С. М. ГЮЛУМЯН, К. М. МОСЕСЯН

О КРИТИЧЕСКИХ ПО РАСКРАСКЕ РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ

Все понятия и обозначения, не определяемые здесь, можно найти в книге [1].

Пусть $L=(X, U)$ — конечный граф без петель и кратных ребер. Всюду под n-критичностью графа L будем понимать его n-хроматичность и реберную критичность по раскраске, а под n-связностью — вершинную n-связность.

Граф L называется (n, k)-графом, если он регулярный степени n, n-хроматический с обхватом, равным k. Граф L назовем 4-графом, если он 4-критический, $(4, 4)$-граф.

Эрдеш и Закс [2] доказали, что для любых $n\geqslant 2$, $g\geqslant 3$. существует, регулярный степени n с обхватом, равным g, граф, и поставили задачу определения минимального числа $f(n, g)$ вершин такого графа. Известно [3], что

$$f(2, 5)=5, \quad f(3, 5)=10, \quad f(5, 5)=30, \quad f(7, 5)=50.$$

Грюнбаум [4] построил $(4, 5)$-граф и выдвинул гипотезу: для любых $n\geqslant 3$, $k\geqslant 4$ существует некоторый (n, e)-граф с $e\geqslant k$.

В настоящей работе доказывается единственность минимального (12-вершинного) $(4, 4)$-графа, построенного Хваталом [5], и строится 13-вершинный 4-граф, который является единственным минимальным 4-графом. Далее конструируются p-вершинный 4-граф для бесконечно многих p и 5-критический регулярный q-вершинный граф для бесконечно многих q, откуда следует, что при любых $\gamma\geqslant 6$, $N\geqslant\gamma$ существует p-вершинный γ-критический регулярный $\varkappa$-связный граф L, где $\varkappa\geqslant N$, для бесконечно многих p и, что для любого $\gamma\geqslant 3$ и бесконечно многих p существует p-вершинный регулярный γ-критический граф.

Все построенные γ-критические регулярные степени r графы являются r критическими по отношению к реберной связности, что может оказаться полезным при решении таких задач, как построение оптимальных по стоимости или надежности сетей передачи информации.

Пользуясь конструкцией Дирака [см. 6], легко заметить, что имеет место

Лемма 1. Пусть $Q_i=(X_i, U_i)$, где $i=1, 2$ — произвольный 4-граф, причем $X_1 \cap X_2 = \varnothing$, $v^i \in X_i$; $u_1^i, u_2^i \notin X_j$, где $j=1, 2$ и $\Gamma_{Q_i}(v^i)=(v_1^i, v_2^i, v_3^i, v_4^i)$. Тогда $L=(X, U)$, где

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \{u_1^1, u_2^1, u_1^2, u_2^2\} \setminus \{v^1, v^2\},$$

$$U = U_1 \cup U_2 \cup \bigcup_{i=1}^{2} \bigcup_{j=1}^{2} ((u_1^i, u_j^i) \cup (u_2^i, u_{j+2}^i) \cup (u_i^1, u_j^2)) \setminus \bigcup_{i=1}^{2} \bigcup_{j=1}^{4} (v^i, v_j^i)$$

является $(|X_1|+|X_2|+2)$-вершинным 4-графом.

Применяя конструкцию Дирака, а затем конструкцию Хайоша [7], не трудно убедиться, что справедлива и

Лемма 2. Пусть $Q_i=(X_i, U_i)$, где $i=1,2$, $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ — 5-критический регулярный граф степени 6, $v^i \notin X_i$; $z, u_1^i, u_2^i \notin X_j$, где $j=1,2$; $\Gamma_{Q_i}(v^i)=(v_1^i, \ldots, v_6^i)$ и $L^0=(X^0, U^0)$, где $X^0 = X_1 \cup X_2 \cup \{u_1^1, u_2^1, u_1^2, u_2^2, z\} \setminus \{v^1, v^2\}$,

$$U^0 = U_1 \cup U_2 \cup \bigcup_{i=1}^{2} \left(\bigcup_{j=1}^{3} ((u_1^i, v_j^i) \cup (u_2^i, v_{j+3}^i)) \cup \bigcup_{j=1}^{2} u_i^1, u_i^2) \cup (z, u_j^i)) \right) \setminus$$

$$\setminus \bigcup_{i=1}^{2} \bigcup_{j=1}^{6} (v^i, v_j^i); \quad z^1, z^2 \in \Gamma_{L^0}(z).$$

Тогда $L=(X, U)$, где $X = \{X^0, X^0 \setminus z\}$,

$$U = \{U^0 \setminus (z, z^1), U^0 \setminus (z, z^2), (z^1, z^2)\}$$

является $(2(|X_1|+|X_2|+1)+1)$-вершинным 5-критическим регулярным графом степени 6.

