А. Д. ТУНИЕВ

МЕТОД НАПРАВЛЯЮЩЕГО ВЕКТОРА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Введение

В данной работе предлагается метод решения линейных алгебраических систем, который основан на идее выбора не одного направляющего элемента, как это делается, например, в методе исключения Гаусса, а одновременно нескольких направляющих элементов— *направляющего вектора*.

В первых двух пунктах рассмотрены теоретические основы метода и показано, что предлагаемый метод может рассматриваться как обобщение методов исключения и ортогонализации Грамма-Шмидта.

В п. 3 дано новое разложение относительно линейно зависимых векторов, которое в рассматриваемом здесь смысле является единственным. Другими словами получено обобщение метода полного исключения Жордана.

В п. 4. рассмотрены вопросы округления ошибок в обобщенном методе исключения и связанная с ней задача решения линейных алгебраических систем с требуемой точностью и скоростью.

В п. 5 предложен параметрический метод, основанный на свойстве метода направляющего вектора, который на наш взгляд, может быть применен к решению неустойчивых систем линейных алгебраических уравнений.

В п. 6 рассматриваются вопросы минимизации заполнения ненулевых элементов матрицы для метода частичной ортогонализации.

В п. 7 предложен обобщенный симплекс-метод для решения задач линейного программирования, основанный на обобщенном методе полного исключения.

В заключении рассматриваются другие возможные применения предлагаемого метода.

На наш взгляд, метод направляющего вектора может быть полезен для решения рассматриваемых здесь задач больших размерностей, в частности, в моделях экономического баланса и задач линейного программирования. Кроме того, он может быть эффективно использован для решения указанных здесь задач на многопроцессорных ЭВМ.

В данной работе удобно использовать обозначения, принятые в [1], [2]. Приведем необходимые из них.

Вектор $x=\{x_i\}$, где i пробегает множество N, будем обозначать $x[N]$. Если $K\subset N$, то соответствующий K „кусок" вектора будем обозначать $x[K]$. Компоненту вектора, имеющую индекс i, будем обозначать $x[i]$. Сложить или скалярно перемножить два вектора $x[N]$ и $y[M]$ можно только при $N=M$.

Символ $A[M, N]$ будет обозначать матрицу, индексы строк которой пробегают множество M, а индексы столбцов N. Транспонирование матрицы обозначим $A^T[M, N]$, нулевую матрицу—$O[M, N]$.

Скалярное произведение, умножение строк, столбцов и матриц записывается по обычным правилам.

1. Теоретическая основа метода

Обозначим $N=\{1, 2, \ldots, n\}$, $M=\{1, 2, \ldots, m\}$. Пусть при заданных системе строк $\{a_i[N]\}_{i\in M}$ и столбце $b[M]$ требуется решить систему линейных уравнений

$$a_i[N]x[N]=b[i], \quad i\in M, \tag{1}$$

относительно неизвестного столбца $x[N]$.

Возьмем произвольное $K\subseteq N$ и представим систему (1) в виде:

$$a_i[K]x[K]+a_i[N\setminus K]x[N\setminus K]=b[i], \quad i\in M. \tag{2}$$

При $K=N$ считаем $a_i[N\setminus K]=0[N\setminus K]$.

Пусть при некотором $i_0\in M$, $a_{i_0}[K]\neq 0[K]$. Определим элементы

$$a'_i[N]=a_i[N]+\alpha_i a_{i_0}[N], \quad i\in M, \tag{3}$$

$$b'[i]=b[i]+\alpha_i b[i_0], \quad i\in M, \tag{4}$$

где

$$\alpha_i=\alpha_i(K)=-\frac{(a_i[K],\ a_{i_0}[K])}{(a_{i_0}[K],\ a_{i_0}[K])}, \quad i\in M. \tag{5}$$

Теперь из соответствующих „кусков" $a'_i[N]$ и элементов $b'[i]$ составим новую систему, а именно;

$$a'_i[K]y[K]+a'_i[N\setminus K]\,x[N\setminus K]=b'[i], \ i\in M, \tag{6}$$

где $y[K]$ неизвестный столбец.

При введенных предположениях следующая теорема устанавливает связь между системами (2) и (6).

Теорема 1 (основная). Если $\{x[K],\ x[N\setminus K]\}$ — произвольное решение системы (2), то $\{y[K],\ x[N\setminus K]\}$ — решение системы (6), где

$$y[K]=x[K]+\lambda a^T_{i_0}[K], \quad \lambda\in R^1. \tag{7}$$

И наоборот, если $\{y[K],\ x[N\setminus K]\}$—некоторое решение системы (6), то $\{x[K],\ x[N\setminus K]\}$ — решение системы (2), где

$$x[K]=y[K]+\frac{b[i_0]-a_{i_0}[K]y[K]-a_{i_0}[N\setminus K]x[N\setminus K]}{(a_{i_0}[K],\ a_{i_0}[K])}a^T_{i_0}[K]. \qquad (8)$$

Доказательство теоремы можно провести, например, методом подстановки. Действительно, пусть $x[N]$ — произвольное решение системы (2). Тогда с учетом (3), (4) и (7) имеем:

$$\begin{aligned}&a'_i[K]\ y[K]+a'_i[N\setminus K]x[N\setminus K]-b'[i]=\\&=a'_i[K](x[K]+\lambda a^T_{i_0}[K])+a'_i[N\setminus K]x[N\setminus K]-b'[i]=\\&=a'_i[K]x[K]+a'_i[N\setminus K]x[N\setminus K]-b[i]=\\&=a'_i[N]x[N]-b'[i]=a_i[N]+\alpha_i a_{i_0}[N]x[N]-\\&-b[i]-\alpha_i b[i_0]=a_i[N]x[N]-b[i]+\\&+\alpha_i(a_{i_0}[N]x[N]-b[i_0])=0[i],\quad i\in M.\end{aligned}$$

Обратно, допустим, что $\{y[K],\ x[N\setminus K]\}$ произвольное решение системы (6). С учетом (3)—(5) и (8) имеем:

$$\begin{aligned}&a_i[K]x[K]+a_i[N\setminus K]x[N\setminus K]-b[i]=\\&=a_i[K]y[K]-\alpha_i(b[i_0]-a_{i_0}[K]y[K]-a_{i_0}[N\setminus K]x[N\setminus K])+\\&+a_i[N\setminus K]x[N\setminus K]-b[i]=(a_i[K]+\alpha_i a_{i_0}[K])y[K]+\\&+(a_i[N\setminus K]+\alpha_i a_{i_0}[N\setminus K])x[N\setminus K]-b[i]-\alpha_i b[i_0]=\\&=a'_i[K]\,y[K]+a'_i[N\setminus K]x[N\setminus K]-b[i]=0[i],\quad i\in M.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекают три следствия:

Следствие 1. Ранг системы векторов $\{a'_i[K]\}_{i\in M}$ меньше на единицу ранга $\{a_i[K]\}_{i\in M}$.

Следствие 2. Пусть $M_0\subseteq M$. Тогда, если вектор $x[N]$ произвольное решение системы линейных уравнений (1), то $x[N]$ является и решением системы

$$\begin{cases}a_{i_0}[N]\,x[N]=b[i_0],\\a'_i[N]\,x[N]=b'[i],\ i\in M_0,\\a_i[N]\ x[N]=b[i],\quad i\in M\setminus M_0,\end{cases}$$

и наоборот.

Следствие 3. Пусть $\theta[N]$ вектор параметр, θ просто параметр и $\theta[K]\cdot a_{i_0}[K]\neq 0$. Тогда системы

$$a_i[N]x[N]=b[i],\quad i\in M,$$

и

$$\begin{cases}\theta[N]\ y[N]=\theta,\\a'_i[N]\ y[N]=b'[i],\ i\in M,\end{cases}$$

эквивалентны в смысле разрешимости, при этом ранги их равны и $y[N\setminus K]=x[N\setminus K]$.

2. Обобщение метода исключения

Опишем метод решения исходной системы (1), основанный на следствии 2, при условии, что M_0 одноэлементное множество.

В предлагаемом методе каждая итерация состоит из малого шага, когда относительно выбранной системы векторов идет процесс частичной ортогонализации, и большого шага, когда процесс частичной ортогонализации закончен и преобразованию подлежат остальные непреобразованные элементы системы, рассматриваемой на данной итерации.

Перейдем к описанию метода.

Первая итерация.

1. Пусть $K_1\subset N$. Полагаем

$$a_1^1[N]=a_1[N],\quad b^1[1]=b[1].$$

2. На s-ом ($s\geqslant 2$) шаге находим элементы

$$a_s^1[N]=a_s[N]+\sum_{l=1}^{s-1}\alpha_l a_l^1[N], \tag{9}$$

$$b^1[s]=b[s]+\sum_{l=1}^{s-1}\alpha_l b^1[l], \tag{10}$$

где

$$\alpha_l=\alpha_l(K_1)=-\frac{(a_s[K_1],\ a_l^1[K_1])}{(a_l^1[K_1],\ a_l^1[K_1])},\quad i=1, 2, \ldots, s-1.$$

3. Обозначим $R_1=\{1, 2, \ldots, r_1\}$, где r_1 ранг системы векторов $\{a_i[K_1]\}_{i\in M}$*. Если $s<r_1$, то согласно (9), (10) определяем элементы $a_{s+1}^1[N]$ и $b^1[s+1]$, где вместо s берем $(s+1)$. Если $s=r_1$, то считаем малый шаг законченным, переходим к пункту 4.

4. Преобразуем остальные элементы системы (2), стоящие ниже r_1-ой строки, а именно:

$$a_s^1[N\setminus K_1]=a_s[N\setminus K]+\sum_{l\in R_1}\alpha_l a_l^1[N\setminus K],\quad s\in M\setminus R_1, \tag{11}$$

$$b^1[s]=b[s]+\sum_{l\in R_1}\alpha_l b^1[l],\quad s\in M\setminus R_1, \tag{12}$$

и считаем большой шаг законченным.

Здесь

$$\alpha_l=\alpha_l(K_1)=-\frac{(a_s[K_1],\ a_l^1[K_1])}{(a_l^1[K_1],\ a_l^1[K_1])},\quad l\in R_1.$$

---

* Так как эта система векторов подвергается процессу ортогонализации, то ранг ее определяется в ходе ортогонализации.

Обозначим $N_1=N\setminus K_1$, $M_1=M\setminus R_1$. С учетом этих обозначений, в результате первой итерации получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} a_i^1[K_1]\,x[K_1]+a_i^1[N_1]\,x[N_1]=b^1[i], & i\in R_1, \\ \qquad\qquad a_i^1[N_1]\,x[N_1]=b^1[i], & i\in M_1, \end{cases} \tag{13}$$

в которой система векторов $\{a_i^1[K_1]\}_{i\in R_1}$ ортогональна.

С системой

$$a_i^1[N_1]\,x[N_1]=b^1[i], \quad i\in M_1,$$

поступаем так же, как и с исходной.

Вторая итерация.

1. Пусть $K_2\subset N_1$. Полагаем

$$a_{r_1+1}^2[N_1]=a_{r_1+1}^1[N_1], \quad b^2[r_1+1]=b^1[r_1+1].$$

2. На s-ом ($s\geqslant r_1+2$) шаге определяем элементы

$$a_s^2[N_1]=a_s^1[N_1]+\sum_{i=r_1+1}^{s-1}\alpha_i a_i^2[N_1],$$

$$b^2[s]=b^1[s]+\sum_{i=r_1+1}^{s-1}\alpha_i b^2[i],$$

где

$$\alpha_i=\alpha_i(K_2)=\frac{(a_s^1[K_2],\, a_i^2[K_2])}{(a_i^2[K_2],\, a_i^2[K_2])}, \quad i=r_1+1,\ r_1+2,\ \ldots,\ s-1.$$

3. Обозначим $R_2=\{r_1+1,\ldots,r_2\}$, где r_2-r_1 ранг системы векторов $\{a_i^1[K_2]\}_{i\in M_1}$. Если $s<r_2$, то по вышеприведенным формулам определяем элементы $a_{s+1}^2[N_1]$, $b^2[s+1]$.

