АЛГОРИФМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СЛОЖНОСТИ

А. Д. САРКИСЯН

О КЛАССАХ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ВРЕМЕНЕМ ИХ ВЫЧИСЛЕНИЯ НА ИТЕРАТИВНЫХ СЕТЯХ

§ 1. Введение

Исследование автоматных сетей, имеющих однородную структуру, привлекает все большее внимание исследователей. Это объясняется, помимо самостоятельного математического интереса изучаемых объектов, также их возрастающим прикладным значением, прежде всего в проектировании вычислительных комплексов ([1], [2]).

Весьма интенсивно в последнее время проводятся исследования, направленные на изучение структурных характеристик поведения однородных сетей ([3]—[6]) и их возможностей взаимного моделирования поведения друг друга ([7]—[9]).

Другим актуальным направлением естественно считать выявление вычислительных возможностей итеративных сетей. Благодаря тому, что эти системы имеют по сравнению с машинами Тьюринга большую возможность запараллеливания процессов вычисления, для них сравнительно легко устанавливаются факты, которые для машин Тьюринга пока не удается установить. Известно, например, что для класса одномерных итеративных сетей существует универсальная сеть с линейным замедлением ([10]); умножение двух чисел можно выполнить на одномерных итеративных сетях за линейное время в зависимости от длин сомножителей ([11]). Для машин Тьюринга аналогичные утверждения не установлены. Эти факты, в частности, позволяют провести более тонкую классификацию временных, сложностных классов в низших классах сложности (например, в классе функций и предикатов, реализуемых на машинах Тьюринга или на итеративных сетях за полиномиальное время в зависимости от длин входов).

В дальнейшем изучаются классы сложности арифметических функций по отношению к времени их реализации на итеративных сетях. В частности, будет установлено, что при определенных условиях сколь угодно малое увеличение допустимой сложности приводит к такому расширению рассматриваемого сложностного класса, что в новом классе существует универсальная функция для первоначального.

Этот факт позволяет, например, среди полиномиально вычислимых функций и предикатов построить бесконечную систему классов сложности, плотную и неограниченную относительно упорядочивания по включению, где каждый класс содержит универсальную функцию для любого предшествующего ему класса.

Отметим еще, что в указанной классификации заведомо не возникает некоторых «пробелов», которые имеют место при классификации с помощью машин Тьюринга ([12]).

Формулировки основных результатов, устанавливаемых ниже, были опубликованы в [16].

§ 2. Основные определения и обозначения

Условимся в дальнейшем буквы n, m, r, i, j, c, d, x, y, z (может быть, с индексами) употреблять в роли переменных, допустимыми значениями которых являются любые натуральные числа (условимся число 0 также считать натуральным). Множество натуральных чисел обозначим через N.

В качестве алфавита будем допускать рассмотрение любого конечного множества. Через $\tilde{M}$ обозначим множество всех слов в алфавите M, т. е. множество всевозможных конечных последовательностей, составленных из элементов M. Буквой Ω обозначается пустое слово. Длину слова Θ обозначим через $l(\Theta)$. Если Θ_1 и Θ_2 слова, то через $\Theta_1 \circ \Theta_2$ обозначается слово, которое получается приписыванием слова Θ_2 справа к слову Θ_1. Совпадение слов Θ_1 и Θ_2 будем обозначать через $\Theta_1 \overline{\overline{\circ}} \Theta_2$. Введем следующие обозначения: $A_m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ для любого $m \geqslant 1$; $A_{m,0} = A_m \cup \{\Lambda\}$; $A_{m,1} = A_{m,0} \cup \{*\}$.

Пусть $\Theta = a_0 a_1 \ldots a_n$ — слово в алфавите $A_{m,1}$. Введем обозначения $\Theta|_i = \begin{cases} a_i, & \text{если } 0 \leqslant i \leqslant n; \\ \Lambda, & \text{если } i > n; \end{cases}$ $\Theta|_{i,j} = \Theta|_i \circ \Theta|_{i+1} \circ \cdots \circ \Theta|_j$, при $j \geqslant i$; $\Theta\downarrow$ есть слово, которое получается из слова Θ удалением всех вхождений знаков Λ и $*$.

Будем говорить, что слово Θ_1 эквивалентно слову Θ_2, и писать $\Theta_1 \sim \Theta_2$, если $\Theta_1\downarrow \overline{\overline{\circ}} \Theta_2\downarrow$.

Как обычно, арифметическими функциями будем называть любые многоместные функции, заданные на множестве натуральных чисел и принимающие натуральные значения. Предикатами будем называть функции, не принимающие значений, отличных от 0 и 1. Вместо терминов «частично-рекурсивная функция», «общерекурсивная функция» и «общерекурсивный предикат» будем писать соответственно ч. р. ф., о. р. ф. и о. р. п.

В отличие от знака $\subseteq$, знак $\subset$ будем употреблять для обозначения строгого включения множеств; таким образом, $A \subset B$ означает $(A \subseteq B) \& (A \neq B)$.

Если f и φ отображения, определенные на одном и том же множестве B, то $f \equiv \varphi$ означает $\forall x ((x \in B) \to (f(x) = \varphi(x)))$. На протяжении всего дальнейшего изложения будет предполагаться фиксированным некоторое натуральное число $p \geqslant 2$.

Определение 1. Одномерной итеративной сетью (ср. [10], [11]) называется шестерка $S = \langle Q, q_0, r, \delta_0, \delta_1, \lambda \rangle$, где Q — конечное множество; q_0 — элемент из множества Q; r — натуральное число; δ_0 — отображение множества $A_{p,1} \times Q^{r+1}$ в множество Q, удовлетворяющее условию $\delta_0(\Lambda, q_0, \ldots, q_0) = q_0$; δ_1 — отображение множества Q^{2r+1} в множество Q, удовлетворяющее условию $\delta_1(q_0, \ldots, q_0) = q_0$; λ — отображение множества $A_{p,1} \times Q$ в множество $A_{p,1}$.

Для одномерной итеративной сети $\langle Q, q_0, r, \delta_0, \delta_1, \lambda \rangle$ Q называется множеством состояний, q_0 — начальным состоянием, r — глубиной соседства, δ_0 и δ_1 называются локальными преобразованиями, причем δ_0 — начальным локальным преобразованием, λ — функцией выхода.

В дальнейшем изложении одномерную итеративную сеть будем называть просто сетью.

Определение 2. Конфигурацией сети $S = \langle Q, q_0, r, \delta_0, \delta_1, \lambda \rangle$ будем называть любое отображение множества N в множество Q, которое разве лишь конечному числу элементов N ставит в соответствие элемент, отличный от q_0.

Начальной конфигурацией сети называется конфигурация k_0, такая, что для любого $x \in N$ имеет место $k_0(x) = q_0$.

Множество конфигураций сети S обозначим через K_S.

Введем некоторые понятия, описывающие работу сети.

Предположим, что задана сеть $S = \langle Q, q_0, r, \delta_0, \delta_1, \lambda \rangle$. Определим отображение Δ_S множества $A_{p,1} \times K_S$ в множество K_S, которое каждой паре $\langle a, k \rangle \in A_{p,1} \times K_S$ ставит в соответствие конфигурацию $\Delta_S(a, k)$, определяемую в любой точке $x \in N$ следующим соотношением:

$$[\Delta_S(a, k)](x) = \begin{cases} \delta_0(a, k(0), k(1), \ldots, k(r)), & \text{если } x = 0; \\ \delta_1(\gamma_{x-r}, \ldots, \gamma_x, \ldots, \gamma_{x+r}), & \text{если } x > 0; \end{cases}$$

где

$$\gamma_i = \begin{cases} k(i) & \text{если } i \geqslant 0; \\ q_0 & \text{если } i < 0. \end{cases}$$

(Квадратные скобки в записи $[\Delta_S(a, k)](x)$ введены с целью избежать путаницы и указывают на то, что $\Delta_S(a, k)$ само является отображением. К ним мы будем прибегать каждый раз, когда необходимо будет указать значение конфигурации $\Delta_S(a, k)$ в некоторой точке).

