ТЕОРИЯ АЛГОРИФМОВ

А. А. МОКАЦЯН

О w-МИТОТИЧЕСКИХ, НО НЕ btt-МИТОТИЧЕСКИХ РЕКУРСИВНО ПЕРЕЧИСЛИМЫХ МНОЖЕСТВАХ

В статье доказаны следующие утверждения:

а) Существует w-митотическое р. п. множество степени $0'$, не имеющее btt-митотического разложения.

б) Для произвольной нерекурсивной р. п. степени d существует w-митотическое р. п. множество, не имеющее btt-митотического разложения и имеющее степень $\leqslant d$.

Мы будем пользоваться терминологией и понятиями, введенными в [1], [2].

Определение. (См. [1]), Рекурсивно перечислимое, р. п.) множество A называется T-митотическим, если оно является объединением двух непересекающихся р. п. множеств, имеющих ту же степень неразрешимости (относительно $\leqslant_T$), что и множество A.

Обобщим это понятие.

Пусть $\leqslant_r$ произвольная сводимость, обладающая свойством рефлексивности и транзитивности.

Определение. Р. п. множество A называется r-митотическим (митотическим относительно $\leqslant_r$), если оно является объединением двух непересекающихся р. п. множеств, имеющих ту же степень неразрешимости относительно $\leqslant_r$, что и множество A.

Известно, что существует не T-митотическое р. п. множество [3].

Определение. Пусть $A \subseteq N$, тогда если $n \in A$, то $A(n) = 0$, и если $n \notin A$ то, $A(n) = 1$.

Пусть $W = \{W_i\}_{i \in N}$ допустимая нумерация р. п. множеств. W_i^s— конечное подмножество W_i, перечисленное за s шагов (в стандартном перечислении).

Пусть $\varphi = \{\varphi_i\}_{i \in N}$— допустимая нумерация частично-рекурсивных функций (ч. р. ф.).

$$\varphi_i^s(x) = \begin{cases} \varphi(x), \text{ если вычисление } \varphi(x) \text{ требует менее } s+1 \text{ шагов} \\ \text{расходится, в противном случае.} \end{cases}$$

Если A_0 и A_1— р. п. множества, $A_0 \cup A_1 = A$ и $A_0 \cap A_1 = \varnothing$, то назовем (A_0, A_1) р. п. разложением A.

Скажем, что $(A_0, A_1, \Theta_0, \Theta_1)$ есть r-митотическое разложение A, если (A_0, A_1) есть р. п. разложение A, $A \leqslant_r A_0$ посредством Θ_0, $A \leqslant_r A_1$ посредством Θ_1 (где Θ_0, Θ_1 — функции или операторы, в частности, для m-митотического разложения Θ_0, Θ_1 — о. р. функции, для T-митотического разложения Θ_0, Θ_1 — рекурсивные операторы).

Таким образом, если не существует r-митотического разложения множества A, то A является не r-митотическим.

Очевидно, что все одноэлементные множества не m-митотичны (т. е. не митотичны относительно $\leqslant_m$) и все рекурсивные неодноэлементные множества являются m-митотическими.

Теорема 1. Существует не одноэлементное w-митотическое р. п. множество, которое не имеет m-митотического разложения.

Доказательство. Для достижения не m-митотичности используется техника, описанная в [1], [3].

Пусть h рекурсивная функция, отображающая N на N^4. Обозначим через $(Y_i, Z_i, \eta_i, \psi_i)$ четверку $(W_{i_0}, W_{i_1}, \varphi_{i_2}, \varphi_{i_3})$, где $h(i) = (i_0, i_1, i_2, i_3)$.

Определение. Если A—р. п. множество, то скажем, что не m-митотическое условие порядка i удовлетворяется для A, если $(Y_i, Z_i, \eta_i, \psi_i)$ не является m-митотическим разложением A.

Ясно, что A не имеет m-митотического разложения, если не m-митотическое условие порядка i удовлетворяется для всех i.

Будем строить требуемое множество A по этапам. На каждом этапе s A^s будет конечным, $A^s \subseteq A^{s+1}$ и $A = \bigcup_{s \in N} A^s$.

Определение. $(Y_i, Z_i, \eta_i, \psi_i)$ угрожает A посредством x на этапе s, если

а) $Y_i^s \cap Z_i^s = \varnothing$;

б) $(Y_i^s \cup Z_i^s)(m) = A^s(m)$ для всех $m \leqslant x$;

в) $A^s(m) = Y_i^s(\eta_i^s(m)) \equiv A^s(m) = Z_i^s(\psi_i^s(m))$, для всех $m \leqslant x$.

Определим множество $C_{i,x,s}$ (для произвольных i, x, s).

Заметим, что если $(Y_i, Z_i, \eta_i, \psi_i)$ угрожает A посредством x на этапе s, то $\eta_i^s(m)$ и $\psi_i^s(m)$ определены для всех $m \leqslant x$.

Лемма. Если $(Y_i, Z_i, \eta_i, \psi_i)$ угрожает A посредством x на этапе s, $x \in A - A^s$ и $A(m) = A^s(m)$ для всех $m \neq x$ таких, что $m \in C_{i,x,s}$, то не m-митотическое условие порядка i удовлетворяется для A.

Доказательство. Очевидно, что если не m-митотическое условие порядка i не удовлетворяется для A и x — произвольное число, то существует этап t такой, что для всех $s \geqslant t$ $(Y_i, Z_i, \eta_i, \psi_i)$ угрожает A посредством x на этапе s.

Таким образом, если мы докажем, что при выполнении условий леммы не существует $y \geqslant x$ и $s'' \geqslant s'$ (где $s' = \mu t(x \in A^t)$) таких, что

$(Y_i, Z_i, \tau_{i_i}, \psi_i)$ угрожает A посредством y на этапе s'', лемма будет доказана.

Пусть $y \geqslant x$ и $s'' > s'$ и $(Y_i, Z_i, \tau_{i_i}, \psi_i)$ угрожает A посредством y на этапе s''.

Значит $Y_i^{s''} \cap Z_i^{s''} = \varnothing$, и x не может принадлежать и $Y_i^{s''}$ и $Z_i^{s''}$ одновременно. Пусть $x \bar{\in} Y_i^{s''}$. Тогда, если $\tau_{i_i}(x) = x$, то $Y_i^{s''}(\tau_{i_i}(x)) = Y^s(\tau_{i_i}(x))$, в остальных случаях по определению $Y_i^{s''}(\tau_{i_i}(x)) = Y_i^s(\tau_{i_i}(x))$.

Имеем $A^s(x) = Y_i^s(\tau_{i_i}(x)) = Y_i^{s''}(\tau_{i_i}(x)) = A^{s''}(x)$.

Но так как $x \in A^{s''} - A^s$, $A^s(x) \neq A^{s''}(x)$.

Получили противоречие. Лемма доказана.

Чтобы удовлетворить немитотическое условие порядка i для A, делаем следующее. Выберем число x в дополнении A^s (на некотором этапе s) для внесения в A, если $(Y_i, Z_i, \tau_{i_i}, \psi_i)$ будет угрожать A посредством x в некоторый момент. Если $(Y_i, Z_i, \tau_{i_i}, \psi_i)$ никогда не угрожает A посредством x, то непременно условие удовлетворится.

С другой стороны, если $(Y_i, Z_i, \tau_{i_i}, \psi_i)$ угрожает A посредством x на этапе t, то вносим x в A на этапе $t+1$ и после этапа t не вносим в A чисел, принадлежащих $C_{i, x, t}$.

Для построения требуемого множества A строим функцию $\lambda isx(i, s)$, которая обладает тем свойством, что $\lim_s x(i, s)$ играет ту же роль, что и вышеуказанное число x (т. е. для любого i с помощью числа $\lim_s x(i, s)$ мы удовлетворяем немитотическое условие порядка i). Функция $\lambda isx(i, s)$ будет обладать следующими свойствами

а) $\forall i \exists t \forall s (s \geqslant t \Rightarrow !x(i, s) \& x(i, s+1) \geqslant x(i, s))$;

б) $x(i, s+1) > x(i, s) \Rightarrow x(i, s+1) \in \overline{A^{s+1}}$;

в) $\lim_s x(i, s)$ существует для любого i;

г) $\forall i \neg \exists s \forall s' > s$ $((Y_i, Z_i, \tau_{i_i}, \psi_i)$; угрожает A посредством $\lim_s (i, s)$ на этапе $s')$;

д) $\forall i \forall s \exists n (x(i, s) = \alpha(n))$,

где

$$\alpha(0) = 2$$

$$\alpha(n+1) = \alpha(n) + 4(n+1) + 2$$

Положим

$$C^1_{i, s+1} = \varnothing,$$

если $x(i, s+1) \bar{\in} A^{s+1}$

$$C^1_{i, s+1} = \{x \mid x \in C_{i, x(i, s+1), s+1}\},$$

если $x(i, s+1) \in A^{s+1} - A^s$ и

$$C^1_{i, s} = C^1_{i, s+1},$$

если $x(i, s) = x(i, s+1)$

Обозначим $S_i = [\alpha(i), \dots, \alpha(i+1)-1]$ $(i = 0, 1, 2, \dots)$

Пусть y, m — натуральные числа такие, что $y \in S_m$.

Скажем, что y не удерживается на этапе s, если

$$y \in \overline{A^s} \,\&\, \neg \exists i (x(i, s) = y) \,\&\, (\exists i (i \leqslant m \,\&\, x(i, s) \in S_m \,\&$$
$$\neg \exists j (j < i \,\&\, y \in C^1_{j,s})) \vee (\neg \exists i (i \leqslant m \,\&\, x(i, s) \in S_m) \,\&$$
$$\& \neg \exists j (j < m \,\&\, y \in C^1_{j,s}))).$$

Условие (д) нужно, чтобы обеспечить выполнение следующего требования: $\forall i, s$ (в отрезке $[x(i, s) = \alpha(n), \dots, \alpha(n+1)-1]$ найдется такое нечетное число, которое не удерживается на этапе s).

Опишем процесс построения A, $\lambda i, sx(i, s)$.

Этап 0. $A^0 = \{0, 1\}$, $x(0, 0) = 2$

Этап $n+1$. Обозначим $Q_{n+1} = \{x(i_1, n), \dots, x(i_{k_0}, n)\} = \{x(i, n) \mid (Y_i, Z_i, \eta_i, \psi_i)$ угрожает A посредством $x(i, n)$ на этапе $n\}$, причем $i_1 < i_2 < \dots < i_{k_0}$.

Если $i \leqslant n \,\&\, x(i, n) \overline{\in} Q_{n+1}$, то положим $x(i, n+1) = x(i, n)$.

Если $x(i_1, n)$ не удерживается на этапе n, то положим $x(i_1, n+1) = x(i_1, n)$ и $x(i_1, n+1) \in A^{n+1}$.

Пусть $x(i_1, n+1) \in S_{l_{i_1}}$. Найдем $a_{i_1} = \mu z$ (z нечетно $\& z \in S_{l_{i_1}} \& z$ не удерживается на этапе n).

Положим $a_{i_1} \in A^{n+1}$.

Если же $\exists j (j < i_1 \,\&\, x(i_1, n) \in C^1_{l,n})$ (т. е. $x(i_1, n)$ удерживается на этапе $n+1$), то положим $x(i_1, n+1) = \alpha(m_{i_1})$, где $m_{i_1} = \mu l$ $(l > i_1 \,\&$ $\& \forall y (y \in S_l \Rightarrow y$ не удерживается на этапе $n)$.

Для всех p таких, что $x(p, n) \in Q_{n+1} \,\&\, p > i_1$ сделаем следующее.

Пусть $p = i_q$. Обозначим

$$Q^p_{n+1} = \{x(i, n) \mid x(i, n) \in Q_{n+1} \,\&\, i < p\}$$
$$E^p_{n+1} = \{x(i, n) \mid x(i, n) \in Q^p_{n+1} \,\&\, x(i, n) \in A^{n+1}\}$$
$$G^p_{n+1} = \{x(i, n) \mid x(i, n) \in A^n \,\&\, \exists j (j < i \,\&\, x(j, n+1) \in E^p_{n+1} \,\&$$
$$\& (x(j, n+1) \in C^1_{l,n} \vee \exists y (y \neq x(j, n+1) \,\&\, \exists m (x(j, n+1) \in S_m \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y \in S_m) \,\&\, y \in C^1_{l,n})\}.$$

Эти обозначения сохраним и для $p = i_{k_0} + 1$. Тогда $Q^{i_{k_0}+1}_{n+1} = Q_n$.
Если

$$\neg \exists u (u < p \,\&\, x(u, n) \overline{\in} G^p_{n+1} \,\&\, x(p, n) \in C^1_{u,n}) \,\&$$
$$\& \neg \exists j (x(j, n) \in E^p_{n+1} \,\&\, x(p, n) \in C^1_{j,n+1}),$$

то положим

$$x(p, n) = x(p, n+1) \text{ и } x(p, n+1) \in A^{n+1}.$$

Пусть $x(p, n+1) \in S_{l_p}$. Найдем $a_p = \mu z$ (z нечетно & $\& z \in S_{l_p} \&$ $\& \neg \exists u (u < p \,\&\, x(u, n) \bar{\in} G^p_{n+1} \,\&\, z \in C^1_{u,n}) \,\&\, \neg \exists j (x(j, n) \in E^p_{n+1} \,\&\, z \in C^1_{j,n+1}))$. Положим $a_p \in A^{n+1}$. Если же $\exists u (u < p \,\&\, x(u, n) \bar{\in} G^p_{n+1} \,\&\, x(p, n) \in C^1_{u,n}) \vee$ $\vee \exists j (x(j, n) \in E^p_{n+1} \,\&\, x(p, n) \in C^1_{j,n+1})$, то положим $x(p, n+1) = \alpha(m_p)$, где m_p находится следующим образом.

Пусть l таково, что

$$\forall y (y \in S_l \Rightarrow \neg \exists u (u < p \,\&\, x(u, n) \bar{\in} G^p_{n+1} \,\&\, y \in C^1_{u,n}) \,\&$$

$$\& \neg \exists j (x(j, n) \in E^p_{n+1} \,\&\, y \in C^1_{j,n+1}) \,\&\, l > p \,\&\, l > m_{l_{q-1}}).$$

В этом случае будем говорить, что отрезок S_l свободен для p на этапе $n+1$.

Тогда $m_p = \mu l$ (S_l свободен для p на этапе $n+1$).

Обозначим

$$E_{n+1} = \{x(i, n) \mid x(i, n) \in Q_{n+1} \,\&\, x(i, n) \in A^{n+1}\}$$

$$G_{n+1} = \{x(j_1, n), \dots, x(j_r, n)\} = \{x(i, n) \mid x(i, n) \in A^n \,\&$$

$$\& \exists j (j < i \,\&\, x(j, n+1) \in E_{n+1} \,\&\, (x(j, n+1) \in C^1_{i,n} \vee$$

$$\vee \exists y (y \neq x(j, n+1) \,\&\, \exists m (x(j, n+1) \in S_m \Rightarrow y \in S_m) \,\&\, y \in C^1_{i,n})\},$$

причем $j_1 < j_2 < \dots < j_r$.

Тогда положим $x(j_1, n+1) = \alpha(m_{j_1})$, где $m_{j_1} = \mu l$ (S_l свободен для $i_{k_0} + 1$ на этапе $n+1$).

$$\forall t (t \in \{2, \dots, r\} \Rightarrow x(j_t, n+1) = \alpha(m_{j_t})),$$

где $m_{j_t} = \mu l$ (S_l свободен для $i_{k_0} + 1$ на этапе $n + 1 \,\&\, l > m_{j_{t-1}}$).

Вычислим $\eta^{n+1}_i(j)$, $\psi^{n+1}_i(j)$ для всех i, $j \leqslant n+1$.