Если $s=r_2$, то считаем малый шаг законченным.

4. Преобразуем остальные элементы системы (13), стоящие ниже r_2-ой строки, а именно:

$$a_s^2[N_1\setminus K_2]=a_s^1[N_1\setminus K_2]+\sum_{i\in R_2}\alpha_i a^2[N_1\setminus K_2], \quad s\in M_1\setminus R_2, \tag{14}$$

$$b^2[s]=b^1[s]+\sum_{i\in R_2}\alpha_i b^2[i], \quad s\in M_1\setminus R_2 \tag{15}$$

и считаем большой шаг законченным.

Здесь

$$\alpha_i=\alpha_i(K_2)=-\frac{(a_s^1[K_2],\, a_i^2[K_2])}{(a_i^2[K_2],\, a_i^2[K_2])}, \quad i\in R_2.$$

Обозначим $N_2=N_1\setminus K_2$, $M_2=M_1\setminus R_2$. Тогда в результате второй итерации будем иметь:

$$\begin{cases} a_i^1[K_1]\,x[K_1]+a_i^1[N_1]x[N_1] & =b^1[i], \quad i\in R_1, \\ \qquad a_i^2[K_2]x[K_2]+a_i^2[N_2]x[N_2] & =b^2[i], \quad i\in R_2, \\ \qquad\qquad a_i^2[N_2]x[N_2] & =b^2[i], \quad i\in M_2, \end{cases}$$

в которой система векторов $\{a_i^2[K_2]\}_{i\in R_2}$ ортогональна.

Продолжая эту процедуру через τ ($\tau \leqslant \min(m, n)$) итераций получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} a_i^1[K_1]x[K_1] + a_i^1[N_1]x[N_1] & = b^1[i], \quad i \in R_1, \\ \quad a_i^2[K_2]x[K_2] + a_i^2[N_2]x[N_2] & = b^2[i], \quad i \in R_2, \\ \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \quad\quad a_i^\tau[K_\tau]x[K_\tau] + a_i^\tau[N_\tau]x[N_\tau] & = b^\tau[i], \quad i \in R_\tau, \end{cases}$$

где K_s, R_s, N_s ($s=1, 2, \ldots, \tau$) имеют тот же смысл, что и ранее.

Теперь при произвольном $x^0[N_\tau]$ обратным ходом находим все „куски" решения $x^0[N]$ при этом s-ый ($s=1, 2, \ldots, \tau$) „кусок" определяется по формуле.

$$x^0[K_s] = \sum_{i \in R_s} \frac{b^s[i] - a_i^s[N_s]x^0[N_s]}{(a_i^s[K_s],\ a_i^s[K_s])}\ a_i^{s^T}[K_s].$$

Ясно, что $x^0[N] = (x^0[K_1], x^0[K_2], \ldots, x^0[K_\tau], x^0[N_\tau])$, частное решение исходной системы.

Замечание 1. Если на некоторой итерации элементы какой либо строки равны нулю, кроме ее правой части, то исходная система не разрешима.

Замечания 2. Пусть в рассматриваемой процедуре K_1 выбирается равным N. Тогда после первой итерации будет получена система

$$a_i^1[N]\ x[N] = b^1[i], \quad i \in R_1 = \bigcup_{i=1}^{\tau} R_i.$$

В этом случае

$$x^0[N] = \sum_{i \in R_1} \frac{b^1[i]}{(a_i^1[N], a_i^1[N])} a_i^{1^T}[N],$$

не только частное, но и нормальное решение, которое, как известно, является единственным.

Действительно, пусть $y[N]$ произвольное решение приведенной однородной системы

$$a_i[N]\ x[N] = 0[i], \ i \in M.$$

Согласно следствию (2), $y[N]$ также и решение однородной системы

$$a_i^1[N]\ x[N] = 0[i], \ i \in R_1.$$

Поэтому, с учетом последнего, получаем

$$x^{0^T}[N]\ y[N] = \sum_{i \in R_1} \frac{b^1[i]}{(a_i^1[N], a_i^1[N])}\ a_i^1[N]\ y[N] = 0,$$

что и требовалось доказать.

Из замечания 2 следует, что каждый s-ый „кусок" частного решения исходной системы ортогонален подпространству решений „порождаемое" системой линейных однородных уравнений

$$a_i^s[K_s]\ x[K_s] = 0[i], \quad i \in R_s \quad (s = 1, 2, \ldots, \tau).$$

3. Об одном разложении относительно системы линейно-зависимых векторов

Рассмотрим процедуру решения исходной системы, которая отличается от процедуры п. 2 тем, что на большом шаге каждой итерации преобразованию подлежат не только элементы, стоящие ниже соответствующей строки, но и элементы стоящие выше нее.

Более точно, пусть согласно процедуре § 2 на первой итерации получена система (13). Теперь продолжим вторую итерацию по процедуре п. 2, при этом на большом шаге согласно (14), (15) определим элементы

$$a_s^2[N\setminus K],\quad b^2[s],\quad s\in M\setminus R_2.$$

Тогда в результате второй итерации получим эквивалентную систему вида

$$\begin{cases} a_i^1[K_1]\,x[K_1]+a_i^2[K_2]\,x[K_2]+a_i^2[N_2]\,x[N_2]=b^2[i], & i\in R_1,\\ \qquad\qquad a_i^2[K_2]\,x[K_2]+a_i^2[N_2]\,x[N_2]=b^2[i], & i\in R_2,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_i^2[N_2]\,x[N_2]=b^2[i], & i\in M_2. \end{cases}$$

Отметим, что если ранг системы векторов $\{a_i^1[K_2]\}_{i\in R_1}$ больше ранга системы $\{a_i^1[K_2]\}_{i\in M_1}$, то по крайней мере один из элементов системы $\{a_i^2[K_2]\}_{i\in R_1}$ отличен от нуля.

Однако, как будет показано в дальнейшем, для произвольного $s\in R_2$

$$(a_s^2[K_2],\ a_i^2[K_2])=0[i],\quad i\in R_1.$$

Это обстоятельство позволит выяснить интересное свойство полученного частного решения (см. теорему 2).

При такой организации вычислительного процесса через τ итераций получим

$$\begin{cases} a_i^1[K_1]x[K_1]+a_i^2[K_2]x[K_2]+\ldots+a_i^\tau[K_\tau]x[K_\tau]+a_i^\tau[N_\tau]x[N_\tau]=b^\tau[i], & i\in R_1,\\ \qquad\qquad a_i^2[K_2]x[K_2]+\ldots+a_i^\tau[K_\tau]x[K_\tau]+a_i^\tau[N_\tau]x[N_\tau]=b^\tau[i], & i\in R_2,\\ \qquad\qquad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_i^\tau[K_\tau]x[K_\tau]+a_i^\tau[N_\tau]x[N_\tau]=b^\tau[i], & i\in R_\tau. \end{cases}$$

Система векторов $\{a_i^s[K_s]\}_{i\in R_s}$ $(s=1, 2, \ldots, \tau)$ ортогональна, допустим она ортонормирована. Запишем эту систему в векторно-матричной форме. Для этого обозначим:

$\overline{A}[R_s, K_l]$—матрицу, состоящую из системы векторов $\{a_i^l[K_l]\}_{i\in R_s}$ $(s=1, 2, \ldots, \tau;\ \ l=s,\ s+1, \ldots, \tau)$;

$\overline{A}[R_s, N_\tau]$—матрицу, состоящую из системы векторов $\{a_i^\tau[N_\tau]\}_{i\in R_s}$ $(s=1, 2, \ldots, \tau)$;

$\bar{b}[R_s]$ — вектор столбец, состоящий из элементов $\{b^{\tau}[i]\}_{i\in R_s}$ ($s = 1, 2, \ldots, \tau$).

Тогда систему (16) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \bar{A}[R_1, K_1]x[K_1] + \bar{A}[R_1, K_2]x[K_2] + \ldots + \bar{A}[R_1, K_\tau]x[K_\tau] + \bar{A}[R_1, N_\tau]x[N_\tau] = \\ \qquad = \bar{b}[R_1], \\ \qquad \bar{A}[R_2, K_2]x[K_2] + \ldots + \bar{A}[R_2, K_\tau]x[K_\tau] + \bar{A}[R_2, N_\tau]x[N_\tau] = \\ \qquad = \bar{b}[R_2], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad \bar{A}[R_\tau, K_\tau]x[K_\tau] + \bar{A}[R_\tau, N_\tau]x[N_\tau] = \bar{b}[R_\tau]. \end{cases}$$

Помножив слева каждую s-ую систему на $A^T[R_s, K_s]$, получим

$$\begin{cases} X^0[K_1, K_1]x[K_1] + X^0[K_1, K_2]x[K_2] + \ldots + X^0[K_1, K_\tau]x[K_\tau] + X^0[K_1, N_\tau]x[N_\tau] = \\ \qquad = x^0[K_1], \\ \qquad X^0[K_2, K_2]x[K_2] + \ldots + X^0[K_2, K_\tau]x[K_\tau] + X^0[K_2, N_\tau]x[N_\tau] = \\ \qquad = x^0[K_2], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad X^0[K_\tau, K_\tau]x[K_\tau] + X^0[K_\tau, N_\tau]x[N_\tau] = \\ \qquad = x^0[K_\tau], \end{cases} \tag{17}$$

где

$$X^0[K_s, K_l] = \bar{A}^T[R_s, K_s]\bar{A}[R_s, K_l], \quad s = 1, 2, \ldots, \tau; \ l = s, s+1, \ldots, \tau;$$

$$X^0[K_s, N_\tau] = \bar{A}^T[R_s, K_s]\bar{A}[R_s, N_\tau], \quad s = 1, 2, \ldots, \tau;$$

$$x^0[K_s] = \bar{A}^T[R_s, K_s]\bar{b}[R_s], \quad s = 1, 2, \ldots, \tau.$$

Отметим, что матрица $X^0[K_s, K_s]$ симметрична, при $K_s = R_s$ она единичная. Ранг ее равен числу элементов множества R_s[3]. Пусть $K = \bigcup_{s=1}^{\tau} K_s$. Тогда справедлива следующая

Теорема 2. Произвольный j-ый столбец расширенной матрицы системы (17) является собственным вектором матрицы

$$X^0[K, K] = \begin{bmatrix} X^0[K_1, K_1], & X^0[K_1, K_2], \ldots, & X^0[K_1, K_\tau] \\ 0[K_2, K_1], & X^0[K_2, K_2], \ldots, & X^0[K_2, K_\tau] \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0[K_\tau, K_1], & 0[K_\tau, K_2], \ldots, & X^0[K_\tau, K_\tau] \end{bmatrix},$$

с собственным значением $\lambda = 1$. Компоненты этого столбца являются коэффициентами разложения j-вектора — столбца исходной системы относительно системы векторов столбцов матрицы

$$A[M, K] = \begin{bmatrix} a_1[K_1], & a_1[K_2], \ldots, & a_1[K_\tau] \\ a_2[K_1], & a_2[K_2], \ldots, & a_2[K_\tau] \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_m[K_1], & a_m[K_2], \ldots, & a_m[K_\tau] \end{bmatrix},$$

составленной из элементов системы (1). При заданной системе $K =$

$=\{K_1, K_2, \ldots, K_\tau\}$ подобные разложение в указанном выше смысле является единственным. Кроме того, при произвольном $x^0[N_\tau]$ вектор

$$(x^0[K_1]-X^0[K_1, N_\tau]\cdot x^0[N_\tau], \ldots, x^0[K_\tau]-X^0[K_\tau, N_\tau]\cdot x^0[N_\tau], x^0[N_\tau]), \tag{18}$$

решение исходной системы.

