1 & & y_2(t, l)=\mu_2'(t) &
\end{array}$$

В этой записи через y_1 обозначена искомая функция $\bar{u}(t, x)$.

Пару вектор-функций (y, u) назовем допустимой, если она удовлетворяет системе (S), а вектор-функция $y(t, x)$ удовлетворяет условиям (B^1) и (B^2). Выше мы специально отделили условия (B^1) и (B^2) по следующей причине: решение любой оптимизационной задачи предполагает минимизацию (максимизацию) некоторого функционала, вид которого полностью определяется целью управления. В силу указанных выше свойств решений рассматриваемого уравнения было бы естественно искать такие управляющие функции u_1 и u_2, а также недостающие граничные и краевые условия для функций состояния y_1, y_2, и y_3, при которых достигается минимум функционала

$$J_1=\int_0^l [\,|y_1(0, x)-\varphi(x)|^2+|y_2(0, x)-\psi(x)|^2]\,dx.$$

Если значение J_1, соответствующее некоторой паре $(y, u)\in D$, где D — множество допустимых пар, достаточно мало, то можно считать приближенное решение найденным. Для этого случая условия (B^2) отсутствуют, и значения $y_1(0, x)$, $y_2(0, x)$ и $y_3(0, x)$ ищутся в силу аппарата достаточных условий оптимальности. Характеристикой качества полученного приближенного решения являются значения функционалов l, Δ^1 и Δ^2, описание которых будет дано ниже.

Можно поступать иначе: считая заданными условия (B^1) и (B^2), определять такие управления u_1 и u_2 и недостающие условия на границе, при которых принимает минимальное значение функционал

$$J_2 = \int_0^l \int_0^T f(t, x, y_1, y_2, y_3, u_1, u_2)\, dt\, dx,$$

где f—произвольная непрерывная по аргументам t и x функция, квадратично зависящая от y и u. При этом характеристикой качества приближенного решения служат значения функционалов Δ^1 и Δ^2.

Обозначим y_1^s, y_2^s, y_3^s, u_1^s и u_2^s функции состояния и управляющие функции, полученные на s-ом шаге алгоритма.

Тогда функционал

$$\Delta_s^1 = \sum_{i=1}^{3} \Bigg[\int_0^T \sum_{x \in \rho_x^i} |\bar{y}_i^s(t, x+0) - \bar{y}_i^s(t, x-0)|\, dt +$$

$$+ \int_0^l \sum_{t \in \rho_t^i} |\bar{y}_i^s(t+0, x) - \bar{y}_i^s(t-0, x)| dx \Bigg],$$

где через $\rho_{x,t}^i$ обозначено множество точек разрыва функции $\bar{y}_i^s$, будет характеризовать меру невыполнения условия непрерывности функции состояния в рассматриваемой области $\Omega = [0, T] \times [0, l]$.

Меру невыполнения дифференциальных связей характеризует функционал

$$\Delta_s^2 = \sum_{i=1}^{3} \int_0^l \int_0^T [\, |\bar{z}_{st}^i| + |\bar{z}_{sx}^i|\,]\, dx\, dt,$$

$$\bar{z}_{st}^1 = \frac{\partial \bar{y}_1^s}{\partial t} - \bar{y}_2^s \qquad \bar{z}_{sx}^1 = \frac{\partial \bar{y}_1^s}{\partial x} - \bar{y}_3^s$$

$$\bar{z}_{st}^2 = \frac{\partial \bar{y}_2^s}{\partial t} - \bar{u}_1^s \qquad \bar{z}_{sx}^2 = \frac{\partial \bar{y}_2^s}{\partial x} - \bar{u}_2^s,$$

$$\bar{z}_{st}^3 = \frac{\partial \bar{y}_3^s}{\partial t} - \bar{u}_2^s \qquad \bar{z}_{sx}^3 = \frac{\partial \bar{y}_3^s}{\partial x} - \bar{u}_1^s$$

Как отмечалось выше, при решении исходной задачи методом оптимального управления с целевым функционалом J_1 в качестве одного из показателей приближенного решения выступает функционал l.

Не выписывая явного выражения для l, отметим лишь, что всегда имеет место неравенство $l \leqslant d = \min J_1$, и улучшение найденной на s-ом шаге пары (y^s, u^s) производится в первую очередь с учетом выполнения условия

$$l_{s+1} > l_s.$$

Более того, работу алгоритма можно считать законченной лишь в том случае, если на каком-то шаге выполняется условие. $d-l_s\leqslant\varepsilon$, где ε достаточно малое положительное число. Ясно, что для нашей задачи $d=0$.