Отображение Δ_S естественным образом индуцирует отображение, определенное на множестве $\widetilde{A}_{p,1} \times K_S$, которое обозначим через $\widetilde{\Delta}_S$, полагая $\widetilde{\Delta}_S(\Omega, k) = k$, $\widetilde{\Delta}_S(\theta \circ a, k) = \Delta_S(a, \widetilde{\Delta}_S(\theta, k))$, где $\theta \in \widetilde{A}_{p,1}$;

$a \in A_{p,1}$; $k \in K_S$. Если $\tilde{\Delta}_S(\Theta, k) = k'$, то будем говорить, что конфигурация k при входе Θ переходит в k'. Отображением $\tilde{\Delta}_S$ фактически, определяется поведение сети S.

Определим еще одно отображение, которое будет определять выход сети. Отображение B_S определено на множестве $\tilde{A}_{p,1} \times K_S$, принимает значения в множестве $A_{p,1}$ и определяется следующими соотношениями:

$$B_S(a, k) = \lambda(a, k(0)); \quad B_S(\Theta \circ a, k) = B_S(a, \tilde{\Delta}_S(\Theta, k)),$$

где $\Theta \in \tilde{A}_{p,1}$, $a \in A_{p,1}$.

Иными словами, одномерная итеративная сеть $S = \langle Q, q_0, r, \delta_0, \delta_1, \lambda \rangle$ представляет собой (ср. [10], [11]) неограниченную в одну сторону цепочку конечных автоматов Мура M_0, M_1, ... Множество внутренних состояний всех автоматов одинаковы и совпадают с множеством Q. В каждый момент дискретного времени каждый автомат может находиться в каком-то состоянии, что определяет конфигурацию сети в данный момент. Таким образом, в конфигурации k автомат M_i находится в состоянии $k(i)$. Работа сети заключается в последовательной смене конфигураций; при этом закон переходов внутренних состояний автомата M_0 определяется отображением δ_0, а смена внутренних состояний автоматов M_i, при $i \geqslant 1$, определяется отображением δ_1. Состояние каждого автомата M_i при $i \geqslant 1$, в момент времени $t+1$ определяется состоянием автоматов $M_{i-r}, \ldots, M_i, \ldots, M_{i+r}$ в момент t причем, при $1 \leqslant i < r$ автомат M_i вместо состояний отсутствующих автоматов использует состояние q_0. Вход и выход сети связаны с начальным автоматом M_0, состояние которого в каждый момент времени $t+1$ зависит от входного символа и от состояний автоматов $M_0, M_1, \ldots, M_r$ в момент времени t. В качестве алфавита входных и выходных символов выбран алфавит $A_{p,1}$. С помощью определенного выше отображения $\tilde{\Delta}_S$ задается закон смены конфигураций, т. е. определяется поведение сети. Если в момент времени t на вход сети подается знак a, и конфигурация сети совпадает с k, то одновременным изменением состояний всех автоматов сети вышеизложенным образом определяется смена конфигураций k новой конфигурацией $\tilde{\Delta}_S(a, k)$. Выход $B_S(a, k)$ сети в данный момент t будет зависеть от входного знака a и от состояния автомата A_0 в конфигурации k, т. е. от значения $k(0)$, и определяется с помощью λ.

Если $\Theta = a_0 \ldots a_m$ — слово в алфавите $A_{p,1}$, то $\tilde{\Delta}_S(\Theta, k)$ есть конфигурация, в которую переходит конфигурация k, при побуквенной подаче на вход сети слова Θ; при этом из выходов сети образуется слово $B_S(a_0, k) \circ B_S(a_0 a_1, k) \circ \cdots \circ B_S(\Theta, k)$.

§ 3. Время вычисления функций и предикатов на итеративных сетях

Пусть задана итеративная сеть $S = \langle Q, q_0, \delta_0, \delta_1, \lambda \rangle$. Для определения вычисления на итеративных сетях необходимо определить момент завершения работы сети S, при вычислениях исходя из некоторого слова Θ. С этой целью введем следующее обозначение:

$$E_S(\Theta) = \mu_t((B(\Theta|_{0,t}, k_0) \simeq *) \mathbin{\&} \forall i((0 \leqslant i < t) \to \neg(B(\Theta|_{0,i}, k_0) \simeq *))),$$

для любого Θ из множества $\widetilde{A}_{p,1}$.

Вообще говоря, отображение E_S частично-определенное. Если $E_S(\Theta)$ определено, то будем считать, что сеть S, перерабатывая слово Θ, завершает свою работу в момент $E_S(\Theta)$. Если же $E_S(\Theta)$ не определено, то считается, что сеть S работает на слове Θ бесконечно долго.

Теперь, когда уже определено условие остановки сети, мы можем рассматривать сеть, как устройство, перерабатывающее слова в алфавите $A_{p,1}$, а именно: для любого $\Theta \in \widetilde{A}_{p,1}$

$$S(\Theta) \simeq \begin{cases} B(\Theta|_{0,0}, k_0) \circ B(\Theta|_{0,1}, k_0) \circ \cdots \circ B(\Theta|_{0, E_S(\Theta)}, k_0), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } E_S(\Theta) \text{ — определено;} \\ \text{не определено} \qquad \text{в противном случае} \end{cases}$$

Известно, что для любого натурального n существует единственная система натуральных чисел $i_0, \dots, i_r$, таких, что $0 \leqslant i_j \leqslant p-1$; $i_r \neq 0$, если $r > 0$ и $n = i_0 + i_1 \cdot p + \cdots + i_r p^r$. Обозначим через $\overline{n}$ слово $i_0 i_1 \dots i_r$. Иными словами, $\overline{n}$ есть представление натурального числа n в системе с основанием p, записанное в обратном порядке.

Определим функцию L следующим образом: $L(x) \equiv l(\overline{x})$. Будем обозначать через L_n функцию принимающую в любой точке x значение $\underbrace{L(L(\cdots L}_{n \text{ раз}}(x))\cdots)$, если $n > 0$; кроме того, полагаем $L_0(x) \equiv x$.

Итеративные сети будем рассматривать как устройства, вычисляющие арифметические функции. Дадим соответствующее определение.

Определение 3. Будем говорить, что n местная ч.р.ф. f вычисляется на одномерной итеративной сети S, если для любых натуральных $x_1, \dots, x_n$ имеет место $\overline{f(x_1, \dots, x_n)} \sim S(\overline{x_1} * \cdots * \overline{x_n})$, в случае, когда $f(x_1, \dots, x_n)$ определено, и $S(\overline{x_1} * \cdots * \overline{x_n})$ не определено в случае, когда $f(x_1, \dots, x_n)$ не определено.

Легко видеть, что любая ч.р.ф. вычисляется на некоторой одномерной итеративной сети. С другой стороны, любая сеть S для произвольно фиксированного натурального n вычисляет определенную n-местную ч.р.ф., которую мы будем обозначать через F_S^n (условимся полагать, что $F_S^n(x_1, \dots, x_n) = 0$, если $E_S(\overline{x_1} * \cdots * \overline{x_n}) = 0$).

Определение 4. Временем вычисления функции F_S^n будем называть n-местную ч. р. ф. σ_S^n, значение которой при любых натуральных $x_1, \dots, x_n$ равно $l(S(\overline{x}_1 * \cdots * \overline{x}_n))$, если $S(\overline{x}_1 * \cdots * \overline{x}_n)$ определено; $\sigma_S^n(x_1, \dots, x_n)$ не определено, если $S(\overline{x}_1 * \cdots * \overline{x}_n)$ не определено.