Доказательство. Пусть $b[M]$ произвольный j-ый столбец расширенной матрицы исходной системы. Рассмотрим систему (1), у которой в правой части стоит вектор $b[M]$. Тогда при заданной системе $\{K_1, K_2, \ldots, K_\tau\}$, согласно процедуре п. 3, через τ итераций получим эквивалентную систему (17).

Покажем, что $\{x^0[K_1], x^0[K_2], \ldots, x^0[K_\tau]\}$ является собственным вектором матрицы $x^0[M, K]$.

Действительно, как нетрудно заметить, для этого достаточно показать, что для произвольного $s\in\{1, 2, \ldots \tau\}$,

$$X^0[K_s, K_s]x^0[K_s]=\begin{cases} x^0[K_s], & \text{если } l=s,\\ 0[K_l], & \text{если } l=1, 2, \ldots, s-1.\end{cases} \tag{19}$$

Пусть $l=s$. Тогда, принимая во внимание, что система векторов строк матрицы $A[R_s, K_s]$ ортонормированная, имеем:

$$X^0[K_l, K_s]x^0[K_s]=\bar{A}^T[R_s, K_s]\,A[R_s, K_s]\bar{A}^T[R_s, K_s]\bar{b}[R_s]=$$

$$=\bar{A}^T[R_s, K_s]E\,[R_s, R_s]\bar{b}[R_s]=\bar{A}^T[R_s, K_s]\bar{b}[R_s]=x^0\,[K_s],$$

где $E[R_s, R_s]$ единичная матрица.

Пусть теперь $l\in\{1, 2, \ldots, s-1\}$. Тогда

$$X^0[K_l, K_s]\,x^0[K_s]=\bar{A}^T]R_l, K_l]\bar{A}[R_l, K_s]\bar{A}^T[R_s, K_s]\bar{b}[R_s]=$$

$$=\bar{A}^T[R_l, K_l]0[R_l, R_s]\bar{b}[R_s]=\bar{A}^T[R_l, K_l]0[R_l]=0[K_l].$$

Последнее следует из того, что

$$\bar{A}[R_l, K_s]\,\bar{A}^T[R_s, K_s]=0[R_l, R_s],$$

или, что то же самое,

$$(a_l^s[K_s], a_i^s[K_s])=0[i], \quad i\in R_s,\ l\in R_l.$$

Действительно, согласно процедуре, на большом шаге s-ой итерации верхние элементы

$$a_l^s[K_s]=a_l^{s-1}[K_s]+\sum_{i\in R_s}\alpha_i a_i^s[K_s], \quad l\in R_l,$$

где

$$\alpha_l=-\frac{(a_l^{s-1}[K_s], a_i^s[K_s])}{(a_i^s[K_s], a_i^s[K_s])}.$$

С учетом того, что система векторов $\{a_i^s[K_s]\}_{i\in R_s}$ ортогональна для $l\in R_l$, имеем:

$$(a_i^s[K_s],\ a_i^s[K_s]) = (a_i^{s-1}[K_s] + \sum_{k\in R_s} \alpha_k a_k^s[K_s],\ a_i^s[K_s]) =$$

$$(a_i^{s-1}[K_s],\ a_i^s[K_s]) + \alpha_i(a_i^s[K_s],\ a_i^s[K_s]) =$$

$$=(a_i^{s-1}[K_s],\ a_i^s[K_s]) - (a_i^{s-1}[K_s],\ a_i^s[K_s]) = 0[i],\quad i\in R_s.$$

Соотношение (19) доказано.

Далее, так как система (17) эквивалентна системе (1), то

$$a_i[K_1]x^0[K_1]+a_i[K_2]x^0[K_1]+\ldots+a_i[K_\tau]x^0[K_\tau]=b[i],\ i\in M. \qquad (20)$$

При заданной $\{K_1, K_2, \ldots, K_\tau]$ подобное разложение с учетом замечания 2 является единственным, что легко показать от противного.

4. О точности и скорости сходимости процесса в обобщенном методе исключения

Пусть задана система (1) и $N=M$. Допустим, что исходные элементы системы заданы с точностью до t десятичных знаков и ранг ее равен n. В этом случае, как известно, решение системы будет содержать в себе две погрешности:

—безусловную, являющуюся следствием того, что элементы системы приближенные числа;

—условную, зависящую от метода решения и являющуюся результатом округления в промежуточных вычислениях. Используя метод обратного анализа [4] и соображения, приведенные в [5], можно показать, что при решении системы линейных уравнений процедурой, рассмотренной в п. 2, после τ итераций матрица, ошибок будет иметь вид

$$\begin{array}{c} \\ K_1\left\{\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ K_2\left\{\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ K_3\left\{\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ \\ K_\tau\left\{\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \end{array}
\left|\begin{array}{cccccc}
\overbrace{}^{K_1} & \overbrace{}^{K_2} & \overbrace{}^{K_3} & & \overbrace{}^{K_{\tau-1}} & \overbrace{}^{K_\tau} \\
0\ldots0 & 0\ldots0 & 0\ldots0 & \ldots & 0\ldots0 & 0\ldots0 \\
1\ldots1 & 1\ldots1 & 1\ldots1 & \ldots & 1\ldots1 & 1\ldots1 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
1\ldots1 & 1\ldots1 & 1\ldots1 & \ldots & 1\ldots1 & 1\ldots1 \\
1\ldots1 & 1\ldots1 & 1\ldots1 & \ldots & 1\ldots1 & 1\ldots1 \\
1\ldots1 & 2\ldots2 & 2\ldots2 & \ldots & 2\ldots2 & 2\ldots2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
1\ldots1 & 2\ldots2 & 2\ldots2 & \ldots & 2\ldots2 & 2\ldots2 \\
1\ldots1 & 2\ldots2 & 2\ldots2 & \ldots & 2\ldots2 & 2\ldots2 \\
1\ldots1 & 2\ldots2 & 3\ldots3 & \ldots & 3\ldots3 & 3\ldots3 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
1\ldots1 & 2\ldots2 & 3\ldots3 & \ldots & 3\ldots3 & 3\ldots3 \\
. & . & . & . & . & . \\
1\ldots1 & 2\ldots2 & 3\ldots3 & \ldots & \tau-2\ldots\tau-2 & \tau-1\ldots\tau-1 \\
1\ldots1 & 2\ldots2 & 3\ldots3 & \ldots & \tau-1\ldots\tau-1 & \tau\ldots\tau \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
1\ldots1 & 2\ldots2 & 3\ldots3 & \ldots & \tau-1\ldots\tau-1 & \tau\ldots\tau
\end{array}\right| \cdot \frac{1}{2}10^{-t} \qquad (21)$$

Если в процедуре, рассмотренной в п. 2, множества $K_1, K_2, \ldots, K_\tau$ выбрать одноэлементными, то матрица ошибок (21) совпадает с матрицей ошибок, полученной в [4], для метода исключения. Если же в этой процедуре на первой итерации взять $K_1 = N$, то матрица (21) совпадает с матрицей ошибок, полученной в [5], для метода ортогонализации.

Таким образом, с учетом рекомендаций по организации вычислительного процесса (см. [6])*, можно заключить, что для любого $K = \{K_1, K_2, \ldots, K_\tau\}$ процедура, описанная в п. 2, по точности вычислений в принципе „лучше" метода исключения и „хуже" метода ортогонализации, а в смысле скорости сходимости „медленнее" метода ортогонализации, но „быстрее" метода ортогонализации. Отсюда следует, что можно поставить задачу выбора такого $K = \{K_1, K_2, \ldots, K_\tau\}$, при котором заданная система линейных уравнений будет решена с требуемой точностью и скоростью.

С формальной точки зрения, эта задача является задачей целочисленного нелинейного программирования, с линейной целевой функцией и с двумя ограничениями. При этом одно ограничение — линейное, связанное с порядком системы, а другое — нелинейное, связанное с числом арифметических действий.

С учетом формулы (8), следствия 1 и следствия 2, когда $M_0 \subseteq M$ не. одноэлементное множество, можно предложить процедуры, которые являются обобщением процедур, рассмотренных в п.п. 2—3.

В этих процедурах на малом шаге преобразованию подвергаются не только s-ая строка, но и те строки системы, стоящие ниже s-ой строки, индексы которых пробегают соответствующее выбранное подмножество.

5. Параметрический метод решения линейных алгебраических систем

Здесь рассматривается метод решения систем линейных уравнений, основанный на следствии 3 из п. 1.

Пусть требуется решить систему линейных уравнений

$$a_i[N]\, x[N] = b[i], \quad i \in M.$$

Не меняя общности рассуждений, допустим, что $K = \{1, 2, \ldots, k\}$, где $k \geqslant 2$, $K \subseteq N$.

1. Пусть при некотором $i_0 \in M$, $a_{i_0}[K] \neq 0[K]$. Определяем

$$a'_i[N] = a_i[N] - \alpha_i(K) a_{i_0}[N], \quad i \in M,$$

$$b'[i] = b[i] - \alpha_i(K)\, b[i_0], \quad i \in M,$$

где

---

* Здесь, в частности, речь идет о применении режима накопления, т. е. когда промежуточные вычисления скалярного произведения осуществляются с удвоенным ($2t$) числом разрядов, а результат суммирования берется с числом старших разрядов, равным t.

$$\alpha_i(K)=\frac{(a_i[K],\ a_{i_0}[K])}{(a_{i_0}[K],\ a_{i_0}[K])},\quad i\in M.$$

2. Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases}\theta[K]\,y[K]+\theta[N\setminus K]\,x[N\setminus K]=\theta\\ a_i'[K]\,y[K]+a_i'[N\setminus K]\,x[N\setminus K]=b'[i],\ i\in M,\end{cases}\tag{22}$$

где $\theta[N]$, θ произвольны, а $(\theta[K],\ a_{i_0}[K])\neq 0$.

3. Пусть первая компонента $a[i_0, 1]$ вектора $a_{i_0}[N]$ отлична от нуля. Обозначим через $\theta[j]$ j-ую компоненту вектора $\theta[N]$. Выберем $\theta[1]=1$. Тогда первую компоненту вектора $y[K]=(y[1], y[2], \ldots, y[k])^T$ можно искать в виде

$$y[1]=\theta-\sum_{j=2}^{k}\theta[j]\,y[j]-\sum_{j=k+1}^{n}\theta[j]\,x[j].\tag{23}$$

4. Подставив $y[1]$ в (22) и объединив элементы при $y[j]$ и $x[j]$, получим новую систему вида

$$\sum_{j=2}^{k}(a'[i,j]-a[i,1]\theta[j])y[j]+\sum_{j=k+1}^{n}(a'[i,j]-a[i,1]\theta[j])x[j]=b'[i]-a'[i,1]\theta,\tag{24}$$

где $a'[i,j]$ — j-ая компонента вектора $a_i'[N]$.

Зафиксировав элементы $\theta[j]$, с полученной системой поступаем так же, как и с исходной и т. д.

Таким образом, зная решение (24), согласно (23) определяем $y[1]$, а затем по (8)—решение исходной системы.

