А. А. ЧУБАРЯН

О СЛОЖНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ВЫВОДОВ В СИСТЕМАХ ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ И ФОРМАЛЬНОЙ АРИФМЕТИКИ

В работе определяются и исследуются функции Шеннона двух основных типов: абсолютные функции Шеннона, которые для данного логического исчисления дают оценки сложности выводов для определенных фиксированных множеств формул (например, формул фиксированной длины) и относительные функции Шеннона, вводимые для сравнения сложностных характеристик выводов одних и тех же формул в различных формальных системах.

В § 1 сравниваются по сложности выводов формальные системы, одна из которых получается добавлением к другой формулы, недоказуемой в ней. Доказывается, что в весьма широком классе случаев логические выводы большой сложности в более слабой системе оказываются существенно более длинными, чем выводы тех же формул в более сильной системе. А именно, при определенных достаточно широких условиях относительная функция Шеннона, описывающая сравнительную сложность выводов в сильной и слабой системах на достаточно больших натуральных числах всюду превышает любую наперед заданную общерекурсивную функцию (о. р. ф.). Частными случаями этого результата оказываются сравнительные оценки вывода одних и тех же формул в классическом, интуиционистском и минимальном исчислении предикатов, а также в соответствующих системах формальной арифметики; во всех перечисленных случаях относительные функции Шеннона имеют указанный «сильный рост».

В § 2 определяются абсолютные функции Шеннона, характеризующие для каждой из рассматриваемых систем сложность выводов формул фиксированной «длины». Для этих функций получаются оценки, аналогичные вышеуказанным.

В § 3 исследованы аналитические свойства функций Шеннона, определенных в § 1 и § 2. В частности, исследованы с точки зрения иерархии Ю. Л. Ершова [1] графики этих функций: доказана их принадлежность классу Π_1^{-1} и разности классов Σ_2^{-1} и Σ_1^{-1}. Далее доказана также гипериммунность этих множеств.

Исследованиям аналогичных вопросов посвящены работы [2]—[9]. Результаты этих исследований приложимы к более узкому классу

систем, чем основная теорема § 1. Кроме того, в [3]—[9] нижние оценки роста функций Шеннона (говоря в терминах настоящей работы) относились к отдельным n, а не ко всем достаточно большим n.

Формулировки основных результатов настоящей работы опубликованы в [15].

§ 1. Об относительной сложности выводов в различных системах исчисления предикатов и формальной арифметики

Здесь сравниваются по сложности выводов формальные системы, одна из которых получается добавлением к другой формулы, недоказуемой в ней.

1. *Основные определения.* Будем предполагать, что каждая из рассматриваемых нами теорий определяется заданием следующих объектов: 1) алфавита, включающего символы (,), $\vee$, $\supset$; 2) некоторого множества слов в данном алфавите, именуемых формулами (причем, предполагается, что если δ и σ суть формулы, то $(\delta \vee \sigma)$, $(\delta \supset \sigma)$ — также формулы); 3) некоторого множества упорядоченных систем формул (элементы этого множества именуются выводами). Будем говорить, что вывод $W = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ есть вывод формулы β в теории Φ (обозначение: $W \underset{\Phi}{\Rightarrow} \beta$), если формула β совпадает с формулой α_n. Будем говорить, что формула β выводима в теории Φ (обозначение: $\vdash_{\Phi} \beta$), если существует вывод W такой, что $W \underset{\Phi}{\Rightarrow} \beta$. Будем предполагать, что в любой из рассматриваемых нами теорий Φ для любых формул δ и σ выполнены условия:

а)
i) $\vdash_{\Phi} \sigma \supset \delta \vee \sigma$;
ii) если $\vdash_{\Phi} \delta$ и $\vdash_{\Phi} \delta \supset \sigma$, то $\vdash_{\Phi} \sigma$.

Будем говорить, что теория Ψ есть расширение теории Φ (обозначение: $\Psi \supseteq \Phi$), если всякая формула и всякий вывод теории Φ являются соответственно формулой и выводом теории Ψ.

Будем предполагать фиксированными некоторые взаимно-однозначные нумерации всевозможных формул и всевозможных выводов в каждой из рассматриваемых теорий; в записях иногда будем отождествлять формулу или вывод с соответствующим номером.

Через $C^b(W)$ будем обозначать сложность вывода W, определяемую посредством о. р. ф. C^b, удовлетворяющей условию: для всякого n уравнение $C^b(W) = n$ имеет лишь конечное число решений, и существует алгорифм, который по n выдает список всех решений W этого уравнения (ср. [10]).

Для каждой формулы β, выводимой в фиксированной теории Φ, определим ее сложность $C_{\Phi}(\beta)$ по выводимости в теории Φ следующим образом:

$$C_{\Phi}(\beta) = \min_{W \underset{\Phi}{\Rightarrow} \beta} C(W).$$

Пусть Φ_1 и Φ_2 некоторые теории, причем $\Phi_2 \supseteq \Phi_1$. Для сравнения сложностей выводов одних и тех же формул β в теориях Φ_1 и Φ_2 определим функцию Шеннона:

$$\text{Ш}^{\Phi_2\Phi_1}(n) = \max_{C_{\Phi_2}(\beta) \leqslant n \,\&\, \vdash_{\Phi_1} \beta} C_{\Phi_1}(\beta).$$

Будем говорить, что теория Φ является стандартной, если можно указать пару рекурсивно перечислимых эффективно неотделимых множеств M_+^{Φ} и M_-^{Φ} формул этой теории и два алгорифма L_1 и L_2, выдающих по каждой формуле β теории Φ формулы $L_1(\beta)$ и $L_2(\beta)$, для которых выполнены условия:

a) $\beta \in M_+^{\Phi} \leftrightarrow \vdash_{\Phi} L_1(\beta)$ и $\beta \in M_-^{\Phi} \leftrightarrow \vdash_{\Phi} L_2(\beta)$;

b) для каждой формулы γ теории Φ, если

$$\vdash_{\Phi} \bar{\gamma} \vee L_1(\beta) \text{ и } \vdash_{\Phi} L_2(\beta), \text{ то } \gamma \in M_+^{\Phi}.$$

Основная теорема. *Пусть Φ_1 — стандартная теория, α — формула теории Φ_1 такая, что $\alpha \overline{\in} M_+^{\Phi_1}$, где $M_+^{\Phi_1}$ — первое множество пары $M_+^{\Phi_1}$ и $M_-^{\Phi_1}$, обладающих свойствами из определения стандартной теории, пусть, далее, Φ_2 является таким расширением теории Φ_1, что $\vdash_{\Phi_2} \alpha$. Тогда для произвольной о. р. ф. φ*

$$\forall_n^{\infty} (\text{Ш}^{\Phi_2\Phi_1}(n) > \varphi(n))^*.$$

Иными словами, для всякой о. р. ф. φ можно эффективно указать число n_0 такое, что для всякого $n > n_0$ существует формула γ, такая, что

1. $\vdash_{\Phi_1} \gamma$,
2. $C_{\Phi_2}(\gamma) \leqslant n$,
3. $C_{\Phi_1}(\gamma) > \varphi(n)$.

Замечание 1. Если множества выводимых и опровержимых формул некоторой теории образуют эффективно неотделимую пару рекурсивно перечислимых множеств (так обстоит дело, например, в классической или интуиционистской формальной арифметике), то такая теория стандартна; в самом деле, в этом случае можно в качестве M_+^{Φ} и M_-^{Φ} взять множества выводимых и опровержимых в теории формул, положив при этом $L_1(\beta) = \beta$, $L_2(\beta) = \neg\beta$. Однако в исчислениях предикатов (например, классическом, интуиционистском, минимальном) множества выводимых и опровержимых формул рекурсивно отделимы (на-

---

* Через $\forall_n^{\infty} q(n)$ будем, как обычно, обозначать утверждение $\exists m \forall n ((n > m) \to q(n))$.

пример, множеством формул, тождественно истинных на двухэлементных моделях в классическом смысле). Вместе с тем, исчисления предикатов (классическое, интуиционистское и минимальное), как будет показано в дальнейшем, также оказываются стандартными формальными теориями в смысле введенного определения.

Для доказательства основной теоремы понадобятся несколько вспомогательных утверждений.

2. **Доказательство вспомогательных утверждений.** Лемма 1. *Пусть* Φ *— некоторая теория,* M_1^Φ *и* M_2^Φ *произвольная пара рекурсивно перечислимых эффективно неотделимых множеств формул этой теории, тогда существует алгорифм* D*, который по гёделеву номеру произвольной частично-рекурсивной функции (ч. р. ф.)* f *выдает формулу* β *теории* Φ *такую, что*

$$(1)\quad f(\beta)=0\to\beta\in M_1^\Phi \text{ и } f(\beta)=1\to\beta\in M_2^\Phi.$$

Доказательство. Достаточно показать справедливость утверждения леммы для произвольной пары эффективно неотделимых множеств и тогда, в силу теоремы об изоморфизме Мучника-Шмульяна (см. [18], т. 3, с. 211) оно будет верно и для M_1^Φ и M_2^Φ.

Рассмотрим пару:

$$E_-=\{x/U(x,x)=0\} \text{ и } E_+=\{x/U(x,x)=1\},$$

где U — универсальная функция для класса всех одноместных ч. р. ф. Для произвольной ч. р. ф. f существует некоторое натуральное число (н. ч.) n_f такое, что

$$f(x)\simeq U(n_f,x) \text{ для всех } x.$$

Тогда для n_f имеем

$$f(n_f)=0\to n_f\in E_- \text{ и } f(n_f)=1\to n_f\in E_+.$$

Поскольку n_f находится эффективно по каждой ч. р. ф. f, то лемма доказана.

Нами в дальнейшем будет применен следующий вариант теоремы о неподвижной точке, который нетрудно доказать с помощью известных методов (см. [19], гл. IV, § 7):

$$(2)\quad \forall \text{ч. р. ф. } g\exists p\forall k\forall x\,(g(p,k,x)\simeq U(p,k,x)),$$

где U—допустимая в смысле [14] универсальная функция для класса всех двуместных ч. р. ф-ий. В дальнейшем в пределах § 1 и § 2 обозначение U всюду сохраняется за некоторой фиксированной функцией указанного типа.

Идея доказательства основной теоремы заключается в том, что среди формул вида $\alpha\vee\beta$, выводимых и в Φ_1 и в Φ_2, имеются такие, которые достаточно «сложно» выводятся в Φ_1, в то время как в Φ_2 все формулы такого вида «просто» выводимы.

Определим некоторые конкретные объекты, используемые в доказательстве основной теоремы.

Фиксируем произвольную о. р. ф. φ. Зафиксируем также некоторое н. ч. t и рассмотрим последовательность функций:

$$g_k^t(x) \simeq U(t, k, x), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Эта последовательность функций порождает последовательность формул $\beta_k^t = D(g_k^t)$*, каждая из которых удовлетворяет для теории Φ_1, указанной в теореме, условию (1), где в роли f взята g_k^t.

Построим последовательность функций $\overline{g}_k^t$, результат применения каждой из которых к произвольной формуле β теории Φ_1 вычисляется следующим образом

i) берем последовательность формул $\alpha \vee L_1(\beta_0^t)$, $\alpha \vee L_1(\beta_1^t)$, ..., $\alpha \vee L_1(\beta_{k+1}^t)$,

ii) находим $n_k^t = \max\limits_{0 \leqslant l \leqslant k+1} C_{\Phi_1}(\alpha \vee L_1(\beta_l^t)) + k$,

iii) вычисляем $\varphi(n_k^t)$,

iiii) значение $\overline{g}_k^t(\beta)$ берем в соответствии со следующими условиями:

(3) если $C_{\Phi_1}(\alpha \vee L_1(\beta)) \leqslant \varphi(n_k^t)$, то $\overline{g}_k^t(\beta) = 0$,

(4) если $\neg(C_{\Phi_1}(\alpha \vee L_1(\beta)) \leqslant \varphi(n_k^t))$, то $\overline{g}_k^t(\beta) = 1$.

Отметим, что все функции $\overline{g}_k^t$ зависят от φ, и для каждого значения β определены.

В силу (2) найдется такое н. ч. р., что

$$\forall k \forall x (\overline{g}_k^p(x) \simeq g_k^p(x)).$$

В дальнейшем для простоты обозначений индекс p будем опускать.

Основная лемма. *Последовательность формул* $\beta_k = D(g_k$ *удовлетворяет для каждого* k *условиям*:

$$\vdash_{\Phi_1} \alpha \vee L_1(\beta_k) \text{ и } C_{\Phi_1}(\alpha \vee L_1(\beta_k)) > \varphi(n_k),$$

где $n_k = \max\limits_{0 \leqslant l \leqslant k+1} C_{\Phi_1}(\alpha \vee L_1(\beta_l)) + k$.

Доказательство. Покажем, что $\forall k (g_k(\beta_k)) = 1$. Действительно, если бы было $g_k(\beta_k) = 0$ для некоторого k, то в силу (3) $\vdash_{\Phi_1} \alpha \vee L_1(\beta_k)$, значит, неверно, что $\vdash_{\Phi_1} L_2(\beta_k)$, так как иначе, в силу пункта в) определения стандартной теории, имели бы $\alpha \in M_+^{\Phi_1}$, что противоречит условию теоремы. Но при $g_k(\beta_k) = 0$ имеем в силу (1) $\beta_k \in M_-^{\Phi_1}$, значит $\vdash_{\Phi_1} L_2(\beta_k)$.

Итак, мы пришли к противоречию, значит $g_k(\beta_k) = 1$, но тогда по (1) $\beta_k \in M_+^{\Phi_1}$, а значит $\vdash_{\Phi_1} L_1(\beta_k)$, и по пункту i) условия (а)

---

* Мы в записях иногда будем отождествлять функции с их гёделевыми номерами.

$\vdash_{\Phi_1} \alpha \vee L_1(\beta_k)$, следовательно, в силу (4) $C_{\Phi_1}(\alpha \vee L_1(\beta_k)) > \varphi(n_k)$, что и требовалось доказать.

3. Доказательство основной теоремы. Для произвольной фиксированной о. р. ф. φ*) построим последовательность ф-ий g_k и порождаемую ими последовательность формул β_k ($k=0, 1, 2, \ldots$).

В качестве указанного в теореме n_0 возьмем $n_0 = \max(C_{\Phi_2}(\alpha \vee L_1(\beta_0)), C_{\Phi_2}(\alpha \vee L_1(\beta_1)))$. В силу неограниченности и строгой монотонности последовательности n_k для всякого $n > n_0$ найдется такое k, что

$$n_k \leqslant n < n_{k+1}.$$

В качестве требуемой формулы γ возьмем $\alpha \vee L_1(\beta_{n+1})$. Тогда, по построению последовательности n_k,

$$C_{\Phi_2}(\gamma) \leqslant n_k \leqslant n,$$

а по утверждению основной леммы

$$C_{\Phi_1}(\gamma) > \varphi(n_{k+1}) > \varphi(n),$$

что и требовалось.

4. Перейдем теперь к конкретным системам формальной арифметики.

Обозначим через S_K и S_J соответственно классическую и интуиционистскую системы формальной арифметики (см. [12]; гл. IV). Уточним также определение минимальной системы формальной арифметики, которую в дальнейшем будем обозначать через S_M.

Постулат 8° $\neg\neg A \supset A$ удаляем из S_K ($8'$ $\neg A \supset (A \supset B)$ из S_J), постулат 15. $\neg(a' = 0)$ заменяем на $(a' = 0) \supset (1 = 0)$. Полученная в результате этих операций система и будет S_M.

Замечание 2. Если определить для каждой формулы β формулу β^* следующим образом:

если β — элементарная формула, то β^* есть β;

если β есть $\delta \triangle \sigma$ (под $\triangle$ подразумеваем &, $\vee$, $\supset$), то β^* есть $\delta^* \triangle \sigma^*$;

если β есть $\Delta x \delta(x)$ (под Δ подразумеваем $\exists$, $\forall$), то β^* есть $\Delta x \delta^*(x)$;

если β есть $\neg\delta$, то β^* есть $\delta^* \supset (1 = 0)$,

тогда имеет место утверждение

$$\vdash_{S_J} \beta \leftrightarrow \vdash_{S_M} \beta^*. \tag{5}$$

Нетрудно показать также, что для произвольной формулы β системы S_M

$$(1 = 0) \vdash_{S_M} \beta. \tag{6}$$

Рассмотрим пары множеств

*) Не нарушая общности, можем считать φ монотонно возрастающей.

$$M_+^J = \{\beta / \vdash_{S_J} \beta\} \text{ и } M_-^J = \{\beta / \vdash_{S_J} \neg\beta\},$$

$$M_+^M = \{\beta / \vdash_{S_M} \beta\} \text{ и } M_-^M = \{\beta / \vdash_{S_M} \beta \supset (1=0)\}.$$

Как уже оговаривалось в замечании 1, пара множеств M_+^J и M_-^J эффективно неотделима, а в силу рекурсивности операции * эффективно неотделима также пара M_+^M и M_-^M. Нетрудно убедиться в том, что каждая из теорий S_J и S_M является стандартной со сводящими алгоритмами:
$L_1^J(\beta) = \beta$, $L_2^J(\beta) = \neg\beta$ для произвольной формулы β теорий S_J, и $L_1^M(\beta) = \beta$, $L_2^M(\beta) = (\beta \supset (1=0))$ для произвольной формулы β теории S_M соответственно. При проверке выполнимости пункта в) для L_1^M, L_2^M необходимо воспользоваться условием (6).

Отметим также, что существует формула α_J (соответственно α_M) невыводимая в системе S_J (соответственно S_M) и выводимая в системе S_K (соответственно в S_J, а значит и в S_K), а потому, в качестве следствия из основной теоремы, получаем следующий результат.

Теорема 1. *Для произвольной о. р. ф.* φ

$$\forall_n^{\infty}(Ш^{S_K S_J}(n) > \varphi(n)),$$

$$\forall_n^{\infty}(Ш^{S_J S_M}(n) > \varphi(n)),$$

$$\forall_n^{\infty}(Ш^{S_K S_M}(n) > \varphi(n)).$$

Заметим, что аналогичные результаты имеют место и для соответствующих арифметических систем Робинсона (их мы будем обозначать через R_K, R_J и R_M). Поскольку в дальнейшем мы будем опираться именно на эти системы, приведем список собственных аксиом арифметики Робинсона (см. [12]):

1. $a = a$,
2. $a = b \supset b = a$,
3. $a = b \supset (b = c \supset a = c)$,
4. $a = b \supset a' = b'$,
5. $a' = b' \supset a = b$,
6. $a = b \supset (a + c = b + c \,\&\, c + a = c + b)$,
7. $a = b \supset (a \cdot c = b \cdot c \,\&\, c \cdot a = c \cdot b)$,
8. $\neg(a' = 0)$,
9. $a = 0 \vee \exists b\,(b' = a)$,
10. $a + 0 = a$,
11. $a + b' = (a + b)'$,
12. $a \cdot 0 = 0$,
13. $a \cdot b' = a \cdot b + a$

для R_K и R_J. Для системы R_M аксиома 8 заменяется на $a' = 0 \supset 1 = 0$

5. Как уже указывалось во введении, результаты, аналогичные вышеполученным, имеют место и для соответствующих систем исчисления предикатов.

Обозначим через P_K, P_J и P_M соответственно классическую, интуиционистскую и минимальную системы чистого исчисления предикатов.

В качестве следствия из основной теоремы мы докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Для произвольной о. р. ф.* $\mathfrak{p}$

$$\forall_n^{\infty}(Ш^{P_K P_J}(n) > \mathfrak{p}(n)),$$

$$\forall_n^{\infty}(Ш^{P_J P_M}(n) > \mathfrak{p}(n)),$$

$$\forall_n^{\infty}(Ш^{P_K P_J}(n) > \mathfrak{p}(n)).$$

Для доказательства достаточно убедиться в том, что условия, накладываемые на теории Φ_1 и Φ_2 основной теоремы, выполняются для пар систем P_J и P_K, P_M и P_J, а также P_J и P_K.

Введем в рассмотрение предикатные переменные q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 размерностей 1, 2, 2, 3, 3; эти переменные в дальнейшем мы будем употреблять в роли обозначений арифметических предикатов $a = 0$, $a = b$, $a' = b$, $a + b = c$, $a \cdot b = c$ соответственно.

Для произвольной арифметической формулы γ через $\bar{\gamma}$ будем обозначать соответствующую ей предикатную формулу чистого исчисления предикатов, построенную на основе переменных q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, получаемую посредством обычной погружающей операции (см. [12], § 74, примеры 11 и 12), при помощи которой элиминируются функциональные и индивидуальные символы.

Пусть $R_{\square}$ обозначает произвольную из систем R_K, R_J или R_M. Тогда через $P_{\square}$ будем обозначать соответствующую систему чистого исчисления предикатов.

По каждой системе $R_{\square}$ построим предикатную формулу $A_{\square}$ следующим образом:

i) для каждой арифметической аксиомы γ системы $R_{\square}$ строим формулу $\bar{\gamma}$ и берем ее замыкание посредством кванторов общности по всем предметным переменным;

ii) строим в предикатной форме новые аксиомы, необходимые при замене функциональных символов $'$, $+$, $\cdot$ и константы 0 соответствующими предикатными символами:

аксиомы существования результатов действия:

$$\exists a\,(q_1(a)),$$

$$\forall a\,\exists b\,(q_3(a, b)),$$

$$\forall a\,\forall b\,\exists c\,(q_4(a, b, c)),$$

$$\forall a\,\forall b\,\exists c\,(q_5(a, b, c));$$

аксиомы единственности результатов действия:

$$\forall a \forall b (q_1(a) \& q_1(b) \supset q_2(a, b)),$$

$$\forall a \forall b_1 \forall b_2 (q_3(a, b_1) \& q_3(a, b_2) \supset q_2(b_1, b_2)),$$

$$\forall a \forall b \forall c_1 \forall c_2 (q_4(a, b, c_1) \& q_4(a, b, c_2) \supset q_2(c_1, c_2)),$$

$$\forall a \forall b \forall c_1 \forall c_2 (q_5(a, b, c_1) \& q_5(a, b, c_2) \supset q_2(c_1, c_2));$$

аксиомы инвариантности действий относительно равенства:

$$\forall a \forall b (q_1(a) \& q_2(a, b) \supset q_1(b)).$$

$$\forall a_1 \forall a_2 \forall b_1 \forall b_2 (q_3(a_1, b_1) \& q_2(a_1, a_2) \& q_2(b_1, b_2) \supset q_3(a_2, b_2)),$$

$$\forall a_1 \forall a_2 \forall b_1 \forall b_2 \forall c_1 \forall c_2 (q_4(a_1, b_1, c_1) \& q_2(a_1, a_2) \& q_2(b_1, b_2) \&$$

$$\& q_2(c_1, c_2) \supset q_4(a_2, b_2, c_2)),$$

$$\forall a_1 \forall a_2 \forall b_1 \forall b_2 \forall c_1 \forall c_2 (q_5(a_1, b_1, c_1) \& q_2(a_1, a_2) \& q_2(b_1, b_2) \&$$

$$\& q_2(c_1, c_2) \supset q_5(a_2, b_2, c_2));$$

iii) берем конъюнкцию всех формул, указанных в пунктах i) и ii). Отметим, что A_K и A_J совпадают.