Мы ограничимся рассмотрением вычислений общерекурсивных функций и предикатов. Очевидно, что если сеть S вычисляет n-местную о. р. ф., то функция σ_S^n тоже будет общерекурсивной.

Определение 5. Будем говорить, что n-местная о. р. ф. f вычисляется на итеративных сетях за время φ (где φ n-местная о. р. ф.), если существует сеть S и натуральные числа c и d такие, что $F_S^n(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$, $\sigma_S^n(x_1, \dots, x_n) \leqslant c \cdot \varphi(x_1, \dots, x_n) + d$ при любых натуральных $x_1, \dots, x_n$.

Предположим, что φ — n-местная о. р. ф. Обозначим через Φ_φ (соответственно через Π_φ) множество n-местных функций (соответственно, n-местных предикатов), которые вычисляются на итеративных сетях за время φ.

Функцию φ назовем „честной", если $\varphi \in \Phi_\varphi$. Заметим, что классы Φ_φ и Π_φ аналогичны классам сложности в [13]. Понятие „честной" функции несколько отличается от соответствующего понятия из [13].

Приведем некоторые утверждения, которые будут использованы в дальнейшем.

Пусть S_1 и S_2 — итеративные сети. Легко убедиться, что существует такая сеть S_3, которую в дальнейшем обозначим через $S_1^{\frac{S_2}{1}}$, что для любого $\theta \in \widetilde{A}_{p,1}$ имеет место:

$$S_3(\theta) \underset{\circ}{=} \begin{cases} S_1(\theta), & \text{если } l(S_1(\theta)) \leqslant l(S_2(\theta)), \\ S_1(\theta)|_{0,\, l(S_2(\theta))}, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Лемма 1. *Если φ—„честная" n-местная о. р. ф., то существуют сеть S и числа $c_1 \neq 0$, c_2, d_1, d_2 такие, что имеет место соотношение:* $c_1\varphi(x_1, \dots, x_n) + d_1 \leqslant \sigma_S^n(x_1, \dots, x_n) \leqslant c_2\varphi(x_1, \dots, x_n) + d_2$, *при любых $x_1, \dots, x_n$.*

Доказательство. Так как φ — „честная" о. р. ф., то по определению существует сеть S_1 и числа c, d такие, что

$$F_{S_1}^n(x_1, \dots, x_n) \equiv \varphi(x_1, \dots, x_n) \text{ и } \sigma_{S_1}^n(x_1, \dots, x_n) \leqslant c\varphi(x_1, \dots, x_n) + d.$$

Искомая сеть S строится таким образом, чтобы она сначала работала как сеть S_1, при этом значение $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ запоминается на первых $L(\varphi(x_1, \dots, x_n))$ ячейках сети, затем при каждом такте отнимается единица из запомненного числа $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ (при этом изменение высших разрядов числа $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ проводится параллельно для различных процессов вычитания единицы, порожденных на различных тактах, так что в целом весь процесс вычислений длится

$c \cdot \varphi(x_1, \ldots, x_n) + d$ тактов). Ввиду громоздкости формального описания сети, оно здесь не приводится.

Лемма 2. *Если $f = F^n_{S_1}$ и $g = F^n_{S_2}$, то существует сеть S и числа c и d такие, что для любых $x_1, \ldots, x_n$*

$$F^n_S(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, g(x_1, \ldots, x_n), x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

$$\sigma^n_S(x_1, \ldots, x_n) \leqslant c\,(\sigma^n_{S_1}(x_1, \ldots, x_{i-1}, g(x_1, \ldots, x_n), x_{i+1}, \ldots, x_n) + \\ + \sigma^n_{S_2}(x_1, \ldots, x_n)) + d.$$

Доказательство. Искомая сеть S строится таким образом, чтобы она выполняла следующие процессы: сначала вычисляется значение $g(x_1, \ldots, x_n)$ и запоминается на первых $L(g(x_1, \ldots, x_n))$ ячейках сети, а также параллельно запоминаются значения аргументов $x_1, \ldots, x_n$; как только завершается вычисление значения $g(x_1, \ldots, x_n)$, начинается вычисление значения $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, g(x_1, \ldots, x_n), x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

Формальное описание сети S здесь не приводится вследствие его громоздкости.

Определим одноместную о.р.ф. λ, которая используется в дальнейшем:

$$\lambda(x) \equiv \begin{cases} \min\limits_{\bar{x}|_i = 1} \{i\}, & \text{если существует } i, \text{ такое, что } \bar{x}|_i = 1 \\ L(x), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Лемма 3. *Функция λ является функцией большого размаха и «честной» функцией.*

Доказательство очевидно.

Лемма 4. *Если $f \in \Phi_\varphi$ n-местная о. р. ф., то*

$$sgf \in \Pi_\varphi, \quad \overline{sg}f \in \Pi_\varphi$$

Доказательство. Докажем лемму только для $\overline{sg}f$; для sgf доказательство аналогично. Очевидно, что существует сеть S_1 такая, что для любого x имеет место $F^1_{S_1}(x) = \overline{sg}(x)$ и $\sigma^1_{S_1}(x) \leqslant L(x)$. Так как $f \in \Phi_\varphi$, то существует сеть S_2 и числа c_2, d_2 такие, что для любых $x_1, \ldots, x_n$:

$$F^n_{S_2}(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n);$$

$$\sigma^n_{S_2}(x_1, \ldots, x_n) \leqslant c_2\varphi(x_1, \ldots, x_n) + d_2.$$

Из леммы 2 вытекает, что существует сеть S_3 и числа c_3, d_3 такие, что

$$F^n_{S_3}(x_1, \ldots, x_n) \equiv \overline{sg}(f(x_1, \ldots, x_n));$$

$$\sigma^n_{S_3}(x_1, \ldots, x_n) \leqslant c_3(\sigma^1_{S_1}(f(x_1, \ldots, x_n)) + \sigma^n_{S_2}(x_1, \ldots, x_n)) + d.$$

Так как
$$L(f(x_1, \dots, x_n)) \leqslant \sigma^n_{S_2}(x_1, \dots, x_n),$$
то
$$\sigma^n_{S_2}(x_1, \dots, x_n) \leqslant 2c_3\sigma^n_{S_2}(x_1, \dots, x_n) + d.$$
Следовательно, $F^n_{S_2} \in \Phi_\varphi$.

Лемма доказана.

Определение. Одномерная итеративная сеть S_0 называется линейно-универсальной, если для любой одномерной итеративной сети S существуют числа m, c и d такие, что
$$S_0(\overline{m} * \Theta) \sim S(\Theta), \quad l(S_0(\overline{m} * \Theta)) \leqslant cl(S(\Theta)) + d$$
для любого $\Theta \in \overline{A}_{p,1}$.

Несколько модифицируя доказательство, приведенное в [10], нетрудно доказать следующую лемму.

Лемма 5. *Существует линейно-универсальная сеть S_0.*

Лемма 6. *Если S_0 — линейно-универсальная сеть, φ — n-местная о. р. ф., то $f \in \Phi_\varphi$, в том и только в том случае, когда существуют такие числа m, c, d, что при любых $y_1, \dots, y_n$*
$$F^{n+1}_{S_0}(m, y_1, \dots, y_n) = f(y_1, \dots, y_n);$$
$$\sigma^{n+1}_{S_0}(m, y_1, \dots, y_n) \leqslant c \cdot \varphi(y_1, \dots, y_n) + d.$$

Доказательство. Пусть $f \in \Phi_\varphi$. Тогда существуют сеть S и числа c_1, d_1 такие, что
$$S(\overline{y}_1 * \cdots * \overline{y}_n) \sim \overline{f(y_1, \dots, y_n)}, \quad \sigma^n_S(y_1, \dots, y_n) \leqslant c_1\varphi(y_1, \dots, y_n) + d_1.$$
Так как сеть S_0 линейно-универсальная, то существуют числа m, c_2, d_2 такие, что
$$S_0(\overline{m} * \overline{y}_1 * \cdots * \overline{y}_n) \sim S(\overline{y}_1 * \cdots * \overline{y}_n)$$
и
$$l(S_0(\overline{m} * \overline{y}_1 * \cdots * \overline{y}_n)) \leqslant c_2 l(S(\overline{y}_1 * \cdots * \overline{y}_n)) + d_2.$$

Учитывая то, что по определению
$$\sigma^{n+1}_{S_0}(m, y_1, \dots, y_n) \equiv l(S_0(\overline{m} * \overline{y} * \cdots * \overline{y}_n)),$$
$$\sigma^n_S(y_1, \dots, y_n) \equiv l(S(\overline{y}_1 * \cdots * \overline{y}_n)), \quad F^n_S(y_1, \dots, y_n) \equiv f(y_1, \dots, y_n),$$
заключаем, что существуют такие числа c, d, что для любых $y_1, \dots, y_n$ имеет место
$$F^{n+1}_{S_0}(m, y_1, \dots, y_n) \equiv f(y_1, \dots, y_n);$$
$$\sigma^{n+1}_{S_0}(m, y_1, \dots, y_n) \leqslant c\varphi(y_1, \dots, y_n) + d.$$
Установим теперь обратное утверждение.

Пусть для некоторых m, c, d и при любых $y_1, \dots, y_n$ имеет место

$$F_{S_0}^{n+1}(m, y_1, \dots, y_n) = f(y_1, \dots, y_n);$$

$$\sigma_{S_0}^{n+1}(m, y_1, \dots, y_n) \leqslant c\varphi(y_1, \dots, y_n) + d.$$

Очевидно, что можно построить сеть S_1, такую, что

$$F_{S_1}^{n}(y_1, \dots, y_n) = m, \quad \sigma_{S_1}^{n}(y_1, \dots, y_n) \leqslant c_1 m + d_1,$$

при некоторых c_1, d_1 и для любых $y_1, \dots, y_n$. Из леммы 2 следует, что существуют сеть S_2, и числа c_2 и d_2 такие, что

$$F_{S_2}^{n}(y_1, \dots, y_n) = F_{S_0}^{n+1}(F_{S_1}^{n}(y_1, \dots, y_n), y_1, \dots, y_n)$$

$$\sigma_{S_2}^{n}(y_1, \dots, y_n) \leqslant c_2(\sigma_{S_0}^{n+1}(F_{S_1}^{n}(y_1, \dots, y_n), y_1, \dots, y_n) + \sigma_{S_1}^{n}(y_1, \dots, y_n)) + d_2.$$

Используя вышеприведенные неравенства, заключаем, что существуют числа c_3, d_3 такие, что

$$F_{S_2}^{n}(y_1, \dots, y_n) \equiv f(y_1, \dots, y_n); \quad \sigma_{S_2}^{n}(y_1, \dots, y_n) \leqslant c_3\varphi(y_1, \dots, y_n) + d_3.$$

Следовательно, $f \in \Phi_\varphi$,

Лемма доказана.

§4. Взаимоотношения между сложностными классами

Пусть заданы два класса Φ_φ и Φ_ψ. Возникает вопрос: что можно сказать о взаимоотношениях между классами Φ_φ и Φ_ψ, исходя из взаимоотношений между функциями φ и ψ.

Сначала исследуем свойство одного класса о.р.ф. быть подмножеством (или собственным подмножеством) другого.

Следующее утверждение непосредственно вытекает из определения классов Φ_φ и Π_φ.

Если φ и ψ n-местные о. р. ф. и всюду имеет место:

$$\psi(x_1, \dots, x_n) \leqslant c\varphi(x_1, \dots, x_n) + d$$

при некоторых c и d, то

$$\Phi_\psi \subseteq \Phi_\varphi; \quad \Pi_\psi \subseteq \Pi_\varphi.$$

Отсюда, в частности, следует, что если функция φ мажорирует функцию ψ почти всюду, то $\Phi_\psi \subseteq \Phi_\varphi$ и $\Pi_\psi \subseteq \Pi_\varphi$.

В нижеследующей теореме 1 сформулировано достаточное условие для того, чтобы эти включения были строгими.

Теорема 1. *Пусть φ—„честная" n-местная о. р. ф., ψ—n-местная о. р. ф., и пусть для любых c и d существует число r такое, что при любом $i_1 \geqslant r$ найдутся натуральные числа $i_2, \dots, i_n$, удовлетворяющие условию $c\psi(i_1, i_2, \dots, i_n) + d \leqslant \varphi(i_1, \dots, i_n)$. Тогда $\Phi_\varphi \setminus \Phi_\psi \neq \varnothing$; $\Pi_\varphi \setminus \Pi_\psi \neq \varnothing$.*

Доказательство. Доказательство теоремы проведем только для классов предикатов. Для классов функций доказательство аналогично.

Для доказательства теоремы построим предикат, принадлежащий Π_φ и не принадлежащий Π_ψ.

Пусть S_0 — линейно-универсальная сеть.

Через S_1 обозначим сеть, вычисляющую одноместную функцию λ за время λ, где λ функция из леммы 3. Это означает, что $\sigma^1_{S_1}(x) \leqslant \leqslant c_1\lambda(x) + d_1$, для некоторых c_1 и d_1.

Из лемм 2 и 4 следует существование такой сети S_2, что

$$\begin{gathered} F^n_{S_2}(x_1, \ldots, x_n) \equiv \overline{Sg} F^{n+1}_{S_0}(\lambda(x_1), x_1, \ldots, x_n); \\ \sigma^n_{S_2}(x_1, \ldots, x_n) \leqslant c_2(\sigma^{n+1}_{S_0}(\lambda(x_1), x_1, \ldots, x_n) + \lambda(x_1)) + d_2. \end{gathered} \tag{1}$$

Так как φ—„честная" о. р. ф., то по лемме 1 существует сеть S_3 и числа $c_3 \neq 0$, c_4, d_3, d_4, такие, что

$$c_3\varphi(x_1, \ldots, x_n) + d_3 \leqslant \sigma^n_{S_3}(x_1, \ldots, x_n) \leqslant c_4\varphi(x_1, \ldots, x_n) + d_4,$$

при любых значениях $x_1, \ldots, x_n$.

Обозначим через S_4 сеть $S_2^{S_3}$.

Можем считать, что

$$F^n_{S_4}(x_1, \ldots, x_n) \equiv \begin{cases} F^n_{S_2}(x_1, \ldots, x_n), & \text{если } \sigma^n_{S_2}(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \sigma^n_{S_3}(x_1, \ldots, x_n), \\ 1, & \text{если } \sigma^n_{S_2}(x_1, \ldots, x_n) > \sigma^n_{S_3}(x_1, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Так как по построению $\sigma^n_{S_4}(x_1, \ldots, x_n) \leqslant c_4\varphi(x_1, \ldots, x_n) + d$ при любых $x_1, \ldots, x_n$, то $F^n_{S_4} \in \Pi_\varphi$.

Остается доказать, что $F^n_{S_4}$ не может принадлежать Π_ψ. Для этого покажем, что при любом $P \in \Pi_\psi$ существуют числа $i_1, \ldots, i_n$, такие, что $F^n_{S_4}(i_1, \ldots, i_n) = \overline{Sg}\, P(i_1, \ldots, i_n)$.

