ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник содержит работы по теории графов, выполненные в Вычислительном центре Академии наук Армянской ССР и Ереванского государственного университета.

Первые три работы относятся к неориентированным графам.

В литературе рассматривались регулярные графы с заданным обхватом (П. Эрдеш, Г. Закс), а также с заданным обхватом и хроматическим числом (Б. Грюнбаум, В. Хватал). При этом строились лишь отдельные примеры таких графов, ч они не были критическими по удалении ребер. Существование же критических графов, отличных от полного и от простого цикла нечетной длины, не очевидно. В работе С. М. Гюлумяна и К. М. Мосесяна строятся бесконечные последовательности таких графов—например, со сколь угодно большими связностью, степенью регулярности, хроматическим числом и обхватом, критических в том смысле, что удаление любого ребра уменьшает хроматическое число.

На какое наименьшее число вершинно n-раскрашиваемых частей попарно без общих ребер можно разложить заданный m-хроматический граф? При $n=2$ и дополнительном условии ацикличности частей ответ на этот вопрос дает формула Нэш-Вильямса для нахождения реберной древесности графа. В статье С. Г. Инджеяна, З. А. Кареяна и Ж. Г. Никогосяна дается ответ на поставленный вопрос при любых m и n.

Известная гипотеза Улама о восстанавливаемости n-вершинного обыкновенного графа ($n\geqslant 3$) с точностью до изоморфизма по набору всех его $(n-1)$-вершинных подграфов была переформулирована Ф. Харари для случая удаления ребер вместо удаления вершин и в общем случае до сих пор также не решена. Справедливость последней для графов с числом ребер $m>\frac{n(n-1)}{4}$ установил Л. Ловас, а В. Мюллер распространил этот результат на случай $m>n\log_2 n$. В работе П. Г. Алексаняна справедливость гипотезы Харари доказывается для нового широкого класса—с числом вершин, не превышающим сумму минимальной степени с количеством вершин этой степени (а также для некоторых других классов).

Следующие 7 статей сборника посвящены ориентированным графам и вопросам ориентируемости. Заметим, что до сих пор отечественных работ в этой важной области появилось значительно меньше, чем по неориентированным графам—в частности, практически отсутствовали исследования, относящиеся к турнирам. Здесь эти пробелы восполняются не только усилением известных результатов, но также новыми постановками и решениями. Интенсивное изучение ориентированных графов продолжается (появилось несколько работ уже после сдачи в печать настоящего сборника)*.

Каждому множеству, наделенному структурой типа упорядоченности, можно естественным образом отнести ориентированный граф. Отвлекаясь (полностью или частично) от ориