А. А. ШАГИНЯН

ОПТИМАЛЬНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ В СИСТЕМАХ ДИСКРЕТНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассмотрим пару множеств $(S; A)$, где S пространство состояний системы и A пространство управлений является подмножеством $\{S \times S\}$. Управление $(s; t)$ соответствует переводу системы из состояния s в состояние t.

Ограниченная функция $r: A \to R^+$ описывает доходы при таких переходах. Систему с доходами будем обозначать $(S; A; r)$, а без доходов — $(S; A)$.

Рассмотрим случай, когда пространство состояний счетно и пространство всевозможных решений, принимаемых в произвольном состоянии $A(s)$, непусто и конечно.

Конечная траектория p_k это последовательность $\{(s_0; s_1); \ldots; (s_{k-1}; s_k)\}$, где $(s_i; s_{i+1}) \in A$ при $i=0; \ldots, k-1$, индекс k указывает число элементарных дуг в траектории. Если $s_0 = s_k$ в p_k, то мы назовем эту траекторию циклом. Бесконечная траектория это последовательность $p = \{(s_0; s_1); (s_1 s_2), \ldots\}$, где $(s_i; s_{i+1}) \in A$ при $i=0, 1, \ldots$ С каждой траекторией ассоциируется поток поступлений в соответствии со значениями дуг траектории. Значением конечной траектории p_k будем считать величину $r(p_k) = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^i r(s_i; s_{i+1})$, где α коэффициент затухания (скидки) учитывает относительную предпочтительность различных моментов принятия решения. При $0 \leqslant \alpha < 1$ значение бесконечного пути p можно определить как предел значений конечных путей $r(p_k)$, где p_k k—шаговый отрезок траектории p при $k=0, 1, \ldots$. Этот предельный переход может быть применен при $0 \leqslant \alpha < 1$, однако при $\alpha \geqslant 1$ в общем случае $r(p_k)$ не сходится при $k \to \infty$. Следуя И. Дириксу в данной статье рассматривается случай $\alpha \geqslant 1$. Введем понятие модифицированного среднего значения для пути p_k определив его как

$$r(p_k) = r(p_k) \cdot (\alpha^k - 1)^{-1}. \tag{1}$$

Среднее значение $r'(p_k)$ определяется как

$$r'(p_k) = \frac{r(p^k)}{\sum_0^k \alpha^l}. \tag{2}$$

Модифицированное среднее значение бесконечного пути определяется как

$$\bar{r}(p)=\overline{\lim_{k\to\infty}}\ \bar{r}(p_k), \tag{3}$$

где p_k k—шаговые отрезки траектории p.

Под управлением будем понимать отображение $u_i: S\to A(s)$, которое в каждый момент времени i определяет, по какой дуге должна двигаться система. Так как управление полностью определяет все последующие решения для каждого начального состояния, то легко видеть, что для каждого управления возникает бесконечная траектория, начинающаяся из каждого исходного состояния. Далее будем считать, что начальное состояние системы зафиксировано.

Обозначим через $f(s) \sup\limits_{(p, s_0=s)} \bar{r}(p)$, где верхняя грань берется по всем траекториям, начинающимся из состояния s. Будем искать такие траектории p^*, что $\bar{r}(p^*)=f(s)$. Покажем, что оптимальные траектории существуют не всегда.

Пример 1. Пусть

$S=Z=\{1;\ 2;\ 3;\ldots\}$ $A(2k)=\{(2k;\ 2k+1);\ (2k;\ 2k+2)\}$ и

$A(2k+1)=\{(2k+1;\ 2k+1\}$ $r(2k;\ 2k+1)=r(2k;\ 2k+2)=0$ а

$$r(2k+1;\ 2k+1)=1-\frac{1}{k}.$$

В этой системе нет оптимального управления, так как $f(1)=1$, но нет ни одной траектории, на которой это значение достигается. Существенное различие случая $\alpha<1$ от $\alpha\geqslant 1$ заключается в том, что в первом случае важны решения принимаемые только в начале процесса, тогда как во втором случае важен только конец в смысле, указанном ниже.

Траектории $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$ будем называть (*) эквивалентными, если начиная с некоторого момента их последовательные вершины совпадают, то есть $s_i^{(1)}=s_{i+k}^{(2)}$ при $i>N$, где $s_i^{(1)}$ и $s_i^{(2)}$ соответственно вершины $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$, а k—постоянная. Ростком траекторий будем называть класс эквивалентности относительно отношения (*). Класс, к которому принадлежит траектория p, будем обозначать через $\tilde{p}$, а пространство ростков через B.

Функционал $\bar{r}(p)$ можно считать определенным на пространстве B.

Лемма 1. Если $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$ (*) эквивалентны, то $\bar{r}(p^{(1)})=\bar{r}(p^{(2)})$.

Доказательство. Пусть $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$ принадлежат одному классу $\tilde{p}\in B$, тогда при $i>N$ $s_i^{(1)}=s_{i+k}^{(2)}$. Обозначим через $p_{N,\infty}^{(e)}$ новую траекторию. $p_{N,\infty}^{(e)}=p_{(N+k)}^{(e)}$. Имеем $r'(p^{(1)})=\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, r'(p_k^{(1)})=\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, r'((p_{N,\infty}^{(1)})_k)=$ $=\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, r'((p_{N,\infty}^{(2)})_k)=r'(p^{(2)})$. Но $\bar{r}(p)=r'(p)(\alpha^k-1)^{-1}$, следовательно $\bar{r}(p^{(1)})=\bar{r}(p^{(2)})$.

Ростки $\tilde{p}^1$ и $\tilde{p}^2$ будем считать (**) эквивалентными, если для любых $p^{(1)}=(s_1^{(1)};\ s_2^{(1)};\ \ldots)\in\tilde{p}^{(1)}$; $p^{(2)}=(s_1^{(2)};\ s_2^{(2)};\ \ldots)\in\tilde{p}^{(2)}$ и любого $N>0$ существуют $i, j>N$ и конечные траектории $g^{(1)}=(g_1^{(1)};\ \ldots,\ g_{k_1}^{(1)})$; $g^{(2)}=(g_1^{(2)};\ \ldots;\ g_{k_2}^{(2)})$ на $(S;\ A)$ такие, что $g_1^{(1)}=s_i^{(1)}$; $g_{k_1}^{(1)}\in p^{(2)}$ и $g_1^{(2)}=s_j^{(2)}$; $g_{k_2}^{(2)}\in p^{(1)}$.

Лемма 2. Каждый класс эквивалентности в B по отношению (**) оптимизируем.

Доказательство. Обозначим через B_l классы (**) эквивалентности. Пусть $f_l(s)=\sup\bar{r}(p)=\sup\limits_{p\in B_l}\bar{r}(p_k)$, где p_k отрезок длины k траектории p. Возьмем k такое, что $\bar{r}(p_{k_1}^{(1)})\geqslant\bar{r}(p^{(1)})-\frac{1}{2}$. Соединим конечную вершину $p_{k_1}^{(1)}$ с $p^{(2)}$ конечной траекторией $g^{(1)}$ в силу (**) эквивалентности.

Теперь, воспользовавшись леммой 1, можем взять k_2 таким, что

$$\bar{r}(p_{k_1}^{(1)};\ g^{(1)};\ p_{j_2;k_2}^{(2)})\geqslant\bar{r}(p^{(2)})-\frac{1}{2^2}.$$

Продолжая последовательно этот процесс, получим траекторию $\omega=(p_{k_1}^{(1)};\ g^{(1)};\ p_{j_2;k_2}^{(2)};\ g^{(2)})$, такую, что $\bar{r}(\omega)=f_l(s)=\sup\limits_{p\in B_l}\bar{r}(p)$. Росток $p^{(1)}$ назовем минорантой ростка $p^{(2)}$, если сколь угодно далекие вершины $p^{(2)}$ могут быть соединены с $p^{(1)}$, но обратное невозможно. В этом случае $p^{(2)}$ будем называть мажорантой $p^{(1)}$. Два ростка $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$ будем называть несоединяемыми, если существует $N>0$, такое, что при любых $i;\ j>N$ не существует конечных путей, соединяющих $p_i^{(1)}$ с $p^{(2)}$ и $p_j^{(2)}$ с $p^{(1)}$. Совокупность минорант ростка p назовем компонентой p и обозначим $K(p)$.