Пусть $P \in \Pi_\psi$. Это означает, что существуют сеть S' и числа c', d' такие, что для любых $x_1, \ldots, x_n$

$$\begin{gathered} F^n_{S'}(x_1, \ldots, x_n) = P(x_1, \ldots, x_n); \\ \sigma^n_{S'}(x_1, \ldots, x_n) \leqslant c'\psi(x_1, \ldots, x_n) + d'. \end{gathered} \tag{2}$$

Так как S_0 — линейно-универсальная сеть, то существуют числа m, c_5, d_5, такие, что при любых $x_1, \ldots, x_n$

$$\begin{gathered} F^{n+1}_{S_0}(m, x_1, \ldots, x_n) = F^n_{S'}(x_1, \ldots, x_n), \\ \sigma^{n+1}_{S_0}(m, x_1, \ldots, x_n) \leqslant c_5 \cdot \sigma^n_{S'}(x_1, \ldots, x_n) + d_5. \end{gathered} \tag{3}$$

С помощью соотношений (1), (2), (3) оценим функцию $\sigma^n_{S_2}$ сверху. При любых $x_1, \ldots, x_n$ таких, что $\lambda(x_1) = m$ имеем:

$$\begin{gathered} \sigma^n_{S_2}(x_1, \ldots, x_n) \leqslant c_2(\sigma^{n+1}_{S_0}(\lambda(x_1), x_1, \ldots, x_n) + \lambda(x_1)) + d_2 \leqslant \\ \leqslant c_2(c_5 \cdot \sigma^n_{S'}(x_1, \ldots, x_n) + d_5 + m) + d_2 \leqslant c_2(c_5(c'\psi(x_1, \ldots, x_n) + d') + \\ + d_5 + m) + d_2 = \breve{c}\psi(x_1, \ldots, x_n) + \breve{d}, \end{gathered}$$

где $\breve{c} = c_2 \cdot c_5 \cdot c'$, $\breve{d} = c_2 \cdot m + c_2 \cdot c_5 \cdot d' + c_2 \cdot d_5 + d_2$.

Пользуясь условиями теоремы и тем обстоятельством, что λ — функция большого размаха, выберем числа $i_1, i_2, \ldots, i_n$ таким образом, что

$$\lambda(i_1) = m; \ \bar{c}\psi(i_1, \ldots, i_n) + \bar{d} \leqslant \varphi(i_1, \ldots, i_n).$$

Тогда имеем:

$$\sigma^n_{S_2}(i_1, \ldots, i_n) \leqslant \varphi(i_1, \ldots, i_n) \leqslant c_3\varphi(i_1, \ldots, i_n) + d_3.$$

Следовательно,

$$\sigma^n_{S_2}(i_1, \ldots, i_n) \leqslant c^n_{S_2}(i_1, \ldots, i_n).$$

С помощью последнего неравенства и вышеприведенных соотношений получим:

$$F^n_{S_4}(i_1, \ldots, i_n) = F^n_{S_2}(i_1, \ldots, i_n) = \overline{Sg}F^{n+1}_{S_0}(\lambda(i_1), i_1, \ldots, i_n) =$$

$$= \overline{Sg}F^{n+1}_{S_0}(m, i_1, \ldots, i_n) = \overline{Sg}F^n_{S'}(i_1, \ldots, i_n) = \overline{Sg}P(i_1, \ldots, i_n).$$

Тем самым получили, что в точке $i_1, \ldots, i_n$ значения предикатов $F^n_{S_4}$ и P не совпадают. Следовательно, $F^n_{S_4} \overline{\in} \Pi_\psi$.

Теорема доказана.

Заметим, что идея доказательства теоремы 1 аналогична идее доказательства теоремы 13 из [13], относящейся к многоленточным машинам Тьюринга, однако специфика итеративных сетей позволяет усилить соответствующее утверждение по сравнению с указанной теоремой.

Следствие. Пусть φ — „честная" n-местная о. р. ф., ψ — любая n-местная о. р. ф., φ и ψ отличны от нуля всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек, и

$$\lim_{x_1+\cdots+x_n\to\infty} \frac{\psi(x_1, \ldots, x_n)}{\varphi(x_1, \ldots, x_n)} = 0.$$

Тогда

$$\Phi_\psi \subset \Phi_\varphi; \quad \Pi_\psi \subset \Pi_\varphi.$$

Заметим также, что теорема 1 дает возможность получить несравнимые сложностные классы.

Будем говорить, что $(n+1)$-местная арифметическая функция U является универсальной для множества M n-местных арифметических функций, если M совпадает с множеством функций, получающихся посредством подстановки натуральных констант на место первого аргумента в U.

Возникает вопрос, в каких случаях можно утверждать, что в классе Φ_φ (соответственно в классе Π_φ) существует универсальная функция для класса Φ_ψ (соответственно, для класса Π_ψ).

Теорема 2. *Пусть ψ — n-местная о. р. ф., τ — одноместная о. р. ф., и удовлетворяются следующие условия:*

1) *τ — неограниченная неубывающая о. р. ф.;*

2) *$(n+1)$-местная функция φ, такая, что*

$$\varphi(x, y_1, \ldots, y_n) \equiv \tau(x) \cdot (\psi(y_1, \ldots, y_n) + 1)$$

является „честной".

Тогда существуют: функция U, универсальная для множества Φ_ψ, и предикат P, универсальный для множества Π_ψ, такие, что

$$U \in \Phi_\varphi; \quad P \in \Pi_\varphi.$$

Доказательство заключается в построении подходящей универсальной функции.

Пусть S_0 — линейно-универсальная сеть. Через S_1 обозначим сеть, вычисляющую одноместную функцию λ за время λ, где λ — функция, указанная в лемме 3. Это означает, что

$\sigma^1_{S_1}(x) \leqslant c_1\lambda(x) + d_1$ для некоторых c_1 и d_1.

Из леммы 2 следует существование сети S_2, чисел c_2, d_2, таких, что при любых $x, y_1, \ldots, y_n$ имеет место:

$$F^{n+1}_{S_2}(x, y_1, \ldots, y_n) = F^{n+1}_{S_0}(\lambda(x), y_1, \ldots, y_n);$$

$$\sigma^{n+1}_{S_2}(x, y_1, \ldots, y_n) \leqslant c_2(\sigma^{n+1}_{S_0}(\lambda(x), y_1, \ldots, y_n) + \lambda(x)) + d_2.$$

Так как по условию теоремы о. р. ф. φ является „честной", то по лемме 1 существует сеть S_3 и натуральные числа $c_3 \neq 0$, c_4, d_3, d_4 такие, что

$$c_3\varphi(x, y_1, \ldots, y_n) + d_3 \leqslant \sigma^{n+1}_{S_3}(x, y_1, \ldots, y_n) \leqslant c_4\varphi(x, y_1, \ldots, y_n) + d_4$$

при любых значениях $x_1, y_1, \ldots, y_n$.

Обозначим через S_4 сеть $S_2^{\underline{S_3}}$.

Имеем:

$$F^{n+1}_{S_4}(x, y_1, \ldots, y_n) = F^{n+1}_{S_2}(x, y_1, \ldots, y_n),$$

если только

$$\sigma^{n+1}_{S_2}(x, y_1, \ldots, y_n) \leqslant \sigma^{n+1}_{S_3}(x, y_1, \ldots, y_n).$$

Так как

$\sigma^{n+1}_{S_3}(x, y_1, \ldots, y_n) \leqslant c_4\varphi(x, y_1, \ldots, y_n) + d_4$, то $F^{n+1}_{S_4} \in \Phi_\varphi$.

Докажем, что $F^{n+1}_{S_4}$ является универсальной функцией для класса Φ_ψ. Для любого m имеем:

$$\sigma^{n+1}_{S_4}(m, y_1, \ldots, y_n) \leqslant \sigma^{n+1}_{S_3}(m, y_1, \ldots, y_n) \leqslant c_4\varphi(m, y_1, \ldots, y_n) + d_4 =$$

$$= c_4\tau(m)(\psi(y_1, \ldots, y_n) + 1) + d_4 = \tilde{c}\psi(y_1, \ldots, y_n) + \tilde{d},$$

где

$$\tilde{c} = c_4 \cdot \tau(m); \quad \tilde{d} = c_4 \cdot \tau(m) + d_4.$$

Значит, согласно лемме 6, для любого фиксированного m n-местная функция $F^{n+1}_{S_4}(m, \ldots)$ принадлежит классу Φ_ψ.

