ЧАСТЬ II

К. А. АБГАРЯН, Ф. П. ГРИГОРЯН

К СИНТЕЗУ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ СО СКАЛЯРНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

В ряде работ [1—4] рассмотрена задача: для вполне управляемой системы

$$\frac{dx}{dt}=Ax+Hu$$

построить скалярное управление $u=Bx$ (A, H, B—постоянные матрицы с размерами соответственно $n\times n$, $n\times 1$, $1\times n$) так, чтобы замкнутая система имела наперед заданный спектр $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_n^0$ ($\lambda_j^0 = \mathrm{const}$, $j=1, 2, \ldots, n$). Иными словами, построить матрицу B так, чтобы матрица $(A+HB)$ была подобна диагональной матрице с заданными диагональными элементами.

Аналогичная по смыслу задача для нестационарной системы

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+H(t)u, \quad u=B(t)x$$

(A, H, B — матрицы с размерами соответственно $n\times n$, $n\times m$, $m\times n$) в [5] сформулирована следующим образом: построить матрицу $B(t)$ так, чтобы матрица $[A(t)+H(t)B(t)]$ была кинематически подобна диагональной матрице, диагональными элементами которой служат заданные числовые функции $\lambda_1^0(t), \lambda_2^0(t), \ldots, \lambda_n^0(t)$, т. е. чтобы

$$\hat{K}^{-1}(A+HB)\hat{K}-\hat{K}^{-1}\frac{d\hat{K}}{dt}=\Lambda(t)\equiv\mathrm{diag}(\lambda_1^0(t), \lambda_2^0(t), \ldots, \lambda_n^0(t)),$$

при условии, что

$$|\lambda_\sigma^0(t)-\lambda_s^0(t)|\geqslant a>0 \quad (\sigma\neq s;\ \sigma, s=1, 2, \ldots, n),$$

где $\hat{K}$—некоторая невырожденная дифференцируемая матрица.

В работе [7] рассматривается система со скалярным управлением в случае $\lambda_j^0(t)\equiv 0$, $j=1, 2, \ldots, n$.

В настоящей статье решается задача синтеза управления в более общей постановке.

Задача. Пусть для нестационарной управляемой системы

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+H(t)u, \quad u=B(t)x, \tag{1}$$

где $A(t)$, $H(t)$, $B(t)$ — матрицы с размерами соответственно $n\times n$, $n\times 1$, $1\times n$; x — столбцовая матрица фазовых координат порядка $n\times 1$; u — скалярное управление, удовлетворяется следующее условие:

$$\operatorname{rang}\,[H(t),\ A(t)H(t),\ \ldots, A^{n-1}(t)H(t)]=n, \quad t\in[t_0, T]. \tag{2}$$

Требуется построить матрицу $B(t)$ так, чтобы матрица $[A(t)+ +H(t)B(t)]$ была кинематически подобна диагональной матрице, диагональными элементами которой служат заданные числовые функции

$$\underbrace{\mu_0(t),\ \mu_0(t), \ldots, \mu_0(t)}_{n_1};\ \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n_2};\ \mu_1(t), \mu_2(t), \ldots, \mu_{n_3}(t);\ n_1+n_2+n_3=n,$$

при

$$\begin{cases} |\mu_\sigma(t)-\mu_s(t)|\geqslant a>0 \quad (\sigma\neq s;\ \ \sigma, s=1, 2, \ldots, n_3) \\ \mu_0(t)\neq 0,\ |\mu_0(t)-\mu_s(t)|\geqslant a>0 \quad (s=1, 2, \ldots, n_3) \end{cases} \tag{3}$$

т. е., чтобы

$$\hat{K}^{-1}(A+HB)\hat{K}-\hat{K}^{-1}\frac{d\hat{K}}{dt}=\Lambda(t)\equiv\operatorname{diag}(\mu_0, \ldots, \mu_0;\ 0, \ldots, 0;\ \mu_1, \ldots, \mu_{n_3}).$$

или:

$$(A+HB)\hat{K}=\hat{K}\Lambda(t)+\frac{d\hat{K}}{dt}, \tag{4}$$

где $\hat{K}$ — некоторая невырожденная дифференцируемая матрица.

Решение задачи. Введем в рассмотрение систему более общего вида

$$\frac{dx}{dt}=[A(\tau)+H(\tau)B(\tau, \varepsilon)]x, \quad \tau=\varepsilon t, \tag{5}$$

содержащую положительный параметр ε, где матрицы $A(\tau)$, $H(\tau)$, $B(\tau, \varepsilon)$ имеют размеры соответственно $n\times n$, $n\times 1$, $1\times n$, с элементами дифференцируемые по τ на рассматриваемом промежутке $[\varepsilon t_0, \varepsilon t]$ любое нужное число раз.

Все построения, проводимые ниже, имеют относительно ε тождественный характер, и поэтому они сохраняют силу и при $\varepsilon=1$, когда системы (5) и (1) совпадают.

Матрицу $\hat{K}(\tau, \varepsilon)$ представим в виде

$$\hat{K}(\tau, \varepsilon)=\tilde{K}(\tau, \varepsilon)\chi(t), \tag{6}$$

где

$$\chi(t)=\operatorname{diag}(\chi_1(t),\ \chi_2(t),\ E_{n_3})$$

матрица преобразования к диагональному виду системы

$$\frac{dz}{dt}=J(\lambda)z,$$

матрица $J(\lambda)=\mathrm{diag}(J_1(0), J_2(0), \Lambda_1)$ представляет собой матрицу Жордана; $\Lambda_1=\mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n_3})$, E_{n_3}—единичная матрица порядка n_3.

Как показано в [6] (стр. 169—170).

$$\chi_i(t)=\exp(\Gamma_{n_i}\cdot t), \quad i=1, 2,$$

где Γ_{n_1} и Γ_{n_2}—матрицы сдвига порядка n_1 и n_2 (того же порядка, что и клетки Жордана $J_{n_1}(\lambda)$, $J_{n_2}(\lambda)$).

Матрицу $\hat{K}(\tau, \varepsilon)$ представим в блочном виде

$$\hat{K}(\tau, \varepsilon)=(\hat{K}_{(n_1)}(\tau, \varepsilon), \hat{K}_{(n_1+n_2)}(\tau, \varepsilon), \hat{K}_{(n)}(\tau, \varepsilon)),$$

где

$$\hat{K}_{(n_1)}(\tau,\varepsilon)=(\hat{K}_1(\tau,\varepsilon), \ldots, \hat{K}_{n_1}(\tau, \varepsilon)), \quad \hat{K}_{(n_1+n_2)}(\tau,\varepsilon)=(\hat{K}_{n_1+}.(\tau,\varepsilon), \ldots, \hat{K}_{n_1+n_2}(\tau,\varepsilon)),$$

$$\hat{K}_{(n)}(\tau, \varepsilon)=(\hat{K}_{n_1+n_2+1}(\tau, \varepsilon), \ldots, \hat{K}_n(\tau, \varepsilon)).$$

Матрицы $\hat{K}_{(n_1)}(\tau, \varepsilon)$, $\hat{K}_{(n_1+n_2)}(\tau, \varepsilon)$, $\hat{K}_{(n)}(\tau, \varepsilon)$ представим в виде

$$\hat{K}_{(n_1)}(\tau, \varepsilon)=(\tilde{K}_1(\tau, \varepsilon), \ldots, \tilde{K}_{n_1}(\tau, \varepsilon))\chi_1(t)=\tilde{K}_{(n_1)}\chi_1(t),$$

$$\hat{K}_{(n_1+n_2)}(\tau, \varepsilon)=(\tilde{K}_{n_1+1}(\tau, \varepsilon), \ldots, \tilde{K}_{n_1+n_2}(\tau, \varepsilon))\chi_2(t)=\tilde{K}_{(n_1+n_2)}\chi_2(t),$$

$$\hat{K}_{(n)}(\tau, \varepsilon)=\tilde{K}_{n_1+n_2+1}(\tau, \varepsilon), \ldots, \tilde{K}_n(\tau, \varepsilon))E_{n_3}=\tilde{K}_{(n)}(\tau, \varepsilon).$$

Тогда система уравнений (4) распадается на следующие подсистемы

$$(A+HB-\mu_0E)\tilde{K}_{(n_1)}=\tilde{K}_{(n_1)}\Gamma_{n_1}+\varepsilon\frac{dK_{(n_1)}}{d\tau}, \tag{7}$$

$$(A+HB)\tilde{K}_{(n_1+n_2)}=\tilde{K}_{(n_1+n_2)}\Gamma_{n_2}+\varepsilon\frac{d\tilde{K}_{(n_1+n_2)}}{d\tau}, \tag{8}$$

$$(A+HB)\tilde{K}_{(n)}=\tilde{K}_{(n)}\Lambda_1+\varepsilon\frac{dK_{(n)}}{d\tau}. \tag{9}$$

(Аргументы τ и ε для краткости записи опускаются).

Матрицы $\tilde{K}(\tau, \varepsilon)=(\tilde{K}_{(n_1)}, \tilde{K}_{(n_1+n_2)}, \tilde{K}_{(n)})$ и $b(\tau, \varepsilon)$ строим в виде формальных рядов.

$$\tilde{K}(\tau, \varepsilon)=K(\tau)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^kK^{[k]}(\tau), \quad b(\tau, \varepsilon)=b_0(\tau)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^kb_k(\tau). \tag{10}$$

Приравнивая в (7), (8), (9) члены, содержащие ε в одинаковых степенях, получим:

$$(A-\mu_0E+HB_0)K_{(n_1)}=K_{(n_1)}\Gamma_{n_1}, \tag{11}$$

$$(A-\mu_0E+HB_0)K^{[k]}_{(n_1)}+HB_kK_{(n_1)}=K^{[k]}_{(n_1)}\Gamma_{n_1}+D^{[k-1]}_{(n_1)} \tag{11'}$$

$$(A+HB_0)K_{(n_1+n_2)}=K_{(n_1+n_2)}\Gamma_{n_2}, \tag{12}$$

$$(A+HB_0)K^{[k]}_{(n_1+n_2)}+HB_kK_{(n_1+n_2)}=K^{[k]}_{(n_1+n_2)}\Gamma_{n_2}+D^{[k-1]}_{(n_1+n_2)} \tag{12'}$$

$$(A+HB_0)K_{(n)}=K_{(n)}\Lambda_1, \tag{13}$$

$$(A+HB_0)K_{(n)}^{[k]}+HB_kK_{(n)}=K_{(n)}^{[k]}\Lambda_1+D_{(n)}^{[k-1]}. \quad (k=1, 2, \ldots). \qquad (13')$$

Здесь

$$D_{(n_1)}^{[k-1]}=-H\sum_{l=1}^{k-1}B_lK_{(n_1)}^{[k-l]}+\frac{dK_{(n_1)}^{[k-1]}}{d\tau},$$

$$D_{(n_1+n_2)}^{[k-1]}=-H\sum_{l=1}^{k-1}B_lK_{(n_1+n_2)}^{[k-l]}+dK_{(n_1+n_2)}^{[k-1]}|d\tau,$$

$$D_{(n)}^{[k-1]}=-H\sum_{l=1}^{k-1}B_lK_{(n)}^{[k-l]}+dK_{(n)}^{[k-1]}|d\tau. \quad (k=1, 2, \ldots).$$

Уравнение (11) можно записать в следующем виде

$(A+HB_0)K_{(n_1)}=\mu_0K_{(n_1)}+K_{(n_1)}\Gamma_{n_1}=K_{(n_1)}(\mu_0E+\Gamma_{n_1})=K_{(n_1)}J(\mu_0).$

Из последнего равенства с учетом (12) и (13) имеем:

$$A+HB_0=K\cdot\operatorname{diag}(J(\mu_0),\ \Gamma_{n_2},\ \Lambda_1)M, \qquad (14)$$

где

$$M=K^{-1}, \quad M=\begin{pmatrix}M_{(n_1)}\\ M_{(n_1+n_2)}\\ M_{(n)}\end{pmatrix}.$$

Соотношение (14) показывает, что K есть матрица преобразования матрицы $(A+HB_0)$ к нормальной форме Жордана $J(\lambda)$, в случае, когда собственными значениями матрицы $(A+HB_0)$ являются

$$\underbrace{\mu_0, \ldots, \mu_0}_{n_1};\ \underbrace{0, \ldots, 0}_{n_2};\ \mu_1, \ldots, \mu_{n_3}.$$

Построение матрицы B_0 из условия равенства собственных значений матрицы $(A+HB_0)$ заданным числам, может быть проведено по соотношениям, указанным в работах [1—4].

При этом в соответствии с (11), (12), (13) или с (14) столбцы матрицы K определяются равенствами

$$\begin{array}{lll}(A+HB_0-\mu_0E)K_1=0, & (A+HB_0)K_{n_1+1}=0, & (A+HB_0)K_{\alpha+1}=\mu_1K_{\alpha+1},\\ (A+HB_0-\mu_0E)K_2=K_1, & (A+HB_0)K_{n_1+2}=K_{n_1+1}, & (A+HB_0)K_{\alpha+2}=\mu_2K_{\alpha+2}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots \qquad (15)\\ (A+HB_0-\mu_0E)K_{n_1}=K_{n_1-1}; & (A+HB_0)K_{\alpha}=K_{\alpha-1}; & (A+HB_0)K_n=\mu_{n_3}K_n.\end{array}$$

$$(\alpha=n_1+n_2)$$

Перейдем к построению $K^{[k]}$ и B_k $(k=1, 2, \ldots)$. $k-e-$ равенство (11′) эквивалентно системе уравнений

$$(A+HB_0-\mu_0E)K_1^{[k]}+HB_kK_1=D_1^{[k-1]},$$

$$(A+HB_0-\mu_0E)K_2^{[k]}+HB_kK_2=K_1^{[k-1]}+D_2^{[k-1]},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(A+HB_0-\mu_0E)K_{n_1}^{[k]}+HB_kK_{n_1}=K_{n_1-1}^{[k]}+D_{n_1}^{[k-1]}.$$

Умножим полученные равенства слева соответственно на E_n, $(A+HB_0-\mu_0E),\ldots,(A+HB_0-\mu_0E)^{n_1-1}$ и после сложения получим

$$(A+HB_0-\mu_0E)^{n_1}K_{n_1}^{[k]}+HB_kK_1+(A+HB_0-\mu_0E)HB_kK_2+\ldots+$$
$$+(A+HB_0-\mu_0E)^{n_1-1}HB_kK_{n_1}=d_1^{[k-1]}, \tag{16}$$

где

$$d_1^{[k-1]}=D_1^{[k-1]}+(A+HB_0-\mu_0E)D_2^{[k-1]}+\ldots+(A+HB_0-\mu_0E)^{n_1-1}D_{n_1}^{[k-1]}.$$

Равенство (14) можно представить в виде

$$A+HB_0-\mu_0E=K_{(n_1)}\Gamma_{n_1}M_{(n_1)}+K_{(n_1+n_2)}J_{n_2}(-\mu_0)M_{(n_1+n_2)}+K_{(n)}(\Lambda_1-\mu_0E_{n_3})M_{(n)}.$$

Из последнего и из соотношений приведенных в [6] (стр. 102, 115) для (16) имеем

$$M_{(n_1)}HB_kK_1+\Gamma_{n_1}M_{(n_1)}HB_kK_2+\ldots+\Gamma_{n_1}^{n_1-1}M_{(n_1)}HB_kK_{n_1}=M_{(n_1)}d_1^{[k-1]}. \tag{17}$$

Обозначим

$$W=[M_{(n_1)}H,\ \Gamma_{n_1}(M_{(n_1)}H),\ldots,\Gamma_{n_1}^{n_1-1}(M_{(n_1)}H)]=$$

$$=\begin{pmatrix} M_1H & M_2H & \ldots & M_{n_1}H \\ M_2H & M_3H & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ M_{n_1-1}H & M_{n_1}H & \ldots & 0 \\ M_{n_1}H & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Тогда (17) имеет вид

$$W\cdot\begin{pmatrix} B_kK_1 \\ B_kK_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ B_kK_{n_1} \end{pmatrix}=M_{(n_1)}d_1^{[k-1]}. \tag{19}$$

Из (18) следует, что

$$\det W=(-1)^{\delta}(M_{n_1}H)^{n_1},\quad \delta=\frac{(n_1+4)(n_1-1)}{2}.$$

В силу условия (2) можно доказать, что

$$M_{n_1}H\neq 0.$$

Отсюда следует, что равенство (19) разрешимо относительно

$$\begin{pmatrix} B_kK_1 \\ B_kK_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ B_kK_{n_1} \end{pmatrix}=W^{-1}M_{(n_1)}d_1^{[k-1]}. \tag{20}$$

Обозначим

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} W_1^{-1} \\ W_2^{-1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ W_{n_1}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Тогда (20) можно представить в виде:

$$B_k K_j = W_j^{-1} M_{(n_1)} d_1^{[k-1]} \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n_1).$$

Объединяя полученные равенства в одно матричное соотношение, получим

$$B_k \cdot (K_1, K_2, \ldots, K_n) = [W_1^{-1} M_{(n_1)} d_1^{[k-1]},\ W_2^{-1} M_{(n_1)} d_1^{[k-1]}, \ldots, W_{n_1}^{-1} M_{(n_1)} d_1^{[k-1]}]. \tag{21}$$

Из (14) имеем

$$A + HB_0 - \mu_0 E = K \cdot \operatorname{diag}(\Gamma_{n_1}, J_{n_2}(-\mu_0), \Lambda_1 - \mu_0 E_{n_3}) \cdot M. \tag{22}$$

Подставляя (22) в (11′), получим

$$K \cdot \operatorname{diag}(\Gamma_{n_1}, J_{n_2}(-\mu_0), \Lambda_1 - \mu_0 E_{n_3}) M K_{(n_1)}^{[k]} + HB_k K_{(n_1)} = K_{(n_1)}^{[k]} \Gamma_{n_1} + D_{(n_1)}^{[k-1]}.$$

Умножим полученное равенство слева на матрицу M, имеем

$$\operatorname{diag}(\Gamma_{n_1}, J_{n_2}(-\mu_0), \Lambda_1 - \mu_0 E_{n_3}) Q_{(n_1)}^{[k]} + MHB_k K_{(n_1)} = Q_{(n_1)}^{[k]} \Gamma_{n_1} + MD_{(n_1)}^{[k-1]}. \tag{23}$$

где

$$Q_{(n_1)}^{[k]} = MK_{(n_1)}^{[k]} = (Q_1^{[k]}, \ldots Q_{n_1}^{[k]}), \quad Q_\sigma^{[k]} = \begin{pmatrix} q_{1\sigma}^{[k]} \\ \cdot \\ \cdot \\ q_{n\sigma}^{[k]} \end{pmatrix}, \quad \sigma = 1,\ 2, \ldots,\ n_1.$$

Подставим значение $B_k K_{(n_1)}$ из (21) в (23) получим:

$$\operatorname{diag}(\Gamma_{n_1}, J_{n_2}(-\mu_0), \Lambda_1 - \mu_0 E_{n_3}) Q_{(n_1)}^{[k]} +$$
$$+ MH [W_1^{-1} M_{(n_1)} d_1^{[k-1]}, \ldots, W_{n_1}^{-1} M_{(n_1)} d_1^{[k-1]}] = Q_{(n_1)}^{[k]} \Gamma_{n_1} + MD_{(n_1)}^{[k-1]}.$$

Из этого равенства нетрудно получить соотношения последовательно определяющие столбцы матрицы $Q_{(n_1)}^{[k]}$:

$$\operatorname{diag}(\Gamma_{n_1}, J_{n_2}(-\mu_0), \Lambda_1 - \mu_0 E_{n_3}) Q_1^{[k]} = M[D_1^{[k-1]} - HW_1^{-1} M_{(n_1)} d_1^{[k-1]}], \tag{24}$$

$$\operatorname{diag}(\Gamma_{n_1}, J_{n_2}(-\mu_0), \Lambda_1 - \mu_0 E_{n_3}) Q_\sigma^{[k]} = Q_{\sigma-1}^{[k]} + M[D_\sigma^{[k-1]} - HW_\sigma^{-1} M d_1^{[k-1]}]. \tag{25}$$

$$(\sigma = 2,\ 3,\ \ldots,\ n_1).$$

Равенство (24) однозначно определяет все элементы первого столбца матрицы $Q_{(n_1)}^{[k]}$, кроме первого элемента $q_{11}^{[k]}$. В выборе этого элемента, так же, как и в выборе остальных элементов первой строки матрицы $Q_{(n_1)}^{[k]}$, сохраняется известный произвол. От функций $q_{1\sigma}^{(k)}$ ($\sigma = 1, \ldots, n_1$) требуется лишь дифференцируемость любое нужное число раз. Остальные столбцы матрицы $Q_{(n_1)}^{[k]}$ определяются равенствами (25).

С матрицей $Q^{[k]}_{(n_1)}$ матрица $K^{[k]}_{(n_1)}$ связана соотношением

$$K^{[k]}_{(n_1)}=KQ^{[k]}_{(n_1)}. \tag{26}$$

Равенство (12′) эквивалентно системе уравнений

$$(A+HB_0)K^{[k]}_{n_1+1}+HB_kK_{n_1+1}=D^{[k-1]}_{n_1+1},$$

$$(A+HB_0)K^{[k]}_{n_1+2}+HB_kK_{n_1+2}=K^{[k]}_{n_1+1}+D^{[k-1]}_{n_1+2},$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$(A+HB_0)K^{[k]}_{n_1+n_2}+HB_kK_{n_1+n_2}=K^{[k]}_{n_1+n_2-1}+D^{[k-1]}_{n_1+n_2}.$$

Умножим последние равенства слева соответственно на E_n, $(A+HB_0),\ldots,(A+HB_0)^{n_2-1}$ и после сложения получим

$$(A+HB_0)^{n_2}\cdot K^{[k]}_{n_1+n_2}+HB_kK_{n_1+1}+(A+HB_0)HB_kK_{n_1+2}+\ldots+$$
$$+(A+HB_0)^{n_2-1}HB_kK_{n_1+n_2}=d_2^{[k-1]}, \tag{27}$$

где

$$d_2^{[k-1]}=D^{[k-1]}_{n_1+1}+(A+HB_0)D^{[k-1]}_{n_1+2}+\ldots+(A+HB_0)^{n_2-1}D^{[k-1]}_{n_1+n_2}.$$

Из (14) следует

$$A+HB_0=K_{(n_1)}J_{n_1}(\mu_0)M_{(n_1)}+K_{(\alpha)}\Gamma_{n_2}M_{(\alpha)}+K_{(n)}\Lambda_1M_{(n)},\ (\alpha=n_1+n_2). \tag{28}$$

Подставив выражения $(A+HB_0)$ из (28) в (27), преобразуя аналогично (16) и учитывая, что $\Gamma^{n_2}_{n_2}=0$, получим

$$B_k(K_{n_1+1},K_{n_1+2},\ldots,K_\alpha)=[\Omega_1^{-1}M_{(\alpha)}d_2^{[k-1]},\ \Omega_2^{-1}M_{(\alpha)}d_2^{[k-1]},\ \ldots,\ \Omega_{n_2}^{-1}M_{(\alpha)}d_2^{[k-1]}], \tag{29}$$

где $\Omega_1^{-1},\ldots,\Omega_{n_2}^{-1}$—строки Ω^{-1},

Ω^{-1}—обратная матрица Ω,

$$\Omega=[M_{(\alpha)}H,\ \Gamma_{n_2}(M_{(\alpha)}H),\ \ldots,\ \Gamma^{n_2-1}_{n_2}(M_{(\alpha)}H)],$$

$$\det\Omega=(-1)^\gamma(M_\alpha H)^{n_2},\quad \gamma=\frac{(n_2+4)(n_2-1)}{2},\quad \alpha=n_1+n_2,$$

$M_{n_1+n_2}H\neq0$ в силу условия (2).

Подставляя (28) и (29) в (12′) и умножая полученное равенство слева на матрицу M, имеем:

$$\mathrm{diag}\,(J_{n_1}(\mu_0),\ \Gamma_{n_2},\ \Lambda_1)Q^{[k]}_{(n_1+n_2)}+MH[\Omega_1^{-1}M_{(\alpha)}d_2^{[k-1]},\ \ldots,\ \Omega_{n_2}^{-1}M_{(\alpha)}d_2^{[k-1]}]=$$
$$=Q^{[k]}_{(\alpha)}\Gamma_{n_2}+MD^{[k-1]}_{(\alpha)},\quad(\alpha=n_1+n_2),$$

где

$$Q^{[k]}_{(n_1+n_2)}=MK^{[k]}_{n_1+1}=(Q^{[k]}_{n_1+1},\ldots,Q^{[k]}_{n_1+n_2});\ Q^{[k]}_\sigma=\begin{pmatrix}q^{[k]}_{1\sigma}\\ \cdot\\ \cdot\\ q^{[k]}_{n\sigma}\end{pmatrix},\ \sigma=n_1+1,\ldots,n_1+n_2$$

Из полученного равенства вытекают соотношения, последовательно определяющие столбцы матрицы $Q^{[k]}_{(n_1+n_2)}$:

$$\operatorname{diag}(J_{n_1}(\mu_0), \Gamma_{n_2}, \Lambda_1)Q^{[k]}_{n_1+1} = M[D^{[k-1]}_{n_1+1} - H\Omega_1^{-1}M_{(\alpha)}d_2^{[k-1]}], \tag{30}$$

$$\operatorname{diag}(J_{n_1}(\mu_0), \Gamma_{n_2}, \Lambda_1)Q^{[k]}_{\sigma} = Q^{[k]}_{\sigma-1} + M[D^{[n-1]}_{\sigma} - H\Omega_{\sigma}^{-1}M_{(\alpha)}d_2^{[k-1]}]. \tag{31}$$

$$(\alpha = n_1 + n_2, \quad \sigma = n_1 + 2, \ldots, n_1 + n_2).$$

Равенства (30) и (31) однозначно определяют все элементы матрицы $Q^{[k]}_{(n_1+n_2)}$, кроме $q^{[k]}_{n_1+1,\sigma}$ — элементов (n_1+1)-ой строки. $q^{[k]}_{n_1+1,\sigma}$ — произвольное, любое нужное число раз дифференцируемой функции.

С матрицей $Q^{[k]}_{(n_1+n_2)}$ матрица $K^{[k]}_{(n_1+n_2)}$ связана соотношением

$$K^{[k]}_{(n_1+n_2)} = KQ^{[k]}_{(n_1+n_2)}. \tag{31'}$$

Преобразуя равенство (13′) аналогично (12′), получим

$$\operatorname{diag}(J_{n_1}(\mu_0), \Gamma_{n_2}, \Lambda_1)\, Q^{[k]}_{(n)} + MHB_kK_{(n)} = Q^{[k]}_{(n)}\Lambda_1 + MD^{[k-1]}_{(n)},$$

где

$$Q^{[k]}_{(n)} = MK^{[k]}_{(n)} = (Q^{[k]}_{n_1+n_2+1}, \ldots, Q^{[k]}_{n}), \quad Q^{[k]}_{\sigma} = \begin{pmatrix} q^{[k]}_{1\sigma} \\ \cdot \\ \cdot \\ q^{[k]}_{n\sigma} \end{pmatrix}, \quad \sigma = n_1 + n_2 + 1, \ldots, n.$$

Эта система распадается на следующие подсистемы:

$$\operatorname{diag}(J_{n_1}(\mu_0), \Gamma_{n_2}, \Lambda_1)Q^{[k]}_{\sigma} + MHB_kK_{\sigma} = \mu_{\sigma}Q^{[k]}_{\sigma} + MD^{[k-1]}_{\sigma}, \tag{32}$$

где $\mu_{\sigma} = \mu_{\alpha+i}$, $\sigma = \alpha + i$, $i = 1, 2, \ldots, n_3$, $\alpha = n_1 + n_2$.

Матрицу $Q^{[k]}_{\sigma}$ представим в блочном виде:

$$Q^{[k]}_{\sigma} = (q^{[k]}_{1\sigma}, \ldots, q^{[k]}_{n_1\sigma};\ q^{[k]}_{n_1+1,\sigma}, \ldots, q^{[k]}_{\alpha\sigma};\ q^{[k]}_{\alpha+1,\sigma}, \ldots, q^{[k]}_{n\sigma})'$$

(знак „штрих“ означает транспонированную матрицу).

Тогда равенство (32) эквивалентно следующей подсистеме:

$$J(\mu_0) \cdot (q^{[k]}_{1\sigma}, \ldots, q^{[k]}_{n_1\sigma})' + M_{(n_1)}HB_kK_{\sigma} = \mu_{\sigma}(q^{[k]}_{1\sigma}, \ldots, q^{[k]}_{n_1\sigma})' + M_{(n_1)}D^{[k-1]}_{\sigma} \tag{33}$$

$$\Gamma_{n_2}(q^{[k]}_{n_1+1,\sigma}, \ldots, q^{[k]}_{\alpha\sigma})' + M_{(\alpha)}HB_kK_{\sigma} = \mu_{\sigma} \cdot (q^{[k]}_{n_1+1,\sigma}, \ldots, q^{[k]}_{\alpha\sigma})' + M_{(\alpha)}D^{[k-1]}_{\sigma} \tag{34}$$

$$\Lambda_1 \cdot (q^{[k]}_{\alpha+1,\sigma}, \ldots, q^{[k]}_{n\sigma})' + M_{(n)}HB_kK_{\sigma} = \mu_{\sigma}(q^{[k]}_{\alpha+1,\sigma}, \ldots, q^{[k]}_{n\sigma})' + M_{(n)}D^{[k-1]}_{\sigma}. \tag{35}$$

$$(\sigma = \alpha + i, \quad i = 1, 2, \ldots, n_3, \quad \alpha = n_1 + n_2).$$

Решение системы (35) приведено в работах [5, 8], где выражение для B_kK_{σ} и $q^{[k]}_{s\sigma}$ определяется равенствами

$$B_kK_{\sigma} = \frac{M_{\sigma}D^{[k-1]}_{\sigma}}{M_{\sigma}H} \quad (\sigma = \alpha + 1, \ldots, n), \tag{36}$$

где $M_{\sigma}H \neq 0$ в силу условия (2).

$$B_k(K_{\alpha+1}, K_{\alpha+2}, \ldots, K_n) = \left(\frac{M_{\alpha+1}D^{[k-1]}_{\alpha+1}}{M_{\alpha+1}H}, \ldots, \frac{M_nD^{[k-1]}_{n}}{M_nH}\right), \tag{37}$$

$$q^{[k]}_{s\sigma} = \frac{M_s}{\mu_s - \mu_{\sigma}}\left(E_n - \frac{HM_{\sigma}}{M_{\sigma}H}\right)D^{[k-1]}_{\sigma} \quad s \neq \sigma;\ s, \sigma = \alpha + 1, \ldots, n). \tag{38}$$

Подставляя (36) в (33), (34) и учитывая, что $[J_{n_1}(\mu_0)-\mu_\sigma E_{n_1}]$ и $J_{n_2}(-\mu_\sigma)$ невырожденные матрицы (см. усл. (3)), получим соответственно

$$(q_{1\sigma}^{[k]}, \ldots, q_{n_1\sigma}^{[k]})' = (J_{n_1}(\mu_0) - \mu_\sigma \mathrm{E}_{n_1})^{-1} M_{(n_1)}\left(\mathrm{E}-\frac{HM_\sigma}{M_\sigma H}\right)D_\sigma^{[k-1]}, \tag{39}$$

$$(q_{n_1+1,\sigma}^{[k]}, \ldots, q_{\alpha\sigma}^{[k]})' = (J_{n_2}(-\mu_\sigma)^{-1} M_{(\alpha)}\left(\mathrm{E}-\frac{HM_\sigma}{M_\sigma H}\right)D_\sigma^{[k-1]}, \tag{40}$$

$$\sigma=\alpha+1, \ldots, n).$$

Следовательно, столбцы матрицы $Q_{(n)}^{[k]}$ определяются равенствами (38), (39) и (40), кроме элементов $q_{\sigma\sigma}^{[k]}$ $(\sigma=\alpha+1, \ldots, n)$. От функций $q_{\sigma\sigma}^{[k]}$ требуется дифференцируемость любого нужного числа раз.

С матрицей $Q_{(n)}^{[k]}$ матрица $K_{(n)}^{[k]}$ связана соотношением

$$K_{(n)} = KQ_{(n)}^{[k]}. \tag{41}$$

Объединяя выражения (21), (29), (36) в одно матричное соотношение и разрешая относительно B_k, получим

$$\begin{gathered}B_k = [\,W_1^{-1}M_{(n_1)}d_1^{[k-1]},\ W_2^{-1}M_{(n_1)}d_1^{[k-1]}, \ldots, W_{n_1}^{-1}M_{(n_1)}d_1^{[k-1]};\\ \Omega_1^{-1}M_{(\alpha)}d_2^{[k-1]},\ \Omega_2^{-1}M_{(\alpha)}d_2^{[k-1]}, \ldots, \Omega_{n_2}^{-1}M_{(\alpha)}d_2^{[k-1]};\\ \frac{M_{\alpha+1}D_{\alpha+1}^{[k-1]}}{M_{\alpha+1}H},\ \frac{M_{\alpha+2}D_{\alpha+2}^{[k-1]}}{M_{\alpha+2}H}, \ldots, \frac{M_n D_n^{[k-1]}}{M_n H}\Big]\,M.\end{gathered} \tag{42}$$

Из равенства (26), (31′), (41) следует, что

$$K^{[k]} = KQ^{[k]}, \tag{43}$$

где

$$Q^{[k]} = (Q_{(n_1)}^{[k]},\ Q_{(n_1+n_2)}^{[k]},\ Q_{(n)}^{[k]}).$$

Таким образом, соотношения (15), (42) и (43) позволяют определить формальные разложения $\widetilde{K}(\tau, \varepsilon)$ и $B(\tau, \varepsilon)$. Сохраняя в этих формальных разложениях конечное число первых членов, можно получить приближенные выражения для матриц $\widetilde{K}(\tau, \varepsilon)$ и $B(\tau, \varepsilon)$ [6].

Следствие. В силу (4) и (6) формальное решение уравнения (5) представляется в виде

$$x = \widetilde{K}(\tau, \varepsilon)\chi(t)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\Lambda(t)\,dt\right)\cdot C, \tag{44}$$

где C—столбцовая матрица произвольных постоянных. В соответствии с этим, заменяя $\widetilde{K}(\tau, \varepsilon)$ и $B(\tau, \varepsilon)$ их приближенными выражениями (конечными суммами вместо формальных разложений), будем иметь приближенное решение системы (5) в форме (44).

Կ. Ա. ԱՐԴԱՐՅԱՆ, Յ. Գ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

ՍԿԱԼՅԱՐ ԿԱՌԱՎԱՐՈՒՄՈՎ ԳԾԱՅԻՆ ՈՉ-ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՍԻՆԹԵԶԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ներկա աշխատանքում լուծված է ավելի ընդհանուր դեպքում կառավարման սինթեզի վերաբերյալ հետևյալ խնդիրը։

Խնդիր։ Դիցուք, տրված է հետևյալ գծային ոչ-ստացիոնար հավասարումների համակարգը

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + h(t)u, \quad u = b(t)x,$$

որտեղ x-ը փազային կոորդինատների սյուն մատրիցա է $n \times 1$ կարգի, u-ն սկալյար կառավարումն է, $A(t)$, $h(t)$, $b(t)$-ն մատրիցաներ են համապատասխանաբար $n \times n$, $n \times 1$, $1 \times n$ կարգի։

Տրված է հետևյալ պայմանը, որ

$$\operatorname{rang}\left[h(t), A(t)h(t), \ldots, A^{n-1}(t)h(t)\right] = n, \quad t \in [t_0, T]$$

պահանջվում է կառուցել $b(t)$ մատրիցան այնպես, որ $[A(t)+h(t)b(t)]$ մատրիցան կինեմատիկորեն նման լինի անկյունագծային մատրիցայի, որի համար որպես անկյունագծային էլեմենտներ հանդիսանում են հետևյալ նախապես տրված թվային ֆունկցիաները՝

$$\underbrace{\mu_0(t), \mu_0(t), \ldots, \mu_0(t)}_{n_1};\ \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n_2};\ \mu_1(t), \mu_2(t), \ldots, \mu_{n_3}(t);\ n_1 + n_2 + n_3 = n,$$

երբ

$$\left.\begin{array}{l} |\mu_\sigma(t) - \mu_s(t)| \geqslant a > 0 \quad (\sigma \neq s;\ \sigma, s = 1, 2, \ldots, n_3), \\ \mu_0(t) \neq 0, \quad |\mu_0(t) - \mu_s(t)| \geqslant a > 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, n_3)\text{:} \end{array}\right\}$$

Այսինքն

$$\hat{K}^{-1}(A + hb)\hat{K} - \hat{K}^{-1}\frac{d\hat{K}}{dt} = \operatorname{diag}\left(\underbrace{\mu_0, \ldots, \mu_0}_{n_1};\ \underbrace{0, \ldots, 0}_{n_2};\ \mu_1, \ldots, \mu_{n_3}\right),$$

որտեղ $\hat{K}$-ն որևէ չվերասերված դիֆերենցելի մատրիցա է։

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. И. Зубов.* Теория оптимального управления судном и другими подвижными объектами. Л., 1966.
2. *W. M. Wonham.* On Pole Assignment in Multi—Ynput Controllable Linear Systems. IEEE, Trans Automatic control, vol AC—12, p.p. 660—665, December 1967.
3. *Е. А. Гальперин.* Синтез линейных управлений в стационарной линейной системе. Изв. АН СССР. «Техническая кибернетика», 1968, № 4.
4. E. Z. Davison. On Pol Assignment in Multivariable Linear sistems. IEEE. Trans Automatic Coutrol. vol AC—13, p.p. 747—748, December 1968.

5. *К. А. Абгарян.* Один подход к решению задач анализа и синтеза линейных систем. ДАН СССР, т. 232, 1977, № 5.
6. *К. А. Абгарян.* Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем. М., 1973.
7. *К. А. Абгарян, Ф. П. Григорян.* К синтезу линейных нестационарных систем. Методы теории дифференциальных уравнений и их приложения. Тематический сб. научных трудов МАИ, М., вып. 419, 1977.
8. *Э. Б. Жирнова.* Асимптотический метод синтеза управления нестационарным процессом. «Автоматика и телемеханика», 1975, № 9.
9. *Г. Д'Анжело.* Линейные системы с переменными параметрами. Анализ и синтез. М., 1974.