Тогда из результатов работы [12] (см. доказательство теоремы 54, с. 382, пункты (A)—(F)), для произвольной формулы γ теории $R_\square$

$$\vdash_{R_\square} \gamma \leftrightarrow \vdash_{P_\square} A_\square \supset \tilde{\gamma}. \tag{7}$$

Для каждой формулы β системы $P_\square$ обозначим через β° формулу, получаемую следующим образом: в формуле β каждую элементарную подформулу, содержащую предикатный символ, отличный от символов q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 заменяем формулой $\forall a (q_1(a) \supset q_1(a))$.

Очевидно, что для произвольной формулы β системы $P_\square$ имеем (см., например [12], § 34):

$$\vdash_{P_\square} \beta \rightarrow \vdash_{P_\square} \beta^\circ. \tag{8}$$

Если формула β системы $P_\square$ содержит разве лишь предикатные символы q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, то через β^x будем обозначать арифметическую формулу, получаемую из β с помощью замены каждой из предикатных подформул вида $q_1(a)$, $q_2(a, b)$, $q_3(a, b)$, $q_4(a, b, c)$, $q_5(a, b, c)$ арифметической формулой $a = 0$, $a = b$, $a' = b$, $a + b = c$, $a \cdot b = c$ соответственно.

Легко показать, что для произвольной формулы β системы $P_\square$ имеет место

$$\vdash_{P_\square} A_\square \supset ((\tilde{\beta}^\circ)^x) \leftrightarrow \vdash_{P_\square} A_\square \supset \beta^\circ, \tag{9}$$

а для произвольной формулы γ системы $R_\square$

$$\vdash_{R_\square} \gamma \equiv (\tilde{\gamma})^x. \tag{10}$$

Поскольку для произвольной формулы β системы $P_\square$ формула $(\beta^0)^x$ является арифметической, то, учитывая (7) и (9) имеем:

(11) $$\vdash_{R_\square} (\beta^0)^x \leftrightarrow \vdash_{P_\square} A_\square \supset \beta^0.$$

Теперь покажем, что системы P_J и P_M являются стандартными.

Действительно, в качестве пары рекурсивно перечислимых эффективно неотделимых множеств $M_+^{P_J}$ и $M_-^{P_J}$ формул теории P_J возьмем множества, определяемые следующим образом:

$$\beta \in M_+^{P_J} \leftrightarrow \vdash_{R_J} (\beta^0)^x \quad \text{и} \quad \beta \in M_-^{P_J} \leftrightarrow \vdash_{R_J} \neg (\beta^0)^x,$$

а в качестве сводящих алгорифмов возьмем алгорифмы $\overline{L}_1^J$ и $\overline{L}_2^J$ такие, что по любой формуле β теории P_J

$$\overline{L}_1^J(\beta) = A_J \supset \beta^0 \quad \text{и} \quad \overline{L}_2^J(\beta) = A_J \supset \neg \beta^0.$$

Тогда будем иметь:

а) $$\beta \in M_+^{P_J} \leftrightarrow \vdash_{R_J} (\beta^0)^x \leftrightarrow \vdash_{P_J} A_J \supset \beta^0,$$

$$\beta \in M_-^{P_J} \leftrightarrow \vdash_{R_J} \neg (\beta^0)^x \leftrightarrow \vdash_{P_J} A_J \supset \neg \beta^0,$$

б) если для некоторой формулы γ теории P_J

$$\vdash_{P_J} \gamma \vee (A_J \supset \beta^0) \text{ и } \vdash_{P_J} A_J \supset \neg \beta^0, \text{ то } \vdash_{P_J} A_J \supset \gamma,$$

а значит, в силу (8) $\vdash_{P_J} (A_J \supset \gamma)^0$, но так как A_J^0 совпадает с A_J то по (7) $\vdash_{R_J} (\gamma^0)^x$ и, по определению множества $M_+^{P_J}$, $\gamma \in M_+^{P_J}$, что и требовалось.

В качестве пары множеств $M_+^{P_M}$ и $M_-^{P_M}$ формул теории P_M возьмем множества, определяемые следующим образом

$$\beta \in M_+^{P_M} \leftrightarrow \vdash_{R_M} (\beta^0)^x \quad \text{и} \quad \beta \in M_-^{P_M} \leftrightarrow \vdash_{R_M} (\beta^0)^x \supset (1 = 0)$$

и в качестве сводящих алгорифмов

$$\overline{L}_1^M(\beta) = A_M \supset \beta^0 \quad \text{и} \quad \overline{L}_2^M(\beta) = A_M \supset (\beta^0 \supset (1 \bar{=} 0)),$$

где β произвольная формула теории P_M.

Тогда имеем:

а) $$\beta \in M_+^{P_M} \leftrightarrow \vdash_{R_M} (\beta^0)^x \leftrightarrow \vdash_{P_M} A_M \supset \beta^0,$$

$$\beta \in M_-^{P_M} \leftrightarrow \vdash_{R_M} (\beta^0)^x \supset (1 = 0) \leftrightarrow \vdash_{R_M} (\beta^0)^x \supset (1 \bar{=} 0)^x \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \vdash_{R_M} (\beta^0)^x \supset ((1 = \bar{0})^0)^x \leftrightarrow \vdash_{R_M} ((\beta \supset ((1 = \bar{0})^0)^x \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \vdash_{P_M} A_M \supset (\beta \supset (1 = \bar{0}))^0 \leftrightarrow \vdash_{P_M} A_M \supset (\beta^0 \supset (1 = \bar{0})).$$

Выполнение условия б) также легко устанавливается.