Поскольку $\theta[j]$, $j=1, 2, \ldots, n$ и θ можно выбрать произвольными, $l(l\leqslant n)$ элементам системы (24), принадлежащим различным столбцам, можно придать требуемые значения. Это обстоятельство позволяет на следующем шаге рассмотреть систему, матрица которой имеет специальную структуру.

6. О минимизации ненулевых элементов в методе „частичной" ортогонализации*

В данном параграфе мы опишем метод, основанный на следствии 2 из п. 1 при условиях, что частично ортогонализуются столбцы матрицы и $M_0=M$.

Далее приведем теоремы, которые позволяют связать число компонент в направляющем векторе с заполнением элементов разряженной матрицы (см. [7]).

Здесь слово „частичный" взято в кавычки для того, чтобы подчеркнуть, что рассматривается случай $M_0=M$.

1°. Метод „частичной" ортогонализации. Обозначим $M=\{1, 2, \ldots, m\}$, $N=\{1, 2, \ldots, n\}$.

---

* Эта часть работы выполнена согласно тематическому плану НПО ММП Армянской ССР. Результаты данного параграфа получены А. С. Туниевым.

Рассмотрим матрицу $A[M, N]$ порядка $m \times n$, где $m \geqslant n$, ранг которой равен n.

Положим $a_j^1[M] = a_j[M]$, $j \in N$, где $a_j[M]$ — j-ый столбец матрицы $A[M, N]$.

Первая итерация

1. Возьмем $K_1 = \{1, 2, \ldots, k_1\}$, где $k_1 < m$. Пусть ранг системы векторов $\{a_j^1[K_1]\}_{j \in N}$ равен r_1. Без ограничения общности допустим, что система векторов $\{a_j^1[K_1]\}_{j \in R_1}$ линейно независима, где $R_1 = \{1, 2, \ldots, r_1\}$.

2. На s-ом ($s \geqslant 1$) шаге определим элементы

$$a_j^{s+1}[N] = \begin{cases} a_j^s[N], & j \leqslant s, \\ a_j^s[N] + \alpha_j a_s^s[N], & j > s, \end{cases} \tag{25}$$

где

$$\alpha_j = -\frac{(a_j^s[K_1],\ a_s^s[K_1])}{(a_s^s[K_1],\ a_s^s[K_1])}. \tag{26}$$

3. Если $s < r_1$, то для $s = s + 1$ определяем элементы $a_j^{s+1}[N]$ согласно (25), (26).

Если $s = r_1$, то считаем первую итерацию законченной.

В результате первой итерации мы получим матрицу вида

$$A^{r_1+1}[M, N] = \begin{vmatrix} A^{r_1+1}[K_1, R_1] & o[K_1, N_1] \\ A^{r_1+1}[M_1, R_1] & A^{r_1+1}[M_1, N_1] \end{vmatrix},$$

где $N_1 = N \setminus R_1$ и $M_1 = M \setminus K_1$.

Вторая итерация

1. Выберем $K_2 = \{k_1 + 1, k_1 + 2, \ldots, k_2\}$, где $k_1 < k_2 < m$. Пусть ранг системы векторов $\{a_j^{r_1+1}[K_2]\}_{j \in N_1}$ равен $r_2 - r_1$ и допустим, что система векторов $\{a_j^{r_1+1}[K_2]\}_{j \in R_2}$ линейно независима, где $R_2 = \{r_1 + 1, \ldots, r_2\}$.

2. На s-ом ($s \geqslant r_1 + 1$) шаге определим элементы

$$a_j^{s+1}[N] = \begin{cases} a_j^s[N], & j \leqslant s, \\ a_j^s[N] + \alpha_j a_s^s[N], & j > s, \end{cases} \tag{27}$$

где

$$\alpha_j = -\frac{(a_j^s[K_2],\ a_s^s[K_2])}{(a_s^s[K_2],\ a_s^s[K_2])}. \tag{28}$$

3. Если $s < r_2$, то для $s = s + 1$ определяем элементы $a_j^{s+1}[N]$ согласно (27), (28).

Если $s = r_2$, то считаем вторую итерацию законченной.

В результате второй итерации получим матрицу вида

$$A^{r_2+1}[M, N]=\begin{bmatrix} A^{r_2+1}[K_1, R_1] & 0[K_1, R_2] & 0[K_1, N_2] \\ A^{r_2+1}[K_2, R_1] & A^{r_2+1}[K_2, R_2] & 0[K_2, N_2] \\ A^{r_2+1}[M_2, R_1] & A^{r_2+1}[M_2, R_2] & A^{r_2+1}[M_2, N_2] \end{bmatrix},$$

где $N_2=N_1\setminus R_2=N\setminus(R_1\cup R_2)$, $M_2=M_1\setminus K_2=M\setminus(K_1\cup K_2)$.

Продолжая этот процесс через τ—итераций, мы получим матрицу, приведенную в табл. 1, в которой столбцы диагональных матриц, т. е. матриц $A^{n+1}[K_l, R_l]$, $l=1, 2, \ldots, \tau$, ортогональны, а N_l, M_l, R_l, K_l, $l=1, \ldots, \tau$ имеют тот же смысл, что и ранее.

Нетрудно видеть, что на l-ой итерации ($l=1, 2, \ldots, \tau$) т. е. когда $r_{l-1}<s\leqslant r_l$ ($r_0=0$) элементы матрицы $A^s[M, N]$ преобразуются по формулам

$$a_j^{s+1}[N]=\begin{cases} a_j^s[N], & j\leqslant s, \\ a_j^s[N]+\alpha_j a_s^s[N], & j>s, \end{cases} \tag{29}$$

где

$$\alpha_j=-\frac{(a_j^s[K_l],\ a_s^s[K_l])}{(a_s^s[K_l],\ a_s^s[K_l])}. \tag{30}$$

Как мы видели, метод „частичной“ ортогонализации представляет собой последовательность итераций, в конце каждой из которых мы получаем нули в нужных позициях обрабатываемых столбцов. Однако нетрудно убедиться, что каждый шаг может привести к появлению новых ненулевых элементов или к заполнению неприведенной части матрицы.

$$\begin{bmatrix} A^{n+1}[K_1, R_1] & 0[K_1, R_2] & 0[K_1, R_3] & \ldots & 0[K_1, R_\tau] \\ A^{n+1}[K_2, R_1] & A^{n+1}[K_2, R_2] & 0[K_2, R_3] & \ldots & 0[K_2, R_\tau] \\ & & & & \\ A^{n+1}[K_\tau, R_1] & A^{n+1}[K_\tau, R_2] & A^{n+1}[K_\tau, R_3] & \ldots & 0[K_\tau, R_\tau] \end{bmatrix}$$

Таблица 1

Поэтому займемся задачей минимизации заполнения.

2. Пусть $A^s[M, N]$—обозначает матрицу к началу s-ого шага, l-ой итерации.

Из (29), (30) видно, что во всех столбцах, для которых

$$(a_j^s[K_l],\ a_s^s[K_l])\neq 0,$$

на s-ом шаге может иметь некоторое заполнение. Поэтому, для минимизации заполнения на s-ом шаге, из последних $n-s+1$ столбцов выбирается тот столбец, который бы привел к наименьшему заполнению, если перед s-ым шагом сделать его s-ым столбцом.

Введем обозначения.

Обозначим $S=\{1, 2, \ldots, s-1\}$.

Через B^s, C^s и $B^s(K_l)$ обозначим матрицы, полученные соответственно из матриц $A^s[M_{l-1}, N\setminus S]$, $A^s[M_l, N\setminus S]$* и $A^s[K_l, N\setminus S]$ путем замены ненулевых элементов единицами.

Далее через $\overline{B}^s$ и $\overline{C}^s$ обозначим матрицы, полученные соответственно из матриц B^s и C^s, путем замены всех нулей единицами, а всех единиц нулями. b_j^s, $b_j^s(K_l)$, $\overline{b}_j^s$, c_j^s, $\overline{c}_j^s$—будут означать j-ые столбцы соответствующих матриц B^s, $B^s(K_l)$, $\overline{B}^s$, C^s, $\overline{C}^s$.

Справедлива следующая

Теорема 1. Если $(t+s-1)$-ый и s-ый столбцы матрицы $A^s[M,N]$ переставлены и затем выполняется s-ый шаг метода „частичной" ортогонализации, то максимальное заполнение дается t—диагональным элементом матрицы.

$$G^s(K_l)=\begin{cases}(B^{s^T}(K_l)*B^s(K_l))\,\overline{B}^{s^T}B^s, & s\neq r_l\\ (B^{s^T}(K_l)*B^s(K_l))\overline{C}^{s^T}C^s, & s=r_l,\end{cases}$$

где $*$ означает булево умножение*.

Доказательство. Пусть $s\neq r_l$. Тогда если вектор $a^s_{l+s-1}[K_l]$ матрицы $A^s[M, N]$ сделан ортогональным к вектору $a^s_{j+s-1}[K_l]$, то максимальное число дополнительных ненулевых элементов равно $\overline{b}_j^{s^T}*b_l^s$. С другой стороны если $b_t^{s^T}(K_l)*b_j^s(K_l)=0$, то ни один ненулевой элемент не создается.

Таким образом, общее максимальное заполнение для j-ого столбца задается в виде

$$(b_t^{s^T}(K_l)*b_j^s(K_l))\overline{b}_j^{s^T}b_t^s$$

и в виду того что $\overline{b}_t^{s^T}b_t^s=0$, общее заполнение для всех столбцов имеет вид

$$g_{tt}^s(K_l)=\sum_{j=1}^{n-s+1}(b_t^{s^T}(K_l)*b_j^s(K_l))\overline{b}_t^{s^T}b_t^s.$$

Пусть l_j означает j-ый столбец единичной матрицы E порядка $n-s+1$. Тогда имеем

$$g_{tt}^s(K_l)=\sum_{j=1}^{n-s+1}(b_t^{s^T}(K_l)*b_j^s(K_l))\overline{b}_j^{s^T}b_t^s=$$

$$=\sum_{j=1}^{n-s+1}(l_t^TB^{s^T}(K_l)*B^s(K_l)l_j)l_j^T\overline{B}_j^{s^T}B^sl^t=$$

---

* Напомним, что $M_l=M\setminus\bigcup_{j=1}^{l}K_j$.

* При вычислении скалярных произведений векторов следует применять булево сложение $\oplus$, т. е. полагать $1\oplus1=1$.

$$= l_t^T(B^{s^T}(K_l)*B^s(K_l))\sum_{j=1}^{n-s+1} l_j l_j^T \overline{B}^{s^T} B^s l_t =$$

$$= l_t^T(B^{s^T}(K_l)*B^s(K_l))B^{s^T}B^s l_t = l_t^T G^s(K_l) l_t,$$

так как $\sum_{j=1}^{n-s+1} l_j l_j^T = E_{n-s+1}$.

Случай $s=r_l$, при замене $\overline{B}^s$ на $\overline{C}^s$ доказывается аналогично.

Теорема доказана.

Замечание. Заметим, что условие $b_t^{s^T}(K_l)*b_j^s(K_l)\neq 0$ не обязательно означает, что $(a_{l+s-1}^s[K_l],\ a_{j+s-1}^s[K_l])\neq 0$.

Так же заполнение может быть меньше, чем $b_j^{s^T}\ b_t^s$, так как в методе „частичной" ортогонализации может иметь место взаимное уничтожение слагаемых. Этим объясняется, почему $g_{tt}^s(K_l)$ дает максимальное, а не действительное заполнение.

Так или иначе из теоремы 1 следует, что для того, чтобы минимизировать заполнение на s-ом шаге надо определить

$$g_{dd}^s(K_l) = \min_t g_{tt}^s(K_l)$$

в начале s-ого шага, затем поменять местами s-ый и $l+d-1$ столбцы и сделать s-ый шаг метода.