С учетом вышеизложенного, назовем пару $(y^{\varepsilon}, u^{\varepsilon})$ ε — приближенным решением задачи $\{(S), (B^1), J_1\}$, если

$$\max(\Delta_\varepsilon^1, \Delta_\varepsilon^2, -l_\varepsilon)<\varepsilon$$

и ε — приближенным решением задачи $\{(S), (B^1), (B^2), J_2\}$, если

$$\max(\Delta_\varepsilon^1, \Delta_\varepsilon^2)<\varepsilon.$$

В качестве экспериментальной проверки изложенного подхода к решению задач математической физики, а также выявления эффективности используемого алгоритма численно решалась следующая задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad \begin{matrix}0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant t\leqslant 1\end{matrix}\quad (A)\qquad \begin{matrix}u(1, t)=2(1-t)=u(0, t)\\ u(x, 0)=2+x(1-x).\end{matrix}\quad (B)$$

Введя обозначение $y_1=u$, перепишем уравнение (A) в виде системы

$$\begin{matrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial t}=y_2 & \dfrac{\partial y_1}{\partial x}=y_3\\ \dfrac{\partial y_2}{\partial t}=u_1 & \dfrac{\partial y_2}{\partial x}=u_2\\ \dfrac{\partial y_3}{\partial t}=u_2 & \dfrac{\partial y_3}{\partial x}=y_2\end{matrix}\qquad (A')$$

Тогда условия (B) примут вид:

$$\begin{aligned}&y_1(1, t)=y_1(0, t)=2(1-t)\\ &y_2(1, t)=y_2(0, t)=-2\\ &y_1(x, 0)=2+x(1-x)=\varphi(x)\\ &y_3(x, 0)=1-2x\end{aligned}\qquad (B'$$

Введем функционал

$$J_1=\int_0^1 |y_1(x, 0)-\varphi(x)|^2 dx.$$

Ставится задача о нахождении такой допустимой (в смысле системы (A') и условий (B')) пары (y, u), при которой функционал J_1' принимает минимальное значение.

Вычисления производились до выполнения условия

$$\max(\Delta^1, \Delta^2, -l)<0.1.$$

Ниже приводятся соответствующие значения Δ^1, Δ^2 и l, а также значения y_1 в узловых точках оси $t=1$, полученные на 14-й итерации

$\Delta^1 = 0.02$; $\Delta^2 = 0.06$; $l = -0.08$;

$y_1(0, 1) = 0$; $y_1(0.1, 1) = 0.1$; $y_1(0.2, 1) = 0.14$; $y_1(0.3, 1) = 0.19$;

$y_1(0.4, 1) = 0.26$; $y_1(0.5; 1) = 0.24$; $y_1(0.6; 1) = 0.22$;

$y_1(0.7,1) = 0.24$; $y_1(0.8, 1) = 0.18$; $y_1(0.9, 1) = 0.12$; $y_1(1, 1) = 0$.

Մ. Խ. ՂՈՒԿԱՍՅԱՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄՈՏԱՎՈՐ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Աշխատանքում լարերի տատանման միջափանի հավասարման և ջերմահաղորդականության հավասարման օրինակի վրա նկարագրվում է նրանց մոտավոր լուծումները գտնելու մեթոդը՝ հիմնված օպտիմալ ղեկավարման տեսության վրա։

Տրված է առաջարկված մեթոդի համառոտ հիմնավորումը։

Որպես օպտիմալ ղեկավարման մաթեմատիկական ապարատ օգտագործված է Վ. Ֆ. Կրոտովի օպտիմալության բավարար պայմանների տեսության ապարատը։

Բերված են ջերմահաղորդականության մեկ խնդրի լուծման թվային արդյունքները։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. И. Марчук.* Методы вычислительной математики, М., 1977.
2. *Р. Латтес, Ж.-Л. Лионс.* Метод квазиобращения и его приложения, М., 1970.
3. *В. Ф. Кротов.* Вычислительные алгоритмы решения и оптимизации управляемых систем уравнений, «Изв. АН СССР. Сер. ТК», 5,6, 1975.

ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ՖՈՒՆԴԱՄԵՆՏԱԼ ԳՐԱԴԱՐԱՆ