С другой стороны, предположим, что f — любая функция из класса Φ_ψ. Тогда, по лемме 6, существуют числа m, c, d, такие, что

$$F^{n+1}_{S_4}(m, y_1, \ldots, y_n) \equiv f(y_1, \ldots, y_n);$$

$$\sigma^{n+1}_{S_4}(m, y_1, \ldots, y_n) \leqslant c \cdot \psi(y_1, \ldots, y_n) + d.$$

Оценим функцию $\sigma^{n+1}_{S_5}$ сверху при таких x, что $\lambda(x) = m$:

$$\sigma^{n+1}_{S_5}(x, y_1, \ldots, y_n) \leqslant c_2(\sigma^{n+1}_{S_4}(\lambda(x), y_1, \ldots, y_n) + \lambda(x)) + d_2 \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \cdot c \cdot \psi(y_1, \ldots, y_n) + (c_2 d + c_2 \cdot \lambda(x) + d_2).$$

Так как по условию теоремы $\tau(x)$ — неограниченная неубывающая о. р. ф., а λ — функция большого размаха и $c_3 \neq 0$, то можно выбрать i таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$\lambda(i) = m \quad \text{и} \quad c_3 \tau(i) \geqslant \max\{c_2 \cdot c; \ (c_2 d + c_2 + d_2)\}.$$

Тогда будем иметь:

$$\sigma^{n+1}_{S_5}(i, y_1, \ldots, y_n) \leqslant c_3 \varphi(i, y_1, \ldots, y_n) + d_3 < \sigma^{n+1}_{S_3}(i, y_1, \ldots, y_n).$$

Отсюда следует, что при таком выборе i для любых $y_1, \ldots, y_n$

$$F^{n+1}_{S_4}(i, y_1, \ldots, y_n) = F^{n+1}_{S_5}(i, y_1, \ldots, y_n) =$$

$$= F^{n+1}_{S_4}(m, y_1, \ldots, y_n) = f(y_1, \ldots, y_n).$$

Таким образом, доказано, что $(n+1)$-местная о. р. ф. $U = F^{n+1}_{S_4}$ является универсальной для класса Φ_ψ и принадлежит классу Φ_φ. Легко убедиться, что предикат $P = sgF^{n+1}_{S_4}$ принадлежит классу Π_φ и является универсальным для класса Π_ψ.

Теорема доказана.

Предположим, что φ — одноместная о. р. ф. Обозначим через $I_{n,\varphi}$ n-местную о. р. ф., определяемую тождеством

$$I_{n,\varphi}(x_1, \ldots, x_n) \equiv \varphi(L(x_1) + \cdots + L(x_n)).$$

Для любой одноместной о. р. ф. φ полагаем

$$\widetilde{\Phi}_\varphi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_{I_{n,\varphi}}; \quad \widetilde{\Pi}_\varphi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_{I_{n,\varphi}}.$$

Таким образом, классу $\widetilde{\Phi}_\varphi$ (соответственно $\widetilde{\Pi}_\varphi$) принадлежат при любых n все такие n-местные функции f (соответственно, все такие n-местные предикаты P), что время вычисления значения f (соответственно, P) при любых значениях аргументов $x_1, \ldots, x_n$ не превосходят $c \cdot \varphi(L(x_1) + \cdots + L(x_n)) + d$.

Будем говорить, что одноместная о. р. ф. φ **разложима**, если существует одноместная о. р. ф. ψ такая, что для всех значений x, y имеет место: $\varphi(x+y) \leqslant \psi(x)(\varphi(y)+1)$.

Теорема 3. *Пусть ψ — одноместная, неубывающая, „честная“, разложимая о. р. ф., такая, что $\psi(x) \geqslant x$ для всякого x.*

Пусть τ — неограниченная, неубывающая одноместная о. р. ф., удовлетворяющая условию $\tau \in \Phi_L$.

Тогда для любого n существуют: $(n+1)$-местная функция U_n, универсальная для множества $\Phi_{I_{n,\psi}}$ и $(n+1)$-местный предикат P_n, универсальный для множества $\Pi_{I_{n,\psi}}$, такие, что $U_n \in \widetilde{\Phi}_\varphi$; $P_n \in \widetilde{\Pi}_\varphi$, где $\varphi(x) = \tau(x) \cdot \psi(x)$ для всякого x.

Доказательство. Покажем, что при условиях теоремы функция $\nu(x, y_1, \ldots, y_n) \equiv \tau(L(x)) \cdot \psi(L(x) + L(y_1) + \cdots + L(y_n))$ является „честной“.

Используя „честность“ функции ψ и лемму 2, легко убедиться, что существует такая сеть S_5, что при любых $x, y_1, \ldots, y_n$ имеет место:

$$F^{n+1}_{S_5}(x, y_1, \ldots, y_n) = \psi(L(x) + L(y_1) + \cdots + L(y_n));$$

$$\sigma^{n+1}_{S_5}(x, y_1, \ldots, y_n) \leqslant c_5(\psi(L(x) + L(y_1) + \cdots + L(y_n)) + L(x) + L(y_1) + \cdots + L(y_n)) + d.$$

Так как по условию теоремы для любого x имеет место $\psi(x) \geqslant x$, то существуют $\widetilde{c}_5$, $\widetilde{d}_5$, такие, что

$$\sigma^{n+1}_{S_5}(x, y_1, \ldots, y_n) \leqslant \widetilde{c}_5 \psi(L(x) + L(y_1) + \cdots + L(y_n)) + \widetilde{d}_5$$

при любых $x, y_1, \ldots, y_n$.

Из условия $\tau \in \Phi_L$ и леммы 2 устанавливаем существование сети S_6 и чисел c_6, d_6 таких, что при любом x

$$F^1_{S_6}(x) = \tau(L(x)); \qquad \sigma^1_{S_6}(x) \leqslant c_6 \cdot L(x) + d_6.$$

Согласно [11] существует такая сеть S_7 и числа c_7, d_7, что при любых z_1, z_2

$$F^2_{S_7}(z_1, z_2) = z_1 \cdot z_2; \qquad \sigma^2_{S_7}(z_1, z_2) \leqslant c_7(L(z_1) + L(z_2)) + d_7.$$

Используя лемму 2, заключаем, что существуют сеть S_8 и числа c_8, d_8 такие, что при любых $x, y_1, \ldots, y_n$

$$F^{n+1}_{S_8}(x, y_1, \ldots, y_n) = \nu(x, y_1, \ldots, y_n);$$

$$\sigma^{n+1}_{S_8}(x, y_1, \ldots, y_n) \leqslant c_8(\sigma^2_{S_7}(\tau(L(x)), \psi(L(x) + L(y_1) + \cdots + L(y_n)) + \sigma^{n+1}_{S_5}(x, y_1, \ldots, y_n) + \sigma^1_{S_6}(x)) + d_8.$$

Наконец, используя вышеприведенные неравенства и свойства функций τ и ψ, заключаем, что существуют такие числа c и d, что имеет место

$$\sigma^{n+1}_{S_8}(x, y_1, \ldots, y_n) \leqslant c \cdot \nu(x, y_1, \ldots, y_n) + d.$$

Тем самым доказано, что функция ν является „честной"; поэтому существует сеть S_3 и числа $c_3 \neq 0$, d_3, c_4, d_4 такие, что для любых $x, y_1, \ldots, y_n$ имеет место

$$c_3 \nu(x, y_1, \ldots, y_n) + d_3 \leqslant \sigma_{S_3}^{n+1}(x, y_1, \ldots, y_n) \leqslant c_4 \nu(x_1, y_1, \ldots, y_n) + d_4$$

Пусть S_0, S_1, S_2 — соответствующие сети, из доказательства теоремы 2, S_3 — выше построенная сеть; в качестве S_4 теперь возьмем сеть $S_{\frac{2}{}}^{S_3}$. Доказательство того, что S_4 удовлетв ряет требуемым условиям, аналогично соответствующей части доказательства теоремы 2. Заметим только, что при доказательстве того, что $F_{S_4}^{n+1} \in \widetilde{\Phi}_{\varphi}$ и для любого $f \in \Phi_{I_{n,\varphi}}$ существует i, такое, что $F_{S_4}^{n+1}(i, y_1, \ldots, y_n) \equiv$ $\equiv f(y_1, \ldots, y_n)$, дополнительно используется свойство функции φ быть неубывающей, а при доказательстве того, что при любом m n-местная функция, определенная соотношением $f(y_1, \ldots, y_n) \equiv F_{S_4}^{n+1}(m, y_1, \ldots, y_n)$ принадлежит классу $\Phi_{I_{n,\varphi}}$ дополнительно используется свойство функции φ быть разложимой.