Из теоремы 1 вытекают два следствия.

Следствие 1. Если всякий раз, когда $b_t^{s^T}(K_l)*b_j^s(K_l)=1$ имеем $b_t^{s^T}b_t^s=b_j^{s^T}b_t^s(\ c_t^{s^T}\ c_t^s=c_j^{s^T}\ c_t^s)$, то $g_{tt}^s(K_l)=0$.

Следствие 2. Если $b_t^{s^T}\ b_t^s=1\ (c_t^{s^T}\ c_t^s=1)$ и $b_t^{s^T}K_l*b_t^s(K_l)=1$* то $g_{tt}^s(K_l)=0$.

Из следствия 2 видно, что столбцы, содержащие всего один ненулевой элемент, должны быть в первую очередь частично ортогонализированы.

3°. **Определение 1.** Общее число всех таких элементов, которые были нулями в матрице $A[M,N]$ и приняли ненулевые значения в матрице $A^{n+1}[M,N]$, назовем общим заполнением.

Как видно из теоремы 1 на s-ом шаге l-ой итерации метода „частичной" ортогонализации заполнение $g_{tt}^s(K_l)$ — зависит от выбора K_l. Следовательно, общее заполнение будет зависеть от выбора $K_1, K_2, \ldots, K_\tau$.

Определение 2. Множество $f(\tau)=\{K_1, K_2, \ldots, K_\tau\}$, где $K_j\subseteq M$, $\bigcup K_j=M$ и $K_j\neq\{\varnothing\}$, $j=1, 2, \ldots, \tau$, назовем стратегией метода „частичной" ортогонализации для матрицы $A[M,N]$, или просто стратегией.

---

* Условие $b_t^{s^T}b_t^s=1$ означает, что столбец b_t^s содержит всего один ненулевой элемент, а $b_t^{s^T}(K_l)*b_t^s(K_l)=1$, то, что он находится в первых (k_l-k_{l-1}) элементах столбца $\underset{\sim}{b^s}$.

Заметим, что $f(1)=\{M\}$ и $f(m)=\{1, 2, \ldots, m\}$.

Предположим, что для любых стратегий из условия $b_l^{s^T}(K_l)*$ $*b_j^s(K_l)\neq 0$, $(s=1, 2, \ldots, n,\ l=1, 2, \ldots, \tau)$ следует, что $(a_{l+s-1}^s[K_l]$, $a_{j+s-1}^s[K_l]\neq 0$ и что в методе „частичной" ортогонализации не имеет место взаимного уничтожения слагаемых**.

Пусть $f(\tau_1)=\{K_1^1, K_2^1, \ldots, K_{\tau_1}^1\}\neq f(m)$. Тогда существует $l_1\in\{1, 2, \ldots, \tau_1\}$ что K_{l_1} не одноэлементное множество. Построим стратегию $f(\tau_2)$ следующим образом

$$f(\tau_2)=\{K_1^1, \ldots, K_{l_1-1}^1, K_{l_1}^2, K_{l_1+1}^2, K_{l_1+2}^2, \ldots, K_{\tau_2}^2\},$$

где $K_{l_1}^2\cup K_{l_1+1}^2=K_{l_1}^1$, $K_{j+1}^2=K_j^1$, $j=l_1+1, \ldots, \tau_1$.

Тогда при этих предположениях справедлива следующая теорема, доказательство которой мы не приводим.

Теорема 2. Общее заполнение для стратегии $f(\tau_2)$ не больше, чем для стратегии $f(\tau_1)$.

7. Обобщенный симплекс метод

В данном параграфе рассматривается метод решения задачи линейного программирования, основанный на особом правиле выбора не одного, а одновременно нескольких направляющих элементов — *направляющего вектора*.

Рассмотрим следующую исходную задачу линейного программирования записанную в канонической форме. Максимизировать линейную функцию

$$c[N]\,x[N] \tag{31}$$

при условиях

$$a_i[N]\,x[N]=b[i],\quad i\in M, \tag{32}$$

$$x[N]\geqslant 0[N], \tag{33}$$

где $N=\{1, 2, \ldots, n\}$, $M=\{1, 2, \ldots, m\}$ и $a_i[N]$ — неизвестный вектор столбец.

Предположим, что задача (31)—(33) невырожденная и $x^0[M]$ его опорный план. Тогда, как известно (см., например, [8]), методом полного исключения эта задача сводится к решению следующей эквивалентной задаче. Максимизировать линейную функцию

$$\Delta^0[N]\,x[N], \tag{34}$$

при условиях

$$x[i]+x_i^0[N\setminus M]\,x[N\setminus M]=x^0[i],\quad i\in M, \tag{35}$$

$$x[N]\geqslant 0[N], \tag{36}$$

где $\Delta^0[M]=0[M]$.

** См. замечание на стр. 131.

Алгебраической основой предлагаемого ниже метода является обобщение метода полного исключения, рассмотренного в п. 3.

С геометрической точки зрения идея метода заключается в том, что от известного опорного плана переходим к плану задачи (31) — (33) и от него к новому опорному плану и т. д. При каждом таком переходе значение линейной функции (31) увеличивается.

Перейдем к описанию метода. Обозначим $x_{m+1}^0[N]=\Delta^0[N]$, $x^0[m+1]=c[M]\,x^0[M]$, а через $A_j=a_j[M]$, $A_0=b[M]$ вектор столбец условий (32) и представим исходные данные в симплексной табл. 1.

1°. **Процедура перехода от опорного плана к плану.** 1. Пусть $K\subseteq N\setminus M$ и $x_{m+1}^0[K]<0[K]$. Далее допустим, что

$$\theta_1=\frac{x^0[1]}{\|x_1^0[K]\|}\min_{\substack{i\\ i\neq m+1}}\frac{x^0[i]}{\|x_i^0[K]\|},\quad (\text{для тех } x_i^0[K], \tag{37}$$

у которых по крайней мере одна компонента больше нуля и вектор $x_1^0[K]\geqslant O[K]$. Здесь $\|\cdot\|$ норма $(\cdot)$.

—	—	—	c_1	c_2	. . .	c_m	c_{m+1}	. . .	c_n
C_x	$Б_x$	A_0	A_1	A_2	. . .	A_m	A_{m+1}	. . .	A_n
c_1	A_1	x_1^0	1	0	. . .	0	x_{1m+1}^0	. . .	x_{1n}^0
c_2	A_2	x_2^0	0	1	. .	0	x_{2m+1}^0	.	x_{2n}^0
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
c_m	A_m	x_m^0	0	0	. . .	1	x_{mm+1}^0	. . .	x_{mn}^0
—	—	x_{m+1}^0	0	0	. . .	0	x_{m+1m+1}^0	. . .	x_{m+1n}^0

Таблица 1

Здесь $x_{ij}^0=x_i^0[j]$, $x_i^0=x^0[i]$.

2. Положим

$$\begin{aligned}
&x_1^1[N]=\frac{x_1^0[N]}{\|x_1^0[K]\|},\quad x^1[1]=\frac{x^0[1]}{\|x_1^0[K]\|},\\
&x_i^1[N]=x_i^0[N]+\alpha_i x_1^1[N],\quad i>1,\\
&x^1[i]=x^0[i]+\alpha_i x^1[1],\quad i>1,
\end{aligned}\tag{38}$$

где

$$\alpha_i=\alpha_i(K)=-(x_i^0[K],\ x_1^1[K]),\quad i=1,2,\ldots,m+1,$$

Отметим, что если K одноэлементное множество, то формулы (37), (38) совпадают с формулами преобразования в симплекс-методе (см., например, [1], [9], [10]).

Не меняя общности рассуждений, допустим, что $K=\{m+1, m+2, \ldots, m+k\}$, и представим преобразованные элементы из (38) в табл. 2.

В силу особого правила выбора направляющего вектора можно утверждать, что

а) $x^1[i] \geqslant 0$*, $i \in M$;

б) вектор $x_1^{1T}[K]\, x^1[1] = (x^1[m+1], x^1[m+2], \ldots, x^1[m+k])^T$ неотрицателен;

в) для плана $(x^1[2], x^1[3], \ldots, x^1[m+k])^T$ (см. ниже теорему 1) значение линейной формы (31) равно

$$x^1[m+1] = x^0[m+1] + \alpha_{m+1}\, x^1[1] > x^0[m+1].$$

—	—	—	c_1	c_2	$\ldots$	c_m	c_{m+1}	$\ldots$	c_n
C_x	$Б_x$	A_0	A_1	A_2	$\ldots$	A_m	A_{m+1}	$\ldots$	A_n
c_1	A_1	x_1^1	x_{11}^1	0	$\ldots$	0	x_{1m+1}^1	$\ldots$	x_{1n}^1
c_2	A_2	x_2^1	x_{21}^1	1	$\ldots$	0	x_{2m+1}^1	$\ldots$	x_{2n}^1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
c_m	A_m	x_m^1	x_{m1}^1	0	$\ldots$	1	x_{mm+1}^1	$\ldots$	x_{mn}^1
—	—	x_{m+1}^1	x_{m+11}^1	0	$\ldots$	0	x_{m+1m+1}^1	$\ldots$	x_{m+1n}^1

Таблица 2

Здесь $x_{ij}^1 = x^1[i, j]$, $x_i^1 = x^1[i]$.

3. Пусть на r-ом ($r \geqslant 2$) шаге

$$\theta_r = \frac{x^{r-1}[r]}{\|x_r^{r-1}[K]\|} = \min_{\substack{i \geqslant r \\ i \neq m+1}} \frac{x^{r-1}[i]}{\|x_i^{r-1}[K]\|},$$

$$\sum x_i^{r+1}[K]\, x^{r-1}[i] \geqslant O[K];$$
$$x_r^{r-1}[K]\, x_{m+1}^{r-1}[K] < O.$$

4. Положим

$$x_i^r[N] = x_i^{r-1}[N], \quad x^r[i] = x^{r-1}[i], \quad i < r,$$

$$x_r^r[N] = \frac{x_r^{r-1}[N]}{\|x_r^{r-1}[K]\|}, \quad x^r[r] = \frac{x^{r-1}[r]}{\|x_r^{r-1}[K]\|},$$

* Действительно, используя неравенство Бесселя и учитывая (37), (38), имеем:

$$x^1[i] = x^0[i] - (x_i^0[K], x_1^1[K])\, x^1[1] \geqslant x^0[i] - \|x_i^0 K\|\, x^1[1] =$$
$$= \|x_i^0[K]\| \left(\frac{x^0[i]}{\|x_i^0[K]\|} - \frac{x^0[1]}{\|x_1^0[K]\|} \right) \geqslant 0$$

$$x_i^r[N]=x_i^{r-1}[N]+\alpha_i x_r^r[N], \quad i>r,$$
$$x^r[i]=x^{r-1}[i]+\alpha_i x^r[r], \quad i>r,$$

где

$$\alpha_i=\alpha_i(K)=-(x_i^{r-1}[K],\ x_r^r[K]), \quad i=r+1,\ \ldots,\ m+1.$$

При $i<r$ элементы $x_i^{r-1}[N]$, $x^{r-1}[i]$ остаются без изменения, так как $(x_i^{r-1}[K],\ x_r^r[K])=0$.