Теперь для доказательства первого утверждения теоремы 2 достаточно взять в качестве α произвольную формулу системы P_J, такую, что $(\alpha^0)^x$ не выводимы в R_J, и α выводима в P_K, для доказательства второго и третьего утверждения берем произвольную формулу α системы P_M, такую, что $(\alpha^0)^x$ не выводима в R_M и выводима в P_J, а следовательно и в P_K.

§ 2. Сложность выводов формул фиксированной «длины» в системах формальной арифметики и исчисления предикатов

Здесь мы рассмотрим абсолютные функции Шеннона, характеризующие для каждой из рассматриваемых систем сложность выводов формул фиксированной «длины».

1. Обозначим через $\eta(\gamma)$ сложность формулы γ, определяемую посредством некоторой о. р. ф. η, удовлетворяющей условию: для каждого n уравнения $\eta(\gamma) = n$ имеет лишь конечное число решений и существует алгоритм, выдающий для каждого n список всех его решений (ср. [10]).

Пусть Ф — некоторая стандартная теория.

Определим функцию: $Ш^a_\Phi(n) = \max\limits_{\eta(\gamma) \leqslant n \,\&\, \vdash_\Phi \gamma} C_\Phi(\gamma)$.

Теорема 3. *Для произвольной стандартной теории* Ф *и для произвольной о. р. ф.* φ

$$\forall^\infty_n (Ш^a_\Phi(n) > \varphi(n)).$$

Для доказательства этой теоремы строим формулы, «сложно выводимые» в новом смысле, а именно поступаем так же, как и в пункте 2 § 1.

Зафиксируем пару множеств M^Φ_+ и M^Φ_- формул теории Ф, удовлетворяющих условиям из определения стандартной теории, и произвольную формулу α теории Ф такую, что $\alpha \in M^\Phi_+$. Далее дословно повторяется построение объектов, используемых при доказательстве основной теоремы, только пункт ii) заменяется на

ii)′ находим $n^t_k = \max\limits_{0 < l \leqslant k+1} \eta(\alpha \vee L_1(\beta_l)) + k$.

Остальные пункты построения сохраняются без изменения, в силу чего сохраняется и утверждение леммы (основной) для построенных таким образом формул β_k. Теперь для доказательства теоремы 3 достаточно взять $n_a = \max(\eta(\alpha \vee L_1(\beta_0)), \eta(\alpha \vee L_1(\beta_1))) + 1$.

Действительно, тогда $\forall n > n_a (\exists k (n_k \leqslant n < n_{k+1}))$, и тогда формула $\gamma = \alpha \vee \beta_{k+1}$ будет удовлетворять условиям

$$\gamma(\gamma) \leqslant n_k \leqslant n, \; C_\Phi(\gamma) > \varphi(n_{k+1}) > \varphi(n).$$

Существование для каждого n таких формул γ и доказывает теорему 3.

2. Определим теперь функции

$$Ш^{\square}_{\diamond}(n) = \max_{\gamma(\gamma) < n \& \vdash_{\diamond\square}\gamma} C_{\diamond\square}(\gamma),$$

где под $\square$ мы будем подразумевать один из индексов K, J, M, а под $\diamond$ — один из символов S, R, P. Фактически этим мы определили абсолютные функции Шеннона в классической, интуиционистской и минимальной системах полной арифметики, арифметики Робинсона и чистого исчисления предикатов.

В качестве следствия из теоремы 3 получаем следующий результат.

Теорема 4. *Для произвольной о. р. ф* φ *и для каждой из функции* $Ш^{\square}_{\diamond}$ *имеет место*

$$\forall^{\infty}_{n} (Ш^{\square}_{\diamond}(n) > \varphi(n)).$$

Действительно, как уже было показано, каждая из теорий S_J, S_M, R_J, R_M, P_J и P_M является стандартной. Для систем S_K, R_K, P_K стандартность показывается аналогичным методом.

§ 3. Об аналитических свойствах функций Шеннона для систем формальной арифметики и исчисления предикатов

Здесь исследуются графики функций $Ш^{\Phi_2\Phi_1}$ и $Ш^{a}_{\Phi}$ для теорий Φ_1 Φ_2 и Φ, удовлетворяющих условиям основной теоремы и теоремы 3 соответственно. Легко устанавливается, что каждая из указанных функций является предельно рекурсивной, а их графики являются предельно рекурсивными множествами в смысле [11], следовательно, как показано в [11], графики этих функций принадлежат классам Σ_2 и Π_2 в иерархии множеств Клини-Мостовского (см., например, [14]). Мы рассмотрим характеристики указанных множеств точек с точки зрения более тонкой иерархии Ю. Л. Ершова [1]. Будет показано, что каждое из этих множеств гиперимунно и принадлежит классу Π_1^{-1} и разности классов Σ_2^{-1} и Σ_1^{-1}; этим полностью определяется место указанных множеств в иерархии Ю. Л. Ершова.

Воспользуемся канторовской нумерацией пар натуральных чисел, через $c(x, y)$, $l(z)$, $r(z)$ будем обозначать функции, определяющие эту нумерацию (см. [13]).

График рассматриваемой функции $Ш^{\Phi_2\Phi_1}$ или $Ш^{a}_{\Phi}$ обозначим через Г. Множество канторовских номеров пар, являющихся точками графика Г, обозначим через $c(\Gamma)$.

Теорема 5. *Множество* $c(\Gamma)$ *для функции* $Ш^{\Phi_2\Phi_1}$ ($Ш^{a}_{\Phi}$) *принадлежит классу* Π_1^{-1} (*т. е. дополнение его рекурсивно перечислимо*).