Теорема. Система $(S;\ A;\ r)$ оптимизируема при произвольном выборе функции r тогда и только тогда, когда совместно выполняются следующие условия 1 и 2.

1. В системе существует не более чем конечное число несоединяемых $K(p)$ с точностью до (**) эквивалентности.

2. Каждый росток имеет не более чем конечное число (с точностью до (**) эквивалентности) мажорант.

Доказательство. Если условие 1 не выполняется, то существует последовательность ростков $p^{(1)};\ p^{(2)};\ \ldots$, такая, что никакие из входящих в нее ростков не могут быть соединены друг с другом. Очевидно, можно приписать дугам $(S;\ A)$ такие значения, чтобы $\bar{r}(p^{(i)})$ равнялась $1-\frac{1}{2^i}$, а значения остальных ростков не эквивалентных этим были бы равны нулю. Таким образом, в полученной системе не существует оптимальных траекторий. Если же не выполняется условие 2, то можно выбрать последовательность ростков

$p^{(1)}; p^{(2)}; \ldots$ так, что каждый росток $p^{(i)}$ является минорантой $p^{(i-1)}; \ldots$ $\ldots; p^{(1)}$.

Дугам $(S; A)$ можно приписать такие значения, чтобы значения ростков $p^{(i)}$ были равны $1-\frac{1}{2^i}$, а значения всех остальных ростков, не эквивалентных этим, были бы равны нулю. При таких значениях дуг $(S; A)$ система не содержит оптимальных траекторий.

Для доказательства достаточности припишем произвольным образом дугам $(S; A)$ значения $\overline{r}(i; j)$. Пусть $f(s)=\lim\limits_{i\to\infty}\overline{r}(p^{(i)})$, где $\overline{r}(p^{(i)})$ монотонная последовательность. Рассмотрим компоненты $K({}^1p^{(i)})$ ростков из этой совокупности, таких, что $r({}^1p^{(i)})\geqslant f(s)-\frac{1}{2}$. Достаточно считать, что таких ростков бесконечное число, так как в противном случае утверждение очевидно. В силу условия 1 бесконечное число $K({}^1p^{(i)})$ пересекается с $K({}^1p^{(i_1)})$ при некотором i_1. По допущению в $K({}^1p^{(i_1)})$ содержится бесконечное число ростков $\{{}^1p^{(i)}\}$ так как в силу условия 2 только конечное число ростков мажорирует ${}^1p^{(i_1)}$.

Рассмотрим теперь ростки $\{{}^2p^{(i)}\}$, такие, что ${}^2p^{(i)}\in K({}^1p^{(i_1)})$ и $r({}^2p^{(i)})\geqslant$ $\geqslant f(s)-\frac{1}{2^2}$. Достаточно рассмотреть случай, когда их также бесконечное число. Аналогично предыдущему получаем, что бесконечное число из ростков $\{{}^2p^{(i)}\}$ содержится в $K({}^2p^{(i_2)})$. Продолжая последовательно это построение, получаем последовательность ростков $\{{}^1p^{(i_1)}; {}^2p^{(i_2)}; {}^3p^{(i_3)}; \ldots\}$, такую, что ${}^{k+1}p^{(i_{k+1})}\in$ $\in K({}^kp^{(i_k)})$ и $r({}^kp^{(i_k)})\geqslant f(s)-\frac{1}{2^k}$. Теперь при помощи этих ростков построим оптимальную траекторию. Возьмем конечный отрезок ${}^1p_{n_1}^{(i_1)}$ ростка ${}^1p^{(i_1)}$ так, что $\overline{r}({}^1p_{n_1}^{(i_1)})\geqslant\overline{r}({}^1p^{(i)})-\frac{1}{2}$. По условию ${}^2p^{(i_2)}\in K({}^1p^{(i_1)})$ соединим этот кусок траектории ${}^1p^{(i_1)}$ с ${}^2p^{(i_2)}$ конечной траекторией g_1. Воспользовавшись теперь леммой 1, возьмем такой кусок ${}^2p_{n_2}^{(i_2)}$ траектории ${}^2p^{i_2}$, чтобы $\overline{r}({}^1p_{n_1}^{(i_1)}; g_1^{(2)}; {}^2p_{n_2}^{(i_2)})\geqslant r({}^2p^{(i_2)})-\frac{1}{2^2}$. Продолжая последовательно, далее построим траекторию $\omega=({}^1p_{n_1}^{(i_1)}; g_1; {}^2p_{n_2}^{(i_2)};$ $g_2; {}^3p_{n_3}^{(i_3)}; \ldots)$, такую, что $\overline{r}(\omega_{/k})=\overline{r}({}^1p_{n_1}^{(i_1)}; g_1; \ldots; {}^kp_{n_k}^{(i_k)})\geqslant f(s)-\frac{1}{2^{k-1}}$. Таким образом, $\overline{r}(\omega)=f(s)$ и ω является оптимальной траекторией.