§ 5. Классификация арифметических функций

В этом параграфе исследуются возможности построения иерархий сложностных классов в тех или иных классах о.р.ф.

При этом нас будут интересовать такие иерархии, в которых каждый класс содержит универсальную функцию для любого предыдущего класса. Такие иерархии интересны тем, что в них каждый класс качественно отличается от предыдущих в том смысле, что средствами этого класса можно перечислить элементы предыдущего класса. В связи с этим возникает естественный вопрос: насколько плотно могут быть расположены классы в таких иерархиях.

Дадим необходимые определения.

Предположим, что θ — некоторое множество одноместных о.р.ф., M — некоторое множество о.р.ф. (произвольных размерностей).

Будем говорить, что θ *определяет иерархию в множестве* M, если выполнены следующие условия:

(a) для любого $f \in \theta$ имеет место $\widetilde{\Phi}_f \subseteq M$;

(b) для любых двух различных о. р. ф. f и g из класса θ имеет место одно из двух соотношений: $\widetilde{\Phi}_f \subset \widetilde{\Phi}_g$ или $\widetilde{\Phi}_g \subset \widetilde{\Phi}_f$;

(c) для любых о. р. ф. f и g из множества θ, если имеет место $\widetilde{\Phi}_f \subset \widetilde{\Phi}_g$, то в классе $\widetilde{\Phi}_g$ для любого n существует универсальная $(n+1)$-местная функция для n-местных функций класса $\widetilde{\Phi}_f$.

Понятие иерархии в множестве предикатов определяется аналогично.

Если θ определяет иерархию в множестве M и удовлетворяется условие $M = \bigcup_{f \in \theta} \widetilde{\Phi}_f$, то будем говорить, что θ определяет иерархию *на множестве* M.

Пусть θ определяет иерархию в множестве M. Тогда на θ определяется линейный порядок, если считать $f \prec g$ в том и только в том случае, когда $\widetilde{\Phi}_f \subset \widetilde{\Phi}_g$.

Будем говорить, что θ определяет плотную неограниченную иерархию, если указанный порядок удовлетворяет следующим условиям:

(d) для любого $f \in \theta$ существуют f_1 и f_2 из множества θ, такие, что $f_1 \prec f$ и $f \prec f_2$.

(e) для любых двух элементов f и g множества θ, удовлетворяющих условию $f \prec g$, существует $h \in \theta$, такая, что $f \prec h \prec g$.

Через $R_{\psi, m}$ обозначим множество всех таких функций f, для которых существуют отличные от нуля натуральные числа k, $l_1, \dots, l_k$, $j_1, \dots, j_k$ такие, что $f(x) \equiv L_{m+l_k}^{j_k}(x) \cdot \dots \cdot L_{m+l_1}^{j_1}(x) \cdot \psi(x)$.

Теорема 4. *Если* ψ *и* φ — *одноместные о. р. ф., такие, что* ψ — *„честная", разложимая, неубывающая функция, такая, что всегда* $\psi(x) \geqslant x$ и $L_m(x) \cdot \psi(x) \leqslant \varphi(x)$, *то* $R_{\psi, m}$ *определяет плотные неограниченные иерархии в множествах* $\widetilde{\Phi}_\varphi$ *и* $\widetilde{\Pi}_\varphi$.

Доказательство. Непосредственным построением соответствующей сети нетрудно установить, что $L \in \Phi_L$. Используя лемму 2 и основной результат из [11], можно заключить, что для любых натуральных $r_1, \dots, r_k$, $\nu_1, \dots, \nu_k$ функция τ, определяемая соотношением $\tau(x) \equiv L_{r_k}^{\nu_k}(x) \cdot \dots \cdot L_{r_1}^{\nu_1}(x)$, принадлежит классу Φ_L. Отсюда с помощью леммы 2 и [11] нетрудно доказать, что если ψ — „честная" одноместная о. р. ф. и $\psi(x) \geqslant x$ для всякого x, то функция f, определенная тождеством $f(x) \equiv \tau(x) \cdot \psi(x)$ тоже является „честной". Заметим также, что τ является неограниченной неубывающей одноместной о. р. ф. Нетрудно доказать, что произведение двух разложимых неубывающих функций является разложимым, и что τ является разложимой.

Таким образом, мы получили, что в условиях теоремы любой элемент f множества $R_{\psi, n}$ является „честной" неубывающей, разложимой функцией.

Докажем, что в условиях теоремы для множества $R_{\psi, m}$ удовлетворяются условия (a), (b), (c), (d), (e) и тем самым $R_{\psi, m}$ определяет плотную неограниченную иерархию в множествах $\widetilde{\Phi}_\varphi$ и $\widetilde{\Pi}_\varphi$.

Предположим, что $f(x) \equiv L_{m+r_{k_1}}^{\nu_{k_1}}(x) \cdot \dots \cdot L_{m+r_1}^{\nu_1}(x) \cdot \psi(x)$ — любая функция из множества $R_{\psi, m}$. Можно предположить, что $0 < r_1 < \cdots$

$\dots < r_{k_1}$. Легко убедиться, что существуют числа c и d такие, что при любом x имеет место неравенство:

$$f(x) \leqslant L_{m+r_1}^{\nu_{k_1}+\dots+\nu_1}(x)\cdot\psi(x) \leqslant cL_m(x)\cdot\psi(x)+d \leqslant c\cdot\varphi(x)+d.$$

Следовательно $\widetilde{\Phi}_f \subseteq \widetilde{\Phi}_\varphi$, $\widetilde{\Pi}_f \subseteq \widetilde{\Phi}_\varphi$ и условие (а) выполняется.

Определим две функции:

$$f_1(x) \equiv L_{m+r_{k_1}+1}(x)\cdot\psi(x), \quad f_2(x) \equiv L_{m+r_{k_1}}(x)\cdot f(x).$$

Очевидно, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_1(L(x))}{f(L(x))}=0, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{f(L(x))}{f_2(L(x))}=0.$$

С помощью следствия из теоремы 1 заключаем, что $f_1 \prec f$, $f \prec f_2$. Тем самым условие (d) выполняется.

Предположим $g(x) \equiv L_{m+i_{k_2}}^{j_{k_2}}(x)\cdot\ \dots\ \cdot L_{m+i_1}^{j_1}(x)\cdot\psi(x)$ — любая функция из множества $R_{\psi,m}$, отличная от f.

Нетрудно заметить, что имеет место одно из двух соотношений:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(L(x))}{g(L(x))}=0 \quad \text{или} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{g(L(x))}{f(L(x))}=0.$$

Следовательно, учитывая следствие из теоремы 1, заключаем, что условие (b) тоже выполняется.