Обозначим $R=\{1,\ 2,\ \ldots,\ r\}$. Тогда после r-го шага получим следующую задачу: максимизировать линейную функцию

$$x_{m+1}^r[N]\ x[N] \tag{40}$$

при условиях

$$\begin{cases} x_i^r[N]\ x[N]=x^r[i] & i\in R, \\ x_i^r[N]x[N]=x^r[i] & i\in M\setminus R, \end{cases} \tag{41}$$

$$x[N]\geqslant 0[N]. \tag{42}$$

Запишем систему (41) в векторно-матричной форме.

$$\begin{cases} x^r[R,\ N]\ x[N]=x^r[R], \\ x^r[M\setminus R,\ N]\ x[N]=x^r[M\setminus R]. \end{cases}$$

Отметим, что

$$X^{r^T}[R,K]x^r[R]\geqslant 0[K], \quad x^r[m+1]\geqslant x^{r-1}[m+1]^* \tag{43}$$

Далее допустим, что мы решили прервать этот процесс на r-ом шаге, где $r=1,\ 2,\ \ldots,\ r$. Тогда, представив исходные данные задачи (40) — (43) в табл. 3, переходим к следующей процедуре.

2°. **Процедура определения коэффициентов разложения векторов A_j относительно „базиса“** $A_{r+1},\ A_{r+2},\ \ldots,\ A_{m+k}$. Помножим слева $X^{r^T}[R_j,\ K]=(x_1^r[K],\ x_2^r[K],\ \ldots,\ x_r^r[K])^T$ на

$$X^r[R,N]\cdot x[N]=x^r[R].$$

Обозначим:

$$U[K,N]=X^{r^T}[R,K]\ X^r[R,N]$$
$$u[K]=X^{r^T}[R,K]\ x^r[R],$$
$$U[M\setminus R,N]=X^r[M\setminus R,N],\ u[M\setminus R]=x^r[M\setminus R],$$
$$u_{m+1}[N]=x_{m+1}^r[N],\quad u[m+1]=x^r[m+1]$$

и представим их элементы в табл. 4.

Справедлива следующая

* Если это условие не выполняется, то, согласно процедуре, условие (43) имеет место для $r=r-1$. Поэтому все дальнейшие рассуждения необходимо проводить для $r=r-1$.

Теорема 1. Обозначим $K_r = \{r+1,\ r+2,\ \ldots,\ m+k\}$, $u_0[K_r] = u[K_r]$. Тогда: а) вектор столбец $u_j[K_r]$ $(j=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$ является собственным вектором матрицы,

$$U[K_r, K_r] = \begin{bmatrix} E[M \setminus R,\ M \setminus R] & U[M \setminus R,\ K] \\ O[K,\ M \setminus R] & U[K,\ K] \end{bmatrix},$$

с собственным значением $\lambda = 1$, где $E[M \setminus R,\ M \setminus R]$ единичная матрица;

б) компоненты вектора $u_j[K_r]$ являются коэффициентами разложения вектора $A_j = a_j[M]$ относительно „базиса" $A_{r+1}, A_{r+2}, \ldots, A_{m+k}$, т. е.

$$\sum_{i \in K_r} A_i u[i,\ j] = A_j, \tag{44}$$

—	—	—	c_1	...	c_r	c_{r+1}	...	c_m	c_{m+1}	...	c_{m+k}	...	c_n
c_x	$Б_x$	A_0	A_1	...	A_r	A_{r+1}	...	A_m	A_{m+1}	...	A_{m+k}	...	A_n
c_1	A_1	x_1^r	x_{11}^r	...	x_{1r}^r	0	...	0	x_{1m+1}^r	...	x_{1m+k}^r	...	x_{1n}^r
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
c_r	A_r	x_r^r	x_{r1}^r	...	x_{rr}^r	1	...	0	x_{rm+1}^r	...	x_{rm+k}^r	...	x_{rn}^r
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
c_m	A_m	x_m^r	x_{m1}^r	...	x_{mr}^r	0	...	1	x_{mm+1}^r	...	x_{mm+k}^r	...	x_{mn}^r
—	—	x_{m+1}^r	x_{m+11}^r	...	x_{m+1r}^r	0	...	0	x_{m+1m+1}^r	...	x_{m+1m+k}^r	...	x_{m+1n}^r

Таблица 3

Здесь $x_{ij}^r = x_i^r[j]$, $x_i^r = x^r[i]$.

			c_1	...	c_r	c_{r+1}	...	c_m	c_{m+1}	...	c_{m+k}	...	c_n
c_x	$Б_x$	A_0	A_1	...	A_r	A_{r+1}	...	A_m	A_{m+1}	...	A_{m+k}	...	A_n
c_{r+1}	A_{r+1}	u_1	u_{11}	...	u_{1r}	1	...	0	u_{1m+1}	...	u_{1m+k}	...	u_{1n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
c_m	A_m	u_m	u_{m1}	...	u_{mr}	0	...	1	u_{mm+1}	...	u_{mm+k}	...	u_{mn}
c_{m+1}	A_{m+1}	u_{m+1}	u_{m+11}	...	u_{m+1r}	0	...	0	u_{m+1m+1}	...	u_{m+1m+k}	...	u_{m+1n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
c_{m+k}	A_{m+k}	u_{m+k}	u_{m+k1}	...	u_{m+kr}	0	...	0	u_{m+km+1}	...	u_{m+km+k}	...	u_{m+kn}
		u_{m+k+1}	u_{m+k+11}	...	u_{m+k+1r}	0	...	0	$u_{m+k+1m+1}$	...	$u_{m+k+1m+k}$	...	u_{m+k+1n}

Таблица 4

Здесь $u_{ij} = u_i[j]$, $u_i = u[i]$.

$$\sum_{i \in K_r} A_i u[i, j] = A_0, \qquad (45)$$

при этом подобное разложение в рассматриваемом смысле является единственным;

в) подматрица $U[K, K]$ матрицы $U[K_r, K_r]$ является симметричной, и ранг ее равен r (см. [3]);

г) для плана $u_0[K_r]$, значение линейной формы равно $u[m+1] > x^{r-1}[m+1]$, при этом $u[i] \geqslant 0, \quad i \in M \setminus R$;

д) оценка векторов условий A_j относительно „базиса" $A_{r+1}, A_{r+2}, \ldots, A_{m+k}$, т. е.

$$\Delta[j] = u[m+1, j] = \sum_{i \in K_r} c[i]\, u[i, j] - c_j, \ j \in N.$$

Доказательство пунктов а) — в) теоремы 1 следует на основании рассуждений, приведенных в § 3 и § 4.

Справедливость г) следует из процедуры 1°, а д) из соображений, которые для удобства изложения приведены ниже в 3°.

Замечание 1. Если при некотором $i_0 \in K$ диагональный элемент $u[i_0, i_0]$ матрицы $u[K, K]$ равен нулю, то, как известно, (см., например, [3]) $u[i, i_0] = 0, \ i \in K$ и $u[i_0, i] = 0, \ i \in K$. В этом случае, как нетрудно заметить, в разложении (44) вектор A_{i_0} не участвует. Далее, так как ранг матрицы $U[K, K]$ равен r, то в указанном разложении с учетом совокупности векторов $A_{r+1}, A_{r+2}, \ldots, A_m$ участвуют не менее m векторов, более точно: $A_{r+1}, A_{r+2}, \ldots, A_m, A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_l}$, где $s_i \in K$ и $u[s_i, s_i] > 0$.

Замечание 2. По допущению задача (31)—(33) невырожденная, поэтому план $u_0[K_r]$ содержит не менее m положительных компонент.

3°. **Процедура перехода от плана к опорному плану.** Если $r = k$, то $u_0[K_r]$ опорный план, если $r < k$, то поступаем следующим образом.

Не меняя общности рассуждений, допустим, что $u[i, i] > 0, \quad i \in K$ (см. замечание 1).

1. Если $u_0[K_r]$ не содержит нулевых компонент, то переходим к п. 2, в противном случае переходим к п. 6 для их исключения.

2. Пусть $u[m+1, s] = \min_{j \in K_r} u[m+1, j]$*. Так как $u_0[K_r]$ не опорный план задачи (31)—(33), а более точно подзадачи:

$$\max c[K_r]\ x[K_r]$$

при условиях

$$a_i[K_r] x[K_r] = b[i], \quad i \in M,$$
$$x[K_r] \geqslant 0[K_r],$$

то $u[m+1, s] < 0$, при этом $s \in K$.

---

* Если имеет место случай вырожденности, то поступаем так же, как и в симплекс-методе.

3. Выведем формулы преобразования построения планов задачи. Согласно (44), (45).

$$\sum_{i\in K_r} A_i u[i] = A_0,$$

$$\sum_{i\in K_r} A_i u[i, s] = A_s.$$

Поэтому для любого θ имеем:

$$\sum_{i\in K_r} A_i(u[i] - \theta u[i, s]) + \theta A_s = A_0,$$

или

$$\sum_{\substack{i\in K_r\\ i\neq s}} A_i(u[i] - \theta u[i, s]) + (u[s] - \theta(u[s, s] - 1))A_s = A_0.$$

обозначим

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{u}[s, s] &= u[s, s] - 1,\\ \widetilde{u}[i, s] &= u[i, s],\ i\neq s.\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Тогда последнее соотношение можно записать в виде:

$$\sum_{i\in K_r} A_i(u[i] - \theta\widetilde{u}[i, s]) = A_0.$$

Пусть

$$\theta_\tau = \frac{u[\tau]}{\widetilde{u}[\tau, s]} = \min_{\substack{i\geqslant r\\ i\neq m+1}} \frac{u[i]}{\widetilde{u}[i, s]}^{*},\quad \widetilde{u}[i, s] > 0. \tag{47}$$

Очевидно, что вектор $u'[K_r] = (u'[r+1], u'[r+2], \ldots, u'[m+k])^T$, компоненты которого с учетом (46) определяются из соотношений

$$u'[i] = u[i] - \frac{u[\tau]}{\widetilde{u}[\tau, s]}\widetilde{u}[i, s],\ i\geqslant r+1, \tag{48}$$

является планом задачи (31)—(33), при этом по крайней мере одна его компонента равна нулю, в частности, $u'[\tau] = 0$.

Таким образом, мы исключили из „базиса“ $A_{r+1}, A_{r+2}, \ldots, A_{m+k}$ вектор A_τ (переменную $x[\tau]$).

Для продолжения процесса получения новых планов представим векторы A_j в виде линейной комбинации векторов

$$A_{r+1}, A_{r+2}, \ldots, A_{\tau-1}, A_{\tau+1}, \ldots, A_{m+k}.$$

Обозначим $K_{r_\tau} = \{r+1, \ldots, \tau-1, \tau+1, \ldots, m+k\}$. Так как

$$A_s = \sum_{i\in K_r} A_i u[i, s],$$

то с учетом обозначений (46) имеем:

$$\sum_{i\in K_r} A_i\widetilde{u}[i, s] = 0[M],$$

или

---

* Если имеет место случай вырожденности, то в качестве τ выбираем любой из номеров, при котором в (47) достигается минимум.

$$A_\tau = -\frac{1}{\tilde u[\tau, s]} \sum_{i \in K_{r_\tau}} A_i \tilde u[i, s].$$

Подставив вектор A_τ в (44), получим:

$$A_j = \sum_{i \in K_{r_\tau}} A_i u[i, j] + u[i, \tau] \left(-\frac{1}{\tilde u[\tau, s]} \sum_{i \in K_{r_\tau}} A_i \tilde u[i, s] \right) =$$

$$= \sum_{i \in K_{r_\tau}} A_i \left(u[i, j] - \frac{u[\tau, j]}{\tilde u[\tau, s]} \tilde u[i, s] \right), \quad j \in N.$$

На основании последнего коэффициенты разложения векторов A_j относительно „базиса“ $A_{r+1}, \ldots, A_{\tau-1}, A_{\tau+1}, \ldots, A_{m+k}$ будут определяться из следующего соотношения.

$$u'[i, j] = u[i, j] - \frac{u[\tau, j]}{\tilde u[\tau, s]} \tilde u[i, s], \quad i \geqslant r+1, \; j \in N. \tag{49}$$

Обозначим $u[i, 0] = u[i]$ $(i = r+1, r+2, \ldots, m+k)$. Тогда, объединив (48) и (49), имеем:

$$u'[i, j] = u[i, j] - \frac{u[\tau, j]}{\tilde u[\tau, s]} \tilde u[i, s], \quad i \geqslant r+1, \; j = 0, 1, \ldots, n \tag{50}$$

или с учетом обозначений (46), при $\tau \neq s$.

$$\begin{cases} u'[s, j] = u[s, j] - \dfrac{u[\tau, j]}{u[\tau, s]} u[s, s] + \dfrac{u[\tau, j]}{u[\tau, s]}, \\ u'[i, j] = u[i, j] - \dfrac{u[\tau, j]}{u[\tau, s]} u[i, s], \quad i \geqslant r+1, \; i \neq s, \end{cases} \tag{51}$$

а при $\tau = s$,

$$\begin{cases} u'[s, j] = 0, \\ u'[i, j] = u[i, j] - \dfrac{u[\tau, j]}{u[s, s] - 1} u[i, s], \quad i \geqslant r+1, \quad i \neq s. \end{cases} \tag{52}$$

Значение линейной формы для плана $u'[K_{r_\tau}]$ равно $u'[m+1] > > u[m+1]$.