Доказательство мы проведем только для функции $Ш^{\Phi_2\Phi_1}$, поскольку для $Ш^{a}_{\Phi}$ все рассмотрения аналогичны. Построим двухместное общерекурсивное отношение $H(z, t)$ такое, что:

$$z \in c(\Gamma) \leftrightarrow \forall t H(z, t) \qquad (*)$$

Тем самым будет показана антиперечислимость множества $c(\Gamma)$, т. е. существование рекурсивно перечислимого множества N' такого, что

$$c(\Gamma) = N \setminus N'$$

(через N обозначено множество всех натуральных чисел).
Определим следующую функцию:

$$f(n, t) = \max_{C_{\Phi_2}(F) \leqslant n \,\&\, C_{\Phi_1}(F) \leqslant t} C_{\Phi_1}(F).$$

Таким образом, для каждой пары натуральных чисел n и t функция $f(n, t)$ равна наибольшей сложности вывода в теории Φ_1, таких формул, которые в Φ_2 выводимы со сложностью, не превышающей n, а в теории Φ_1 — со сложностью, не превышающей t.

Из свойств функций $C_{\Phi_i}(F)$ следует, что функция $f(n, t)$ является общерекурсивной.

Отметим также следующие свойства функции $f(n, t)$:

1) функция $f(n, t)$ монотонна по обоим аргументам;

2) $\forall n \forall t (f(n, t) \leqslant t)$;

3) для всякого n существует единственное m такое, что:

$$\forall t (t \geqslant m \to f(n, t) = m),$$

при этом каждое натуральное число n именно в паре с этим m входит в множество Γ.

Отсюда имеем:

$$(n, m) \in \Gamma \leftrightarrow \forall t (t \geqslant m \to f(n, t) = m).$$

Действительно, если пара $(n, m) \in \Gamma$, то, по определению функции $f(n, t)$, для всякого t, превышающего m, имеет место $f(n, t) = m$; если пара $(n, m) \notin \Gamma$, то существует некоторое натуральное число $m_1 \neq m$ такое, что $(n, m_1) \in \Gamma$. Тогда $f(n, t) = m_1$ при всех $t \geqslant m_1$, а потому $\forall t (t \geqslant m \to f(n, t) = m)$ не имеет места.

Теперь в роли $H(z, t)$, указанного в начале доказательства, возьмем следующее отношение:

$$t \geqslant r(z) \to f(l(z), t) = r(z).$$

Для этого отношения, в силу вышесказанного, выполнено условие (*).

Теорема доказана.

Следствие: Функция $Ш^{\Phi_2\Phi_1}(Ш^a_\Phi)$ является предельно рекурсивной, а множество $c(\Gamma)$ является предельно рекурсивным множеством.

Действительно,

$$Ш^{\Phi_2\Phi_1}(n) = \lim_{t\to\infty} f(n, t).$$

Для доказательства предельной рекурсивности множества $c(\Gamma)$ достаточно взять общерекурсивную функцию:

$$g(z, t) = \overline{sg}\,|f(l(z), t) - r(z)|,$$

для которой выполнены условия

$$z \in c(\Gamma) \leftrightarrow \lim_{t\to\infty} g(z, t) = 1,$$

$$z \overline{\in} c(\Gamma) \leftrightarrow \lim_{t\to\infty} g(z, t) = 0,$$

что и требовалось.

Теорема 6. *Множество $c(\Gamma)$ для функции $Ш^{\Phi_2\Phi_1}(Ш^a_\Phi)$ принадлежит Σ_2^{-1} и не принадлежит классу Σ_1^{-1}.*

Доказательство этой теоремы мы проведем только для функции $Ш^{\Phi_2\Phi_1}$.

Так как функция $Ш^{\Phi_2\Phi_1}$ всюду определена и не является рекурсивной, то ее график не может быть рекурсивно перечислимым, значит $c(\Gamma) \overline{\in} \Sigma_1^{-1}$.

Для того, чтобы показать принадлежность множества $c(\Gamma)$ классу Σ_2^{-1} достаточно построить два рекурсивно перечислимых множества N_1 и N_2 таких, что $c(\Gamma) = N_1 \setminus N_2$.

Введем в рассмотрение множество

$$\Pi = \{(n, m)/\exists m_1 > m\,((n, m_1) \in \Gamma)\},$$

которое мы будем называть подграфиком функции $Ш^{\Phi_2\Phi_1}$.

Покажем рекурсивную перечислимость множеств $c(\Pi \cup \Gamma)$ и $c(\Pi)$, которые и могут быть взяты в качестве множеств N_1 и N_2 соответственно.

Мы приведем лишь неформальное описание способа перечисления множества $c(\Pi)$ (множество $c(\Pi \cup \Gamma)$ может быть перечислено аналогичным методом).

Воспользуемся свойством функций $C_{\Phi_i}(F)$, в силу которого для каждого n можно эффективно выписать все формулы F, удовлетворяющие условию $C_{\Phi_i}(F) = n$.

Выберем минимальное m_1 такое, что множество формул F, для которых $C_{\Phi_i}(F) = m_1$, не пусто, и пусть формулами этого множества будут формулы

$$F_1, F_2, \ldots, F_{i_1}.$$

Для этих формул найдем значение функции C_{Φ_2}. Пусть

$$C_{\Phi_2}(F_1) = n_1,\ C_{\Phi_2}(F_2) = n_2, \ldots, C_{\Phi_2}(F_{l_1}) = n_{l_1}.$$

Выберем среди них все различные значения. Пусть таковыми являются (после перенумерации)

$$n_1, n_2, \ldots, n_{j_1}.$$

Тогда, очевидно, что пары

$$\begin{array}{l} (n_1, 0), (n_1, 1), \ldots, (n_1, m_1 - 1) \\ (n_2, 0), (n_2, 1), \ldots, (n_2, m_1 - 1) \\ (n_{j_1}, 0), (n_{j_1}, 1), \ldots, (n_{j_1}, m_1 - 1) \end{array} \qquad (**)$$

принадлежат множеству Π (соответствующие канторовские номера принадлежат множеству $c(\Pi)$).