Для всякого i общее количество чисел, удерживаемых числами $x(0, j), \dots, x(i, j)$ (где j — произвольное число), рекурсивным образом оценивается сверху. По этой причине удается выполнить требование, указанное в замечании к условию (д).

Из построения следует, что условия (а)—(д), выполняются. Таким образом, A — не m-митотическое неодноэлементное множество,

Пусть $A_0 = \{x \mid x \in A \,\&\, \quad x$ четное число$\}$

$A_1 = \{x \mid x \in A \,\&\, \quad x$ нечетное число$\}$

Докажем, что A_0 и A_1 осуществляют w-митотическое разложение A.

Пусть x — произвольное число, не принадлежащее $\{0, 1\}$.

Если x четно $\& \exists m (x \in S_m \,\&\, x \neq \alpha(m))$, то $x \bar{\in} A$.

Если x четно $\& \exists m (x = \alpha(m))$, то $x \in A \Longleftrightarrow \exists y (y \in S_m \,\&\, y \in A_1)$.

Если x нечетно, то $x \in A \Longleftrightarrow x \in A_1$.

Таким образом, $A \leqslant_{tt} A_1$.

Если x четно, то $x \in A \Longleftrightarrow x \in A_0$.

Если x нечетно $\& \exists m (x \in S_m \& \alpha(m) \overline{\in} A_0)$, то $x \overline{\in} A$.

Если x нечетно $\& \exists m (x \in S_m \& \alpha(m) \in A_0)$ и

$$t = \mu s (A_0^s (\alpha(m)) = A_0 (\alpha(m))),$$

Тогда $x \in A \Longleftrightarrow x \in A^t$.

Таким образом, $A \leqslant_w A_0$ (т. к. $\exists$о. р. ф. $f \forall x$ ($D_{f(x)}$ содержит все числа, принадлежность или не принадлежность которых множеству A_0 используется при вычислении $A(x)$)). Можно взять

$$D_{f(x)} = \{0, 1, \dots, x\}).$$

Определение. $\leqslant_{\overline{k}tt}$ — есть btt — сводимость с порядком, ограниченным числом k.

Теорема 2. $\forall k$ (существует w-митотическое р. п. множество, которое не имеет $\overline{k}tt$-митотического разложения).

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 1, Здесь также для любого i возможно рекурсивным образом оценить сверху количество чисел, удерживаемых числами $x(0, j), \dots, x(i, j)$ где j — произвольное число); так как для любого i, если $(Y_i, Z_i, \eta_i, \psi_i)$ угрожает A посредством некоторого x на некотором этапе s и x вносится в A (на этапе $s+1$), то количество чисел удерживаемых при этом (т. е. чисел, которые удерживаются для удовлетворения немитотического условия порядка i) не превышает $2k$.

В [I] доказаны следующие теоремы о не T-немитотических множествах:

а) существует не T-митотическое р. п. множество степени $0'$;

б) если d нерекурсивная р. п. степень, то существует не T-митотическое р. п. множество степени $\leqslant d$.

Аналогичные теоремы можно доказать и о w-митотических р. п. множествах, не имеющих $\overline{k}tt$-митотического разложения.

Теорема 3. $\forall k$ (существует w-митотическое р. п. множество степени $0'$, не имеющее $\overline{k}tt$-митотического разложения).

Доказательство. Пусть K—полное р. п. множество. Мы построим требуемое множество A (для любого фиксированного k) тем же методом, что и множество A в теоремах 1 и 2.

Только для достижения того, что $K \leqslant_T A$, нам придется иногда расстраивать работу, которую мы проделали над некоторыми немитотическими условиями.

Построение A производится параллельно с построением функции $\lambda isx'(i, s)$. Построение имеет следующие свойства:

1) $\forall i \exists t \forall s \geqslant t$ $(! x'(i, s) \& x'(i, s+1) \geqslant x'(i, s))$;

2) $x'(i, s+1) > x'(i, s) \Rightarrow x'(i, s+1) \in \overline{A^{s+1}}$;

3) Если $i \in K^{s+1} - K^s$, то $x'(i, s) \in A^{s+1} - A^s$;

4) для любого $i \in \lim_s x'(i, s)$ существует.

