А. А. БАБАДЖАНЯН, Л. Х. ЕРЕМЯН

О СПЕЦИАЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ ИТЕРАТИВНОГО АГРЕГИРОВАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для решения систем линейных уравнений вида

$$x = Ax + y \quad (x \in R^n_+), \tag{1}$$

где $A = \{a_{gq}\}_1^n$ — неотрицательная матрица, удовлетворяющая условию

$$\|A\| = \max_q \sum_{g=1}^n a_{gq} \leqslant 1, \tag{2}$$

а $y = \{y\}_1^n$—неотрицательный вектор, в [1] был предложен специальный (внешний) метод итеративного агрегирования. Кратко его можно записать в следующей векторно-матричной форме:

$$Z^{(k+1)} = TAP_k Z^{(k+1)} + TAy, \tag{3}$$

$$x^{(k+1)} = P_k Z^{(k+1)} + y, \quad (k = 0, 1, \ldots), \tag{4}$$

где $Z^{(k+1)} \in R^m_+$, $k+1$ — номер шага итерации.

Через

$$T = \begin{pmatrix} 1 \cdot \cdot \cdot 1 & 0 \cdot \cdot \cdot & & \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot 0 \\ 0 \cdot \cdot \cdot 0 & 1 \cdot \cdot \cdot 1 & 0 \cdot \cdot \cdot & & \cdot \cdot \cdot 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot 0 & 1 \cdot \cdot \cdot 1 \end{pmatrix},$$

обозначена агрегирующая матрица, где в i-ой строке и q-ом столбце стоит 1, если q-я переменная исходной системы (1) принадлежит i-ой группе и 0—в противном случае ($i = 1, \ldots m$; $q = 1, \ldots n$). Без ограничения общности принято, что переменные исходной системы пронумерованы в порядке их объединения, т. е. множество переменных M_i,отнесенных в i-ую группу, имеет вид

$$M_i = \{ g | s_{i-1} < g \leqslant s_i, \quad s_0 = 0, s_m = n \}, \ \bigcup_{i=1}^m M_i = \{1 \ldots n\}.$$

Весовая матрица

$$P_k=\left|\begin{array}{cccc} p_1^{(k)} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{s_1}^{(k)} & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & p_{s_1+1}^{(k)} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & p_{s_2}^{(k)} & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & p_{s_{m-1}+1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n^{(k)} \end{array}\right|, \tag{5}$$

получается из матрицы T^T (^{T}—знак транспонирования) заменой каждой единицы соответствующим весом

$$p_q^{(k)}=\frac{(Ax^{(k)})_q}{\sum\limits_{h\in M_j}(Ax^{(k)})_h}, \quad q\in M_j \quad (j=1, \ldots, m). \tag{6}$$

В качестве начального приближения берется произвольный вектор $x^{(0)}$ такой, что $Ax^{(0)}\geqslant 0$. Кроме того, должны быть выполнены условия

$$TAx^{(k)}>0 \quad (k=0, 1, \ldots). \tag{7}$$

Замечание 1. Нетрудно видеть, что $TAx^{(k+1)}=Z^{(k+1)}$ $(k=0, 1, \ldots)$. Мы подчеркиваем этот факт, аналогичный равенству $Tx^{(k+1)}=X^{(k+1)}$ $(k=0, 1, \ldots)$ для известного процесса итеративного агрегирования [2], так как кратные процессы, являющиеся обобщениями обоих методов, также предложенные в [1], этими свойствами не обладают.

Если система (1) описывает модель „затраты-выпуск", т. е. является системой линейных уравнений межпродуктового баланса (МПБ), то матрица A вполне продуктивная матрица прямых затрат (матрица Леонтьева). Условия, налагаемые на эту систему уравнений вытекают из самого смысла экономической задачи, а сам процесс решения (3)—(7) так же, как и метод итеративного агрегирования [2, 3] содержателен.

Внешний метод итеративного агрегирования использует идею последовательного приближения объема прямых затрат в уравнении (1), а не валового выпуска как это делается в известном методе итеративного агрегирования [2, 3], и состоит из следующих основных этапов:

а) решения некоторой (агрегированной) системы уравнений межотраслевого баланса (МОБ) (3), где в агрегированной матрице нормативов зафиксированы пропорции объемов прямых затрат продуктов (а не валового выпуска как в [2, 3]) внутри каждой отрасли;

б) дезагрегации объемов прямых затрат отраслей и подстановки ее в правую часть модели МПБ (1).

Помимо экономической (содержательной) интерпретации, методы итеративного агрегирования [1—3] становятся важны как численные методы, так как сводят процесс решения исходной задачи (1) (которая, например, для межпродуктового баланса, для конечно разностных аналогов дифференциальных уравнений с частными производными эллиптического типа, может иметь порядок 10^6) к последовательному решению аналогичных систем уравнений меньшей размерности.

Внешний метод итеративного агрегирования (3)—(7) при агрегирующей матрице $T=(1,...,1)$ назовем одномерным.

В работе дано достаточное условие сходимости внешнего процесса одномерного агрегирования и получены оценки скорости сходимости.

Теорема 1. Внешний метод одномерного агрегирования (3)—(7) сходится к решению (1) не медленнее геометрической прогрессии со знаменателем

$$\gamma=\min\left(\max_q \sum_{g=1}^n a_{gq}-\sum_{g=1}^n \min_q a_{gq},\quad \sum_{g=1}^n \max_q a_{gq}-\min_q \sum_{g=1}^n a_{gq}\right).$$

Доказательство. Выявим зависимость вектора P_{k+1} от вектора P_k, имеем из (6) и (3) с учетом замечания 1

$$P_{k+1}=(1/TAx^{(k+1)})Ax^{(k+1)}=AP_k+(1/TAy)\cdot Ay(1-TAP_k)=$$
$$=[A+(1/TAy)\cdot Ay\cdot T(E-A)]P_k.$$

Таким образом получаем, что имеет место соотношение

$$P_{k+1}=SP_k=S^kP_0,$$

где $S=\{s_{gq}|s_{gq}=a_{gq}+[(Ay)_g/TAy](1-\sum_{g=1}^n a_{gq})\}_1^n$ стохастическая матрица (по столбцам). Требуя неразложимость матрицы S, сходимость последовательности P_{k+1} можно доказать как это сделано в [4—5] или, без предположения неразложимости как в [3]. Отметим, что оба случая непосредственно следуют из теоремы 9.5.3 [7]. Тогда скорость сходимости одномерного процесса (3)—(7) определяется вторым по модулю собственным значением стохастической матрицы S.

Воспользуемся оценкой Брауэра—Хопфа—Шефера [8] (теорема 4.4), что для собственного значения $\lambda(C)\neq 1$ стохастической (по строкам) матрицы $C=\{c_{ij}\}_1^n$ имеет место неравенство

$$|\lambda(C)|\leqslant\min\left(1-\sum_{j=1}^n \min_i c_{ij},\quad \sum_{j=1}^n \max_i c_{ij}-1\right).$$

Тогда, для нашего случая, имеем

$$1-\sum_{g=1}^n \min_q s_{gq}=1-\sum_{g=1}^n \min_q a_{gq}-\left[\sum_{g=1}^n (Ay)_g/\sum_{g=1}^n (Ay)_g\right]\times$$
$$\times\min_q\left(1-\sum_{g=1}^n a_{gq}\right)=\max_q \sum_{g=1}^n a_{gq}-\sum_{g=1}^n \min_q a_{gq}. \tag{8}$$

Далее, аналогично (8), следует

$$\sum_{g=1}^{n} \max_q s_{gq} - 1 = \sum_{g=1}^{n} \max_q a_{gq} - \min_q \sum_{g=1}^{n} a_{gq}.$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Из (8) непосредственно следует, что $\gamma \leqslant \|A\|$.

Учитывая, что максимальное собственное значение $\lambda(A) \geqslant \min\limits_q \sum\limits_{g=1}^{n} a_{gq}$, имеем

Следствие. Если матрица A системы (1) удовлетворяет условию

a) $\max\limits_q \sum\limits_{g=1}^{n} a_{gq} < \min\limits_q \sum\limits_{g=1}^{n} a_{gq} + \sum\limits_{g=1}^{n} \min\limits_q a_{gq}$

или

б) $\sum\limits_{g=1}^{n} \max\limits_q a_{gq} < 2 \min\limits_q \sum\limits_{g=1}^{n} a_{gq}$,

то внешний метод одномерного агрегирования (3)—(7) сходится быстрее метода простой итерации.

Замечание 3. Отметим, что сходимость алгоритма (3)—(7) имеет место при агрегировании только части переменных в один агрегат (доказательство аналогично [5]).

Теорема 2. Пусть матрица A удовлетворяет условиям Хатанака, то есть для любых q, $t=1, \ldots, n$

$$\sum_{g=1}^{n} a_{gq} = \sum_{g=1}^{n} a_{gt},$$

тогда внешний метод одномерного агрегирования (3) — (7) сходится быстрее метода простой итерации.

Доказательство. Мы покажем, что второе по модулю собственное значение стохастической матрицы S, является собственным значением матрицы A, причем меньшим максимального значения $\alpha = \sum\limits_{g=1}^{n} a_{gq}$ (которому соответствует левый собственный вектор $T=(1, \ldots, 1)$ матрицы A).

Из теоремы 1 матрицу S можно представить в виде

$$S=A+D,$$

где $$D=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

и $d_g = (1-\alpha)(Ay)_g / \alpha TAy \quad (g=1, \ldots, n)$.

Обозначим правый собственный вектор, соответствующий второму по модулю собственному значению $\lambda(S)$ через $v=(v_1, \ldots, v_n)^T$, тогда

$$TSv = Tv = \sum_{g=1}^{n} v_g = 0 \tag{10}$$

как левый и правый векторы, соответствующие разным собственным значениям стохастической матрицы S. Заметим, что равенство (10) имеет место для компонент всякого собственного вектора v, которому соответствует собственное значение $\lambda(S)\neq 1$.

Далее имеем (так как $Dv=0$ из (10))

$$\lambda(S)v=Sv=Av.$$

То есть v является собственным вектором матрицы A, соответствующим значению $\lambda(S)$, отличному от максимального собственного значения α. Теорема доказана.

Замечание 4. Из следствия а) теоремы 1 непосредственно вытекает (после замены строгого неравенства на нестрогое), что при выполнении условий Хатанака, внешний метод одномерного агрегирования сходится не медленнее метода простой итерации.

Тем самым следствие а) „почти“ включает теорему 3.

В заключение отметим, что аналогичные результаты были получены ранее одним из авторов настоящей работы для известного процесса одномерного агрегирования [2—6].

Одновременно, так же как и метод итеративного агрегирования [2,3], внешний метод допускает обобщение на задачи условной и безусловной оптимизации, что является предметом исследования последующих работ.

Ա. Ա. ԲԱԲԱՋԱՆՅԱՆ, Լ. Խ. ԵՐԵՄՅԱՆ

ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՍԻՍՏԵՄԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԻՏԵՐԱՏԻՎ ԱԳՐԵԳԱՑՄԱՆ ՀԱՏՈՒԿ ՊՐՈՑԵՍԻ ՄԱՍԻՆ

Աշխատանքում դիտարկված է գծային հավասարումների սիստեմի լուծման համար ստեղծված նոր իտերատիվ ագրեգացման պրոցեսը, ագրեգացման մի մասնավոր դեպքում։ Ապացուցվում է, որ իտերացիայի քայլերի միջև անցումը կատարվում է որևէ Մարկովյան համասեռ շղթայի ստոխաստիկ մատրիցայի միջոցով։ Այս արդյունքից դուրս է բերվում պրոցեսի զուգամետությունը քննարկված դեպքում, ինչպես նաև տրվում է զուգամետության արագության գնահատականը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Бабаджанян.* О сходимости общих процессов итеративного агрегирования. ДАН Арм.ССР, т. 71, № 5, 1980.
2. *Л. М. Дудкин, Э. Б. Ершов.* Межотраслевой баланс и материальные балансы отдельных продуктов. «Плановое хозяйство», 1965, № 5.
3. Итеративное агрегирование и его применение в планировании. М., Экономика, 1979.
4. *Б. А. Щенников.* Блочный метод решения системы линейных уравнений большой размерности. «Экономика и математические методы», 1, вып. 6, 1965.

5. *Б. А. Щенников.* Применение методов итеративного агрегирования для решения систем линейных уравнений. «Экономика и математические методы», т. II, вып. 5, 1966.
6. *Б. А. Щенников.* Метод агрегирования для решения системы линейных уравнений. ДАН СССР, 1967, т. 173, № 4.
7. *П. Ланкастер.* Теория матриц. М., Наука, 1978.
8. *F. G. Fritz, B. Huppert, W. Willems.* Stochastische matrizen. Springer, 1979.