Затем возьмем $m_2 = m_1 + 1$. Найдем все формулы $F'_1, F'_2, \ldots, F'_{l_2}$ такие, что $C_{\Phi_1}(F) = m_2$ и соответствующее множество значений функции C_{Φ_2} для этих формул: $\{n'_1, n'_2, \ldots, n'_{j_2}\}$. Для элементов $n \in \{n_1, n_2, \ldots, n_{j_1}\} \cap \{n'_1, n'_2, \ldots, n'_{j_2}\}$ к множеству (**) добавим пары вида $(n, m_2 - 1)$; для элементов $n \in \{n'_1, n'_2, \ldots, n'_{j_2}\} \setminus \{n_1, n_2, \ldots, n_{j_1}\}$ добавим пары $(n, 0), (n, 1), \ldots, (n, m_2 - 1)$.

Этот процесс порождения пар-элементов множества Π продолжим для $m = m_1 + 2, m_1 + 3, \ldots$.

Нетрудно показать, что при этом будет порожден произвольный элемент множества Π. Процесс перечисления множества $\Pi \cup \Gamma$ аналогичен указанному способу, только при каждом m_l нужно порождать пары вплоть до пары вида (n, m_l) (для соответствующих n) включительно.

Итак, множества $c(\Pi \cup \Gamma) = N_1$ и $c(\Pi) = N_2$ рекурсивно перечислимы, и $c(\Gamma) = N_1 \setminus N_2$, что и требовалось.

Теорема 7. *Множество $c(\Gamma)$ для функции $Ш^{\Phi_2\Phi_1}$ ($Ш^a_\Phi$) гиперимунно.*

Здесь также доказательство приведем для функции $Ш^{\Phi_2\Phi_1}$. Мы покажем, что множество $N \setminus c(\Gamma)$ гиперпросто, опираясь на следующее утверждение: рекурсивно перечислимое множество M гиперпросто тогда и только тогда, когда множество $N \setminus M$ бесконечно и прямой пересчет множества $N \setminus M$ не мажорируется никакой общерекурсивной функцией (см. [13]). Ясно, что множество $c(\Gamma)$ бесконечно, и его прямой пересчет производит функция $\varphi(n) = c(n, Ш^{\Phi_2\Phi_1}(n))$. Если бы некоторая о. р. ф. ψ мажорировала функцию φ, то в силу того, что

$$\forall x \forall y (c(x, y) \geqslant y),$$

функция φ мажорировала бы и функцию $Ш^{\Phi_1\Phi_1}$, что противоречило бы утверждению основной теоремы. Итак, множество $N \setminus c(\Gamma)$ гиперпросто, а значит множество $c(\Gamma)$ гипериммунно.

Теорема доказана.

Автор выражает глубокую благодарность Н. В. Петри за ценные указания и замечания.

Ա. Ս. ՉՈՒԲԱՐՅԱՆ

ՊՐԵԴԻԿԱՏՆԵՐԻ ՀԱՇՎԻ ԵՎ ԶԵՎԱՅԻՆ ԹՎԱԲԱՆՈՒԹՅԱՆ ՈՐՈՇ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԱՐՏԱՅՈՒՄՆԵՐԻ ԲԱՐԴՈՒԹՅԱՆ ԲՆՈՒԹԱԳՐԻՉՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Տրվում են նույն բանաձևերի արտածումների բարդության համեմատական գնահատականները պրեդիկատների դասական, կոնստրուկտիվ և մինիմալ հաշիվներում, ինչպես նաև ձևային թվաբանության համապատասխան համակարգերում։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ершов Ю. Л.* Об одной иерархии множеств 1. Алгебра и логика. т. 7, вып. 1, 1968, 47—74.
2. *Чубарян А. А.* О длинах выводов формул в расширениях формальной арифметики. Изв. АН Арм. ССР, т. 9, вып. 5, 1974.
3. *Канович М. И.* Теорема об ускорении в формальных системах. Сб. «Сложность вычислений и алгоритмов», М., «Мир», 1974, 186—189.
4. *Arbib M. A.* Speed-up theorems and incompleteness theorems, "Automata theori", N. J.—L., Acad. ACM, 14, Press, 1966, 6—24.
5. *Ehrenfeucht A., Mycielski J.* Abbreviating proofs by adding new axioms, Bull. AMS, 17, № 3, 1971, 366—367.
6. *Gödel K.* Über die Länge von Beweisen, Ergeb. Math. Koll. Heft 7, 1936, 23—24.
7. *Kreisel G., Hao Wang*, Some applications of formalized consistency proofs, Fund. math. 42, № 1, 1955.
8. *Mostowski A.* Sentences undecidable in formalized arithmetik. An exposition of the theory of Kurt Gödel, North Holland, Amsterdam, 1952. 112—115.
9. *Parikh R.* Existence and feasibility in arithmetic. The Journal of Symbolic Logic, 36, № 3, Sept., 1971, 494—508.
10. *Блюм М.* Машинно-независимая теория сложности рекурсивных функций, Сб. «Проблемы математической логики», «Мир», М., 1970, 401—422.
11. *Gold E. M.* Limiting Recursion, The Journal of Symbolic Logic, V, 30, № 1, March, 1965, 28—38.
12. *Клини С. К.* Введение в метаматематику, М., ИЛ, 1957.
13. *Мальцев А. И.* Алгоритмы и рекурсивные функции, М., «Наука», 1964.
14. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, «Мир», М., 1972.
15. *Чубарян А. А.* О сложности выводов в формальной арифметике и исчислении предикатов, Доклады АН Арм. ССР, т. XIX, № 4, 1977, 193—196.