Для определенности предположим, что имеет место

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(L(x))}{g(L(x))}=0.$$

Тогда нетрудно установить, исходя из представлений функций f и g, что функция h, определенная тождеством $h(x) \equiv L_{m+r_{k_1}+1}(x)\cdot f(x)$, принадлежит классу $R_{\psi,m}$ и удовлетворяет следующему соотношению: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{h(L(x))}{g(L(x))}=0$. Применяя следствие из теоремы 1, заключаем, что $\widetilde{\Phi}_f \subset \widetilde{\Phi}_h \subset \widetilde{\Phi}_g$ и $\widetilde{\Pi}_f \subset \widetilde{\Pi}_h \subset \widetilde{\Pi}_g$ и, следовательно, условие (е) выполняется.

Так как функция f является „честной", неубывающей и разложимой функцией, то по теореме 3 в классе $\widetilde{\Phi}_h$ и тем самым в классе $\widetilde{\Phi}_g$ для любого n существует $(n+1)$-местная универсальная функция для n-местных функций класса $\widetilde{\Phi}_f$. То же самое справедливо и для классов $\widetilde{\Pi}_g$ и $\widetilde{\Pi}_f$. Тем самым установлено, что условие (с) выполняется. Следовательно, множество $R_{\psi,m}$ определяет иерархию требуемого типа в множествах $\widetilde{\Phi}_\varphi$ и $\widetilde{\Pi}_\varphi$.

Теорема доказана.

Теорема 5. *Если* $\theta = \{\psi_i\}_{i\in N}$ *определяет иерархию на множестве* $\widetilde{\Phi}_\varphi$ *(соответственно на множестве* $\widetilde{\Pi}_\varphi$*),* α *— одноместная о. р. ф., и для любого* i *имеет место* $L_{\alpha(i)}(x)\cdot\psi_i(x) \leqslant \psi_{i+1}(x)$, *и* $\psi_0(x) \geqslant x$ *при всех значениях* x, *и* ψ_i *— „честная", неубывающая разложимая функция, то множество* $\theta' = \left(\bigcup_{i\in N} R'_{\psi_i, L(i)}\right) \cup (\theta \setminus \{\psi_0\})$ *определяет плотную неограниченную иерархию на множестве* $\widetilde{\Phi}_\varphi$ *(соответственно на множестве* $\widetilde{\Pi}_\varphi$*).*

Доказательство. Теорему докажем только для множества $\widetilde{\Phi}_\varphi$; для множества $\widetilde{\Pi}_\varphi$ доказательство аналогично.

Так как θ определяет иерархию на множестве $\widetilde{\Phi}_\varphi$, то по определению имеем: $\bigcup_{\psi_i\in\theta} \widetilde{\Phi}_{\psi_i} = \widetilde{\Phi}_\varphi$.

Из условий теоремы, с помощью теорем 1 и 4 легко установить, что $\widetilde{\Phi}_{\psi_0} \subset \widetilde{\Phi}_{\psi_1}$, и что для любого i $R_{\psi_i, \alpha(i)}$ определяет плотную неограниченную иерархию в множестве $\widetilde{\Phi}_{\psi_{i+1}}$. Отсюда, в частности, следует, что имеет место $\bigcup_{\beta\in\theta'} \widetilde{\Phi}_\beta = \widetilde{\Phi}_\varphi$. Следовательно, для доказательства теоремы остается установить, что θ' определяет иерархию в множестве $\widetilde{\Phi}_\varphi$.

Последнее нетрудно установить с помощью теоремы 4 непосредственной проверкой выполнимости условий (а)—(е); при этом используется тот факт, что из условий теоремы и из определения множеств $R_{\psi_i, \alpha(i)}$ следует, что для любого $f \in R_{\psi_i, \alpha(i)}$ имеет место

$$\widetilde{\Phi}_{\psi_i} \subset \widetilde{\Phi}_f \subset \widetilde{\Phi}_{\psi_{i+1}}.$$

Теорема доказана.

В качестве следствия из теоремы 5 укажем плотную неограниченную классификацию функций и предикатов, вычислимых за полиномиальное время на итеративных сетях.

Обозначим через Ф и P соответственно множества $\bigcup_{i=0}^{\infty} \widetilde{\Phi}_{L_0^i}$ и $\bigcup_{i=0}^{\infty} \Pi_{L_0^i}$.

Легко заметить, что множества Ф и P являются соответственно множествами функций и предикатов, вычислимых на итеративных сетях за полиномиальное время, в зависимости от длин записей аргументов в системе с основанием p.

Нетрудно показать, что классы Ф и P совпадают с соответствующими классами, определенными с помощью машин Тьюринга ([14], [15]).

Следствие. Множество $\theta_0 = \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} R_{L_0^{i+1},\,0}\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{L_0^{i+1}\}\right)$ определяет плотные неограниченные иерархии на множествах Ф и P.

Ա. Դ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ԻՏԵՐԱՏԻՎ ՑԱՆՑԵՐԻ ՎՐԱ ՀԱՇՎՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿՈՎ ՈՐՈՇՎՈՂ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԴԱՍԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է մեկ չափանի իտերատիվ ցանցերի վրա Թվաբանական ֆունկցիաների հաշվման ժամանակով պայմանավորված բարդությունային դասերի փոխհարաբերությունները։ Բերվում են բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում ֆունկցիաների տված դասում կարելի է կառուցել բարդությունային դասերի անվերջ, խիտ դասակարգավորում, որում կամայական դաս պարունակում է ունիվերսալ ֆունկցիաներ բոլոր նախորդ դասերի համար։ Որպես հետևանք, բազմանդամային ժամանակում հաշվվող ֆունկցիաների դասում կառուցվում է նշված տիպի դասակարգավորում։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Евреинов Э. В., Косарев Ю. Г.* Однородные универсальные вычислительные системы высокой производительности. «Наука», Новосибирск, 1966.
2. *Евреинов Э. В., Прангишвили И. В.* Цифровые автоматы с настраиваемой структурой. «Энергия», М., 1974.
3. *Икауниекс Э. А.* Об информационных свойствах сотообразных структур. Пробл. передачи информ., 1970, 6, № 4, 49—55.
4. *Икауниекс Э. А.* О «райских садах» и взаимностираемых конфигурациях. Уравнения математической физики и теории алгоритмов. Рига, 1972, 32—62.
5. *Аладьев В. З.* К теории однородных структур. Таллин, АН ЭССР, 1972.
6. *Подколзин А. С.* О поведениях однородных структур. Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 31, «Наука», М., 1976, 133—166.
7. *Подколзин А. С.* О сложности моделирования в однородных структурах. Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 30, «Наука», М., 1975, 199—226.
8. *Подколзин А. С.* Об универсальных однородных структурах. Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 34, «Наука», М., 1979, 109—131.
9. *Барздинь Я. М.* Моделирование логических сетей на автоматах Неймана-Черча. Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 17, «Наука», М., 1966, 5—26.
10. *Бухштаб Ю. А.* Реализуемость функций на одномерных итеративных сетях в реальное время. Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 22, «Наука», М., 1970, 85—94.
11. *Атрубин А. Д.* Одномерное итеративное умножающее устройство, работающее в реальное время. Киб. сб. (новая серия), вып. 5, «Мир», М., 1968, 81—94.
12. *Трахтенброт Б. А.* Сложность алгоритмов и вычислений, Изд. НГУ, Новосибирск, 1967.

13. *Хартманс Дж., Хопкрофт Дж. Э.* Обзор теории сложности вычислений. Киб. сб. (новая серия), вып. 11, «Мир», М., 1974, 131—176.
14. *Карп Р. М.* Сводимость комбинаторных проблем, Киб. сб. (новая серия), вып. 12, «Мир», М., 1975, 16—38.
15. *Cobham A.* The intrinsic computational complexity of functions. Proc. 1964 International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, Amsterdam, 1965, 24—30.
16. *Саркисян А. Д.* О реализации арифметических функций на итеративных сетях. ДАН АрмССР, т. XVIII, № 5, 1979.