Теорема 1. Минимальный (4, 4)-граф $M_{12}=(X, U)$, где

$$X = \{x_1, \ldots, x_5, y_1, \ldots, y_5, z_1, z_2\},$$

$$U = \bigcup_{i=1}^{5} ((x_i, x_{i+1}) \cup (y_i\ x_{i-1}) \cup (y_i, x_{i+1})) \cup \bigcup_{i=2}^{5} ((z_1, y_i) \cup (z_2, y_{i+1})) \cup (y_1\ y_2)$$

$$(y_1 = y_6,\ x_j = x_{j+5},\ j = 0,\ 1)$$

имеет 12 вершин и является единственным (с точностью до изоморфизма) 12-вершинным (4, 4)-графом.

Доказательство проводится методом упорядоченного перебора с использованием двудольного представления рассматриваемого графа из произвольной его вершины [8].

Теорема 2. Для бесконечно многих $p \geqslant 13$ существует p-вершинный 4-граф M_p, и граф $M_{13}=(X, U)$, где

$$X = \{x_1, \ldots, x_{13}\},\ U = \bigcup_{i=1}^{13} ((x_i, x_{i+2}) \cup (x_i, x_{i+3})),\ (x_{i+13} = x_i,\ i = 1, 2, 3),$$

является единственным (с точностью до изоморфизма) минимальным 4-графом.

Доказательство. Сначала покажем, что M_{13} является 4-графом. Действительно, M_{13} — регулярный степени 4 с обхватом, равным 4. граф и так как $\alpha(M_{13})=4$, то $\gamma(M_{13})\geqslant 4$. Вершинам x_{1+2i}, x_{2+2i}, x_{7+2i}, x_{8+2i}, где $i=0, 1, 2$, придав цвет α_i, вершине v_{13} — цвет $\alpha_3 \neq \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ получим 4-раскраску M_{13}, причем ясно, что $\gamma(M_{13} \setminus (x_2, x_{13}))=3$. Далее, подобность ребер вида (x_i, x_{i+2}), так же, как и ребер вида (x_i, x_{i+3}), $i \in \overline{1, 13}$, очевидна, и не трудно заметить, что подстановка

$$(x_1)(x_2\ x_6\ x_{13}\ x_9)(x_3\ x_{11}\ x_{12}\ x_4)(x_5\ x_8\ x_{10}\ x_7)$$

является автоморфизмом M_{13}, а индуцированный ею реберный автоморфизм переводит ребро (x_2, x_{13}) в ребро (x_6, x_9). Следовательно, ввиду транзитивности реберной группы автоморфизмов, граф M_{13} является реберно-симметрическим. Итак, M_{13} — 4-граф. Для завершения доказательства теоремы достаточно показать единственность и минимальность 4-графа M_{13} методом упорядоченного перебора, используя двудольное представление рассматриваемого графа из произвольной его вершины [8], и воспользоваться леммой 1.

Теорема 3. Для бесконечно многих p существует p-вершинный 5-критический регулярный граф степени 6.

Доказательство. Достаточно показать, что $L=(X, U)$, где $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_{13}\}$,

$$U=\bigcup_{i=1}^{13}((x_i, x_{i+1}) \cup (x_i, x_{i+3}) \cup (x_i, x_{i+4})),\ x_{i+13}=x_i,\ i=1, 2, 3, 4)$$

является 5-критическим регулярным графом степени 6 и воспользоваться леммой 2.

Докажем 5-критичность регулярного графа L.

Очевидно, в L ребра вида (x_i, x_{i+1}), так же, как и ребра вида (x_i, x_{i+3}), (x_i, x_{i+4}), подобны при $i \in \overline{1, 13}$, а индуцированный автоморфизмом

$$(x_1)(x_2\ x_5\ x_4\ x_{13}\ x_{10}\ x_{11})(x_3\ x_9\ x_7\ x_{12}\ x_6\ x_8)$$

реберный афтоморфизм обеспечивает реберную симметричность графа L. Следовательно, из 5-критичности некоторого ребра (которую легко установить) следует 5-критичность графа L.

Теорема доказана.

Пусть теперь $L(\gamma, p, \varkappa)$ означает некоторый регулярный γ-критический p-вершинный $\varkappa$-связный граф, а $L(\gamma, p, \varkappa, r)$ — такой граф $L(\gamma, p, \varkappa)$ со степенью регулярности r, что $p+r$ нечетно.

Теорема 4. $\forall \gamma \geqslant 6 \forall N \geqslant \gamma \forall P \geqslant 1 \exists \varkappa \geqslant N \exists p \geqslant P \exists L=(X, U)(L= =L(\gamma, p, \varkappa))$.