Для любых i, s сдвинуть $x'(i, s)$ могут только те $x(j, t)$, у которых $j < i$ (функции $x(i, t)$, $\alpha(m)$ имеют те же свойства, что и $x(i, t)$, $\alpha(m)$ в теоремах 1, 2 и строятся аналогично). Так как конечное количество чисел удерживается любым немитотическим условием, то для любого i существует $\lim_s x'(i, s)$. Заметим, что вычисления следующих двух типов:

а) очередной шаг в вычислении Y_i, Z_i, η_i, ψ_i и т. д.;

б) очередной шаг в перечислении K,

происходят на различных этапах.

Как и при построении $\lambda i, sx(i, s)$, если окажется, что на этапе $s+1$ $x'(i, s+1)$ не должно быть равно $x'(i, s)$, то принимаем $x'(i, s+1) = \alpha(m)$, где $m = \mu l$ (S_l свободен для i на этапе $s+1$).

Если окажется, что $x'(i, s) \in A^{s+1} - A^s$, то на этапе $s+1$ вносим в A число a, где $a = \mu l$ (l нечетно & l не удерживается на этапе s & $l \in S_m$ & $x'(i, s) \in S_m$).

Удовлетворение немитотического условия порядка i произойдет как обычно после наименьшего этапа t такого, что $K^t(j) = K(j)$ для всех $j > i$. K сводится к A следующим образом. Чтобы выяснить, принадлежит ли число i K, находим (с помощью оракула A) число t, такое, что $t = \mu u (\forall z \leqslant i (\lim_s x(z, s) = x(z, u)))$.

Такое t существует, так как $\lim_s x(i, s)$ существует.

Тогда $i \in K \Longleftrightarrow x'(i, t) \in A$.

Теорема 4. Если d — произвольная нерекурсивная р. п. степень, то $\forall k$ (существует ϖ-митотическое р. п. множество, не имеющее $\overline{k}tt$-митотического разложения, и имеющее степень $\leqslant d$).

Доказательство. Пусть g общерекурсивная функция, перечисляющая без повторений множество D степени d.

Укажем, как построить требуемое множество A (для любого фиксированного k). Мы получим $A \leqslant_T D$, если добьемся того, что если $x \in A^{s+1} - A^s$, то $g(s) \leqslant x$. Тогда, чтобы определить, является ли x элементом A или нет, находим наименьший этап t, такой, что $D^t(n) = D(n)$ для всех $n \leqslant x$.

Теперь $x \in A \Longleftrightarrow x \in A^t$.

Ниже указано, как удовлетворить одно немитотическое условие, требуя в то же время, что если $x \in A^{s+1} - A^s$, то $g(s) \leqslant x$.

Полное доказательство может быть проведено с помощью метода приоритета.

Рассмотрим немитотическое условие порядка i. Начнем с выбора кандидата n, еще находящегося в A (как и в предыдущих теоремах, n выбираем так, чтобы оно было первым элементом наименьшего свободного для i (в данный момент) отрезка S_m).

Если окажется, что n надо включить в A, то включаем в A также и наименьшее нечетное не удерживаемое (в данный момент) число, которое принадлежит S_m (такое число существует).

Если немитотическое условие порядка i угрожает A посредством n на этапе $s+1$, то кандидат n становится реализованным на этапе $s+1$. Выберем нового кандидата, большего, чем любой предыдущий кандидат, и удержим от вхождения в A все числа, которые еще не входят в A и которые удерживались бы, если бы n включилось в A. На следующем этапе проведем эту процедуру с новым кандидатом (удерживая уже числа, соответствующие новому кандидату). Если придем к этапу t, такому, что $g(t)$ не превосходит наибольшего реализованного кандидата, то на этапе $t+1$ внесем m в A (удерживая числа, соответствующие m).

Здесь заканчивается работа над немитотическим условием порядка i, новые кандидаты не выбираются. Ясно, что условие удовлетворится, если будет выбрано конечное число кандидатов.