Следствие 1. Если в системе $(S; A; r)$ пространство состояний конечно, то всегда существует оптимальная траектория. Будем говорить, что система $(S; A)$ связна в вершине s, если всякая конечная траектория, начинающаяся в s, может быть продолжена таким образом, чтобы она через конечное число шагов возвратилась в s.

Следствие 2. Если $(S; A)$ связна в вершине s, то существует оптимальная в s траектория $p(s)$.

Следствие 3. Если $(S; A)$ связна, то оптимальные траектории в произвольных вершинах $s \in S$ можно выбрать из одного класса $\widetilde{p}$ и $f(s) = \text{const}$.

Ա. Ա. ՇԱՀԻՆՅԱՆ

ՕՊՏԻՄԱԼ ԿԱՌԱՎԱՐՈՒՄՆԵՐ ԴԻՍԿՐԵՏ ԴԻՆԱՄԻԿ ԾՐԱԳՐԱՎՈՐՄԱՆ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐՈՒՄ

Հոդվածում դիտարկվում են դինամիկ ծրագրավորման $(S; A; r)$ *սիստեմներ, ուր* S*-ը վիճակների տարածությունն է, իսկ* $A \subset S \times S$ *հնարավոր կառավարումների տարածությունը։* $(i; j) \in A$ *նշանակում է, որ սիստեմը* i *վիճակից փոխադրվում է* j *վիճակը։ Ենթադրվում է, որ* S*-ը հաշվելի է։ Հնարավոր կառավարումների միջոցով ստացվում է հնարավոր ուղեծիրների տարածությունը՝* $\omega = (i_0, i_1, i_2, \ldots)$*, ուր* i_k k*-մոմենտում սիստեմի վիճակն է, իսկ* $(i_k, i_{k+1}) \in A$. *Նշանակենք* ω_k*-ով* ω*-ի վերջավոր մասը* $\omega_k = (i_0; \ldots; i_k)$. ω_k*-ի եկամուտն է հանդիսանում* $r(\omega_k) = \sum\limits_{l=0}^{k-1} \alpha^l r(s_l, s_{l+1})$ *մեծությունը, ուր* $\alpha > 1$։

Ուսումնասիրվում է հետևյալ խնդիրը՝ նկարագրել այն $(S; A)$ *զույգերը, որ յուրաքանչյուր* r*-ի համար սիստեմում գոյություն ունեն օպտիմալ կառավարումներ։ Ստացված է հետևյալ արդյունքը՝*

Թեորեմ։ Որպեսզի $(S; A; r)$ *սիստեմում* r*-ֆունկցիայի կամայական ընտրության դեպքում գոյություն ունենան օպտիմալ կառավարումներ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենան հետևյալ երկու պայմանները միաժամանակ։*

1. Գոյություն ունի ոչ ավելի քան վերջավոր հատ ուղեծիրների չմիացվող ծիլեր (**) էկվիվալենտության ճշտությամբ։

2. Յուրաքանչյուր ուղեծիրների ծիլը ունի վերջավոր հատ մաժորանտ (**) էկվիվալենտության ճշտությամբ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Вагнер*. Основы исследования операций т. 2, М., 1973.
2. *Y. Dirickx*. Deterministic discrete dynamic programming with discount factor greater than one: structure of optimal policies. Management Sci. vol. 20 № 1. 32—43, 1973.