Доказательство. Для доказательства теоремы докажем существование $L=L(\gamma, p, \varkappa, r)$, удовлетворяющего условиям теоремы.

Очевидно, теоремы 2 и 3 справедливы и при нечетных $p \geqslant 13$, поэтому из теорем 2, 3 и свойств зыковского соединения [9] следует существование $L(\gamma, p, \varkappa, r)$ при $\gamma=6, 7, 8, 9, 10$, удовлетворяющего условиям доказываемой теоремы. Пусть такой $L(\gamma, p, \varkappa, r)$ существует для любого $\gamma \leqslant k$ $(k \geqslant 10)$; покажем существование такого

$L(\gamma, p, \varkappa, r)$ для $\gamma = k+1$.

Пусть сначала $\gamma = 2t+1 = k+1$ $(t \geqslant 5)$. По предположению индукции существует $L(2t-2, p, \varkappa, r)$ такой, что $2p-r+2 \geqslant P$, $p-r+\varkappa+2 \geqslant N$. Тогда искомым будет граф

$$L(2t+1, 2p-r+2, p-r+\varkappa+2, p+2) = L(2t-2, p, \varkappa, r) + C_{p-r+2},$$

где C_m простой цикл длины m.

Пусть теперь $\gamma = 2t = k+1$ $(t \geqslant 6)$. По предложению индукции существует $L(t, p, \varkappa, r)$ такой, что $2p \geqslant P$, $p+\varkappa \geqslant N$. Искомым графом будет

$$L(2t, 2p, p+\varkappa, p+r) = L(t, p, \varkappa, r) + L(t, p, \varkappa, r)$$

Следствие. $\forall\gamma \geqslant 3 \forall P \geqslant 1 \exists \varkappa \geqslant 2 \exists p \geqslant P \exists L = (X, U)(L = (\gamma, p, \varkappa))$

Гипотеза. $\forall\gamma = 4, 5 \forall N \geqslant \gamma \forall P \geqslant 1 \exists \varkappa \geqslant N \exists p \geqslant P \exists L(X, U)(L = L(\gamma, p, \varkappa))$.

Ս. Մ. ԳՅՈՒԼՈՒՄՅԱՆ, Կ. Մ. ՄՈՍԵՍՅԱՆ

ԸՍՏ ՆԵՐԿՄԱՆ ԿՐԻՏԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱՍԵՌ ԳՐԱՖՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում ապացուցվում է Խվատալի կողմից կառուցված մինիմալ (4,4)-գրաֆի միակությունը (իզոմորֆիզմի ճշտությամբ)։ Կառուցվում է 13-գագաթանի մինիմալ 4-գրաֆ և ցույց է տրվում նրա միակությունը (իզոմորֆիզմի ճշտությամբ)։ Այնուհետև անվերջ թվով p-երի և q-երի համար կառուցվում է p-գագաթանի 4-գրաֆներ և q-գագաթանի 5-կրիտիկական համասեռ գրաֆներ, որից ելնելով ապացուցվում է, որ անվերջ թվով p-երի և ցանկացած ամբողջ $\gamma \geqslant 6$, $N \geqslant \gamma$ թվերի համար գոյություն ունեն p-գագաթանի γ-կողային կրիտիկական (ըստ ներկման) և համասեռ $\varkappa$ $(\varkappa \geqslant N)$ կապակցված գրաֆներ։ Անվերջ թվով p-երի համար գոյություն ունի p-գագաթանի համասեռ γ-կողային կրիտիկական գրաֆ $(\gamma \geqslant 3)$։

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Зыков.* Теория конечных графов, «Наука», Новосибирск, 1969.
2. *P. Erdös, H. Sachs.* Reguläre graphen gegebener Taillenweite mit minimaler Knotenzahe, Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg, 12(1963), 251—258.
3. *G. Wegner.* A smallest graph of girth 5 and valency 5, *J. Combin.* Theory (B), 14 No. 3 (1973), 203—208.
4. *B. Grünbaum.* A problem in graph coloring, Amer. Math. Mon., No. 10 (1970) 1088—1092.
5. *V. Chvatal.* The smallest triangle free 4—chromatic 4—regular graph, J. Combin. Theory, 9, No. 1 (1970), 93—94.
6. *T. Galai.* Kritische Graphen. 1, Magyar tud. akad. Mat. Kutató int. Közl, 8, No. 1—2 (1963), 165—192.
7. *G. Hajós.* Uber eine konstruktion nicht n—färbarer Graphen, Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg, 10 (1961), 116—117.
8. *К. М. Мосесян.* Минимальный граф, не являющийся сильно базируемым, ДАН Арм. ССР, т. LIV, № 1 (1972).
9. *А. А. Зыков.* О некоторых свойствах линейных комплексов, Мат. сб., 24, № 2 (1949), 163—188.