Предположим обратное.

Определим функцию f так: $f(0)=0$, $f(s+1)=s$-ый реализованный кандидат. (Заметим, что мы выбираем новых кандидатов так же, как и в предыдущих теоремах, так что каждый новый кандидат больше предыдущего). Таким образом, функция f — строго возрастающая, рекурсивная. Имеем $f(s)<g(s)$ для всех s (без ограничения общности можем считать, что $0 \notin D$, в противном случае имели бы окончание работы над условием). Отсюда заключаем, что D рекурсивно. Чтобы определить, принадлежит ли n D или нет, находим наименьший этап t такой, что $f(t) \geqslant n$. Тогда $n \in D \Longleftrightarrow n \in D^t$. Получили противоречие.

Теорема доказана.

Т е о р е м а 2 а. Существует w-митотическое р.п. множество, которое не имеет btt-митотического разложения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяется та же техника, что и при доказательстве теорем 1 и 2. Здесь в качестве h выступает рекурсивная функция, отображающая N на N^5 (через $(Y_i, Z_i, \eta_i, \psi_i, b_i)$ обозначается пятерка $(W_{i_0}, W_{i_1}, \varphi_{i_2}, \varphi_{i_3}, i_4)$, где $h(i)=(i_0, i_1, i_2, i_3, i_4)$). Пятая компонента вводится для того, чтобы добиться не $\overline{k}tt$—митотичности строящегося множества A для любого k. И здесь для любого i возможно рекурсивным образом оценить сверху количество чисел, удерживаемых числами $x(0, j), \ldots, x(i, j)$ (где j — произвольное число). Так как для любого i, если $(Y_i, Z_i, \eta_i, \psi_i, b_i)$ угрожает A посредством некоторого x на некотором этапе s и x вносится в A (на этапе $s+1$), то количество чисел, удерживаемых при этом (т. е. чисел, которые удерживаются для удовлетворения немитотического условия порядка i) не превышает $2b_i$, и таким образом, количество чисел удерживаемых числами $x(0, j), \ldots, x(i, j)$ не превышает $2(b_0+b_1+\cdots+b_i)$.

Произведя аналогичные изменения в доказательствах теорем 3 и 4, можно доказать следующие теоремы.

Т е о р е м а 3 а. Существует w-митотическое р.п. множество степени $0'$, не имеющее btt-митотического разложения.

Теорема 4 а. Если d-произвольная нерекурсивная р. п. степень, то существует ϖ-митотическое р.п. множество, не имеющее btt-митотического разложения и имеющее степень $\leqslant d$.

Ա. Հ. ՄՈԿԱՑՅԱՆ

ϖ-ՄԻԹՈՏԻԿ, ԲԱՅՑ ՈՉ btt-ՄԻԹՈՏԻԿ ՌԵԿՈՒՐՍԻՎ ԹՎԱՐԿԵԼԻ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիցուք $\leqslant_r$-ը անդրադարձության և փոխանցականության հատկություն ունեցող կամայական հանգեցում է։

Ռեկուրսիվ թվարկելի (ռ. թ.) A բազմությունը կոչվում է r-միթոտիկ, եթե այն տրոհվում է այնպիսի երկու ռ. թ. ենթաբազմությունների, որոնք պատկանում են A-ի անլուծելիության r-աստիճանին։

Հոդվածում ապացուցված է՝

ա) գոյություն ունի O' աստիճանի ϖ-միթոտիկ, բայց ոչ btt-միթոտիկ ռ. թ. բազմություն։

բ) Կամայական ոչ ռեկուրսիվ ռ. թ. d թյուրինգյան աստիճանի համար գոյություն ունի ϖ-միթոտիկ, բայց ոչ btt-միթոտիկ ռ. թ. բազմություն, որի աստիճանը չի գերազանցում d-ին։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ladner R. E.* Mitotic recursively enumerable sets, The Journal of Symbolic Logic, vol. 38, 2, 1973, 199—211.
2. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, «Мир», М., 1972.
3. *Lachlan A. H.* The priority method I, Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, vol. 13, 1967, 1—10.