4. Представим преобразованные элементы $u'[i, j]$ в табл. 5. Если план $u'[K_{r_\tau}]$ содержит нулевые компоненты, то переходим к п. 6 для их исключения, в противном случае переходим к п. 5.

5. Если $u'[m+1, j] \leqslant 0$, $j \in K_{r_\tau}$, то полученный план опорный, в противном случае переходим к п. 2 процедуры 3° для построения нового плана.

6. **Исключение нулевых компонент плана задачи.** Пусть компонента $u[\tau]$ плана $u_0[K_r]$ равна нулю.

При некотором $s \in K$, $\tau \neq s$, $u[\tau, s] \neq 0$, согласно (51) переобразуем элементы $u[i, j]$.

В результате получим план $u'[K_{r_\tau}]$ с „базисом“ $A_{r+1}, \ldots, A_{\tau-1}, A_{\tau+1}, \ldots, A_{m+k}$ при этом значение линейной формы $u'[m+1]=u[m+1]$, так как $u'[i]=u[i]$, $i \in K_{r_\tau}$.

Если план $u'[K_{r_\tau}]$ снова содержит нулевую компоненту, то поступаем аналогичным образом и т. д.

После исключения всех нулевых компонент переходим к п. 5.

Отметим, что случай когда $u[\tau, s]=0$, для $s \in K$, $s \neq \tau$ и $u[\tau, \tau] \neq 0$ может иметь место только при условии, что задача (31)—(33) обладает вырожденным опорным планом. Поэтому в силу допущения о том, что задача (31)—(33) невырожденная, он невозможен. Тем не менее мы его рассмотрим.

—	—	—	C_1	C_2	. . .	C_n
$C_к$	$Б_к$	A_0	A_1	A_2	. . .	A_n
C_{r+1}	A_{r+1}	u_1	$u_{к1}$	$u_{к2}$	. . .	$u_{кn}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$C_{\tau-1}$	$A_{\tau-1}$	$u_{\tau-1}$	$u_{\tau-1,1}$	$u_{\tau-1,2}$	. . .	$u_{\tau-1,n}$
$C_{\tau+1}$	$A_{\tau+1}$	$u_{\tau+1}$	$u_{\tau+1,1}$	$u_{\tau+1,2}$	. . .	$u_{\tau+1,n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
C_{m+k}	A_{m+k}	u_{m+k}	$u_{m+k,1}$	$u_{m+k,2}$	. . .	$u_{m+k,n}$
—	—	u_{m+k+1}	$u_{m+k+1,1}$	$u_{m+k+1,2}$	. . .	$u_{m+k+1,n}$

Таблица 5

Здесь $u'_{ij}=u'[i, j]$, $u'_i=u'[i]$.

В этом случае, взяв в качестве направляющего элемент $u[\tau, \tau]$, делаем обычный шаг жордановых исключений. В результате получим план $u'[K_r]$ с тем же „базисом“ $A_{r+1}, \ldots, A_\tau, \ldots, A_{m+k}$.

В дальнейшем, при определении вектора исключаемого из „базиса“ компонента $u'[\tau]=0$ вектора $u[K_r]$ не участвует, другими словами, вектор A_τ будет всегда входить в соответствующие „базисы“, получаемые при построении планов задачи, и поэтому будет входить в базис опорного плана.

Таким образом, с учетом теоремы 3 (см. ниже) процедура 3° полностью определяет процесс построения планов задачи.

Справедлива следующая

Теорема 2. Процесс построения планов задачи (31)—(33), описанный в процедуре 3 за l шагов, где $l \leqslant \max(k-r, r)$, позволяет получить его опорный план.

Здесь под одним шагом понимается процесс исключения одного вектора из соответствующего „базиса".

Доказательство. Действительно, в процессе построения планов задачи (31)—(33) на каждом шаге из „базиса" $A_{r+1}, A_{r+2}, \ldots, A_{m+k}$ исключается один вектор.

Если на каждом шаге исключается вектор только из системы $A_{r+1}, A_{r+2}, \ldots, A_m$, то ровно через $(k-r)$ шагов мы получим „базис", состоящий из m векторов. Пусть этот „базис" состоит из системы векторов $A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}$. Обозначим $S=\{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ и пусть $u_{s_i}[S]$ $(i \in S)$ вектор столбец, компоненты которого являются коэффициентами разложения вектора A_{s_i} относительно „базиса" $A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_m}$.

Согласно процедуре построения планов и теореме 3 (см. ниже) вектор $u_{s_i}[S]$ $(i \in M)$ является собственным вектором матрицы

$$U[S, S]=(u_{s_1}[S], u_{s_2}[S], \ldots, u_{s_m}[S])$$

с собственным значением $\lambda=1$. Так как ранг матрицы $U[S, S]$ равен m, то система векторов $u_{s_1}[S], u_{s_2}[S], \ldots, u_{s_m}[S]$ линейно независима. Другими словами, эта система является собственным базисом матрицы $U[S, S]$ со значениями $\lambda=1$. Отсюда следует, что матрица $U[S, S]$—единичная (см., например, [11]).

Если на каждом шаге исключается только вектор из системы $A_{m+1}, A_{m+2}, \ldots, A_{m+k}$; то с учетом того, что ранг матрицы $U[K, K]$ равен r, при $k-r \geqslant r$ $(k-r < r)$ через r шагов мы, по соображениям, приведенным выше, также получим матрицу вида $U[S, S]$, которая является единичной.

Если имеют место оба рассмотренных случая, то, очевидно, что через l шагов. где $l \leqslant \max(r, k-r)$, мы получим также опорный план. Теорема доказана.

Теорема 3. Вектор-столбец $u'_j[K_{r_\tau}]$ $(j=0, 1, \ldots, n)$, элементы которого определяются согласно (50), является собственным вектором матрицы

$$U'[K_{r_\tau}, K_{r_\tau}]=(u'_{r+1}[K_{r_\tau}], \ldots, u'_{\tau-1}[K_{r_\tau}], u'_{\tau+1}[K_{r_\tau}], \ldots, u'_{m+k}[K_{r_\tau}])$$

собственным значе нием $\lambda=1$, при этом подобное разложение в рассматриваемом смысле является единственным.

Доказательство этой теоремы основывается на свойствах вектора $u_j[K_r]$, $j \in N$ и преобразования (50).

Замечание 3. Пусть $u[\tau, s] \neq 0$, где $s \in N \setminus K_r$. Далее допустим, что элементы $u'[i, j]$ получены из элементов $u[i, j]$ табл. 4 по обычным формулам метода полного исключения, где в качестве направляющего взят элемент $u[\tau, s]$. Тогда утверждение, аналогичное теореме 3, имеет место и для этого случая.

Отсюда следует, что процесс перехода от плана к опорному плану может быть построен аналогично симплекс методу, т. е. определяем $u[m+k+1, s]=\min\limits_{j} u[m+k+1, j]$ для $u[m+k+1, j]<0$ и в зависимости от того, какому из двух множеств K_r или $N\setminus K_r$ принадлежит s, применяем либо формулу (49) из процедуры 3°, либо формулы преобразования симплекс метода.

4°. **Обобщенный симплекс метод**. Пусть требуется решить задачу (34)—(36) и $x^0[i]>0$, $i\in M$.

1. Если $x^0[m+1, j]\geqslant 0$, $j\in N$, то $x^0[M]$ оптимальный план, в противном случае переходим к п. 2.

2. Определяем $K\subseteq N\setminus M$ такое, что $x^0_{m+1}[K]<0[K]$.

3. Пусть

$$\theta_1=\frac{x^0[1]}{\|x^0_1[K]\|}=\min_{\substack{i\\ i\neq m+1}}\frac{x^0[i]}{\|x^0_i[K]\|},\quad \text{для тех } x^0_i[K],$$

у которых по крайней мере одна компонента больше нуля.

4. Если $x^0_1[K]\geqslant 0[K]$, то переходим к п. 5, в противном случае на s-ом шаге, где $s=1, 2, \ldots, s$ выбираем множество $K_s\subset K_{s-1}$ и переходим к п. 3, где вместо K_{s-1} берем K_s (при $s=1$, $K_0=K$).

5. Не меняя общности рассуждений, допустим, что $x^0_1[K]\geqslant 0[K]$. Продолжаем этот процесс до r-го шага, где $r=1, 2, \ldots, r$. Допустим, что после r-го шага условие (43) выполняется (в противном случае все дальнейшие рассуждения проводим для $r=r-1$).

6. Пусть $K=\{m+1, m+2, \ldots, m+k\}$ $(k\geqslant 1)$. Согласно процедуре 2° определяем коэффициенты разложения векторов A_j относительно „базиса“ $A_{r+1}, A_{r+2}, \ldots, A_{m+k}$.

7. Если $u[m+k+1, j]\geqslant 0$ для всех $j\in N$, то план $u_0[K_r]$ оптимальный [12], в противном случае переходим к п. 8.

8. Если план $u_0[K_r]$ содержит нулевые компоненты, то переходим к п. 13 для их исключения, в противном случае переходим к п. 9.

9. Если $u[m+k+1, j]\geqslant 0$, $j\in K_r$ то переходим к п. 2, в противном случае переходим к п. 10.

10. Выбираем $K_1\subset K$ такое, что $u[m+k+1, j]<0$ для $j\in K_1$. Пусть $K_1=\{m+1, m+2, \ldots, m+k_1\}$, где $k_1<k$.

11. Обозначим $u^0[i, j]=u[i, j]$, $u^0_i[K_1]=u^0[i, m+1], \ldots$ $\ldots, u^0[i, m+k_1])$, для всех i, j. Согласно процедуре 1°, делаем s шагов, где $s=1, 2, \ldots, s$; $s\leqslant r_1$, r_1 ранг системы векторов $\{u^0_i[K_1]\}^{m+k}_{r+1}$. Пусть $u^s[i, j]$ элементы, полученные после s-го шага, где в качестве направляющих были первые d и последние $(k-\tau)$ векторы, более точно: $u^s_{r+1}[K_1], \ldots, u^s_{r+d}[K_1], u^s_{m+\tau+1}[K_1], \ldots, u^s_{m+k}[K_1]$; $s=d+k-\tau$. Это означает, что из „базиса“ $A_{r+1}, A_{r+2}, \ldots, A_{m+k}$ исключаем векторы $A_{r+1}, \ldots, A_{r+d}, A_{m+\tau+1}, \ldots, A_{m+k}$ и включаем $A_{m+1}, \ldots, A_{m+k_1}$.

12. Определяем коэффициенты разложения векторов A_j относительно „базиса“ $A_{r+d+1}, A_{r+d+2}, \ldots, A_{m+l}$, где $l=k_1$, если $k_1\geqslant\tau$ и $l=\tau$, если $k_1<\tau$.

Пусть

$$\begin{bmatrix} v[m+1, j] \\ v[m+2, j] \\ \vdots \\ v[m+k_1, j] \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} u^s[r+1, m+1] & u^s[r+1, m+2] & \dots & u^s[r+1, m+k_1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u^s[r+d, m+1] & u^s[r+d, m+2] & \dots & u^s[r+d, m+k_1] \\ u^s[m+\tau+1, m+1] & u^s[m+\tau+1, m+2] & \dots & u^s[m+\tau+1, m+k_1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u^s[m+k, m+1] & u^s[m+k, m+2] & \dots & u^s[m+k, m+k_1] \end{bmatrix}^T \times$$

$$\times \begin{bmatrix} u^s[r+1, j] \\ \vdots \\ u^s[r+d, j] \\ u^s[m+\tau+1, j] \\ \vdots \\ u^s[m+k\, j] \end{bmatrix},$$

$j=0, 1, \dots, n$.

Обозначив $v[m+l+1, j]=u^s[m+k+1, j]$ $(j=0, 1, \dots, n)$, согласно теореме 4, окончательно, для $j=0, 1, \dots, n$, получаем:

$$u'[i, j] = \begin{cases} u^s[i, j], & i=r+d+1, \dots, m; \\ u^s[i, j]+v[i, j] & i=m+1, \dots, m+l'; \\ v[i, j], & i=m+l'+1, \dots, m+l; \\ v[i, j], & i=m+l+1, \end{cases} \tag{53}$$

где при $k_1 \geqslant \tau$, $l'=\tau$, $l=k_1$, а при $k_1<\tau$, $l'=k_1$, $l=\tau$.

Значение линейной формы (34) для плана $u_0[K_l]$ равно $u'[m+l+1, 0] > u[m+k+1, 0]$. Переходим к п. 1.

13. **Исключение нулевых компонент.** Пусть компоненты плана $u_0[K_r]$ т. е.

$$u[i, 0]=0, \ i=r+1, \dots, d, \ m+\tau+1, \dots, m+k. \tag{54}$$

С учетом (8) определяем множество K_1* и согласно (38), (39) делаем s шагов, где $s=1, 2, \dots, s$. Обозначим через $u^s[i, j]$ элементы, полученные после s-го шага, где соответственно (54), в качестве направляющих были выбраны векторы

$$u^s_{r+1}[K_1], \dots u^s_{r+d}[K_1], \ u^s_{m+\tau+1}[K_1], \dots, u^s_{m+k}[K_1].$$

Тогда, согласно, (53), определяем $u'[i, j]$ для всех i, j. В результате получим план $u_0[K_l]$ со значением линейной формы $u'[m+l+1, 0] = u[m+k+1, 0]$. Переходим к п. 1.

---

* Нетрудно видеть, что вопрос выбора K_1 может быть решен по-разному.

Теорема 4. Пусть $K_l=\{r+d+1,\ r+d+2,\ \ldots,\ m+l\}$, где $l=k_1$, если $k_1\geqslant\tau$ и $l=\tau$, если $k_1<\tau$. Обозначим вектор столбец
$u_j'[K_l]=(u'[r+d+1,j],\ u'[r+d+2,j],\ \ldots,\ u'[m+l,j]\ (j=0,1,\ldots,n);$
элементы которого определены согласно (53). Тогда $u_j'[K_l]$ является собственным вектором матрицы

$$u'[K_l,\ K_l]=(u'_{r+d+1}[K_l],\ u'_{r+d+2}[K_l],\ \ldots,\ u'_{m+l}[K_l])$$

с собственным значением $\lambda=1$. Кроме того,

$$\sum_{l\in K_l} A_l u'[l,\ j]=A_j,\quad j=0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

при этом подобное разложение в рассматриваемом смысле является единственным.

Из этой теоремы следует, что если при каждом переходе от плана к плану из „базиса" исключается по крайней мере один вектор, то максимум через l шагов мы получим опорный план, где $l=\max(r,\ k-r)$.

Отметим, что при переходе от плана к плану не исключена возможность перехода к тому же „базису". Это может быть тогда, когда в качестве направляющих будут векторы

$$u^s_{m+1}[K_1],\ u^s_{m+2}[K_1],\ \ldots,\ u^s_{m+s}[K_1],\qquad \text{где } s<r_1.$$

В таком случае для ускорения процесса перехода к опорному плану на следующем шаге необходимо соответствующее K_1 выбрать одноэлементным.

Заключение

Здесь мы остановимся на других возможных приложениях метода направляющего вектора.*

1. **Линейное программирование**. Метод, рассмотренный в п. 7, может служить основой для разработки численных методов решения задач линейного программирования, в частности, обобщений метода обратной матрицы и двойственного симплекс-метода [9], [10], [13[.

Результаты п. 6 позволяют в дальнейшем предложить специальные методы решения задач линейного программирования с разряженной матрицей условий задачи.

2. **Параметрическое, нелинейное и стохастическое программирование.** Метод рассмотренный в п. 7, может служить основой для модификаций существующих методов параметрического линейного программирования, которые в свою очередь могут быть применены к задачам стохастического программирования [14].

Как известно, ряд методов решения задач нелинейного программирования основан на серии решения задач линейного программирования [15].

---

* В указанных здесь направлениях работы будут продолжены.

Поэтому рассматриваемый здесь метод может лечь в основу ее решения.

3. **Управляемые марковские процессы**. Известно (см. [16]), что „Ховард-метод" для решения задачи управляемого марковского процесса является специальным случаем задачи линейного программирования, который заключается в том, что на каждом шаге в симплексной процедуре заранее известно, какие вектора необходимо ввести и вывести из базиса. Другими словами, на каждом шаге, нам известно то множество K, которое играет существенную роль в обобщенном симплекс методе, при этом $k=r$ (см. п. 5).

Отсюда следует, что к этой специальной задаче линейного программирования может быть применен обобщенный метод полного исключения, рассмотренный в п. 3, где $K=\bigcup_{i=1}^{\tau} K_i$, $\tau \geqslant 1$. Этот подход позволяет учесть вопросы точности и скорости сходимости процесса при получении очередного опорного плана.

Наконец, отметим, что понятие и процесс ортогонализации играют существенную роль при решении различных задач (см., например, [3], гл. VI и [17], стр. 375—378, 401—403), поэтому естественно поставить вопрос о возможности применения к ним, в смысле обобщения, введенного здесь понятия и процесса частичной ортогонализации.

Основные положения данной работы доложены и опубликованы в [18], [19].

Ա. Դ. ԹՈՒՆԻԵՎ

ՈՒՂՂՈՐԴ ՎԵԿՏՈՐԻ ՄԵԹՈԴԸ ԵՎ ՆՐԱ ԿԻՐԱՌՈՒՄՆԵՐԸ

Աշխատանքում առաջարկված է գծային հանրահաշվական սիստեմների լուծման մի մեթոդ, որը հիմնված է ոչ թե մեկ ուղղորդ էլեմենտի ընտրության վրա, ինչպես արվում է, ասենք, Գաուսի բացառման մեթոդում, այլ միաժամանակ մի քանի ուղղորդ էլեմենտների՝ ուղղորդ վեկտորի ընտրության վրա։

Առաջին երկու պարագրաֆներում դիտարկված են առաջարկվող մեթոդի տեսական հիմունքները և ցույց է տրված, որ տվյալ մեթոդը կարող է դիտարկվել որպես բացառման և Գրամմա-Շմիդտի օրտոգոնալիզացման մեթոդների ընդհանրացում։

Տրված է վեկտորի նոր վերլուծություն ըստ գծայնորեն կախյալ վեկտորների, որ միակն է այստեղ դիտարկվող իմաստով։ Այլ կերպ ասած, ստացված է Ժորդանի լրիվ բացառման մեթոդի ընդհանրացումը։

Դիտարկված են ընդհանրացված բացառման մեթոդում սխալների կլորացման հարցերը և նրանց հետ կապված, տրված ճշտությամբ և արագությամբ գծային հանրահաշվական հավասարումների սիստեմների լուծման խնդիրը։

Առաջարկված է ուղղորդ վեկտորի հատկության վրա հիմնված պարամետրական մեթոդ, որը մեր կարծիքով կարող է կիրառվել գծային հանրահաշվական հավասարումների ոչ կայուն սիստեմների լուծման ժամանակ։

Մասնակի օրտոգոնոլիզացման մեթոդի համար դիտարկվում են մատրիցայի ոչ կրոյական էլեմենտների քանակի մինիմիզացման հարցերը։

Գծային ծրագրավորման խնդիրների լուծման համար առաջարկված է մոդիֆիկացված սիմպլեքս-մեթոդ, որը հիմնված է լրիվ բացառման ընդհանրացված մեթոդի վրա։

Վերջաբանում դիտարկվում են առաջարկված մեթոդի կիրառման այլ հնարավորություններ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. В. Романовский.* Алгоритмы решения экстремальных задач, М., 1977, с. 59—70.
2. *В. А. Булавский, Р. А. Звягина, М. А. Яковлева.* Численные методы линейного программирования. М., 1977, с. 26.
3. *Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева.* Вычислительные методы линейной алгебры. М., Физматгиз, 1963.
4. *J. H. Wilkinson·* Rounding erroes in algebraic processes Informat processing, 1960, 44—53, Discuts, 53.
5. *И. И. Москвитина.* Об ошибках округления при решении системы линейных уравнений методом ортогонализации. Ярославский государственный педагогический институт им. К. Д. Ушинского. Доклады на научных конференциях, том I, вып. 3, Ярославль, 1962, с. 104—108.
6. *В. В. Воеводин.* Вычислительные основы линейной алгебры. М., 1977, с. 30, 128—136.
7. *Р. Тьюарсон.* Разряженные матрицы, М., 1977.
8. *Г. У. Кун, А. У. Таккер.* Линейные неравенства и смежные вопросы. М., 1969, с. 51—53.
9. *Д. Б. Юдин* и *Е. Г. Гольдштейн.* Линейное программирование, М., 1963.
10. *С. Гасс.* Линейное программирование (методы и приложения), М., 1961.
12. *Л. В. Канторович.* Математические методы в организации и планировании производства, Л., 1939, с. 67.
13. *В. Г. Карманов.* Математическое программирование, М., 1975.
14. *А. Д. Туниев.* Об одном классе задач стохастического линейного программирования. Автореферат диссертации, Киев, 1969.
15. *Ю. М. Ермольев.* Методы решения нелинейных экстремальных задач. «Кибернетика», 1968, 4, с. 1—17.
16. *Х. Майн, С. Осаки.* Марковские процессы принятия решения, М., 1977.
17. *Г. Корн и Т. Корн.* Справочник по математике. М., 1970.
18. *А. Д. Туниев.* Об одной теореме теории линейных уравнений и ее применении. Труды международного симпозиума «Моделирование экономических процессов», М. ВЦ. АН СССР, 1975, с. 356—361.
19. *А. Д. Туниев.* Метод направляющего вектора и его применение. Сб. «Автоматизированные системы планирования и управления», Ереван, 1978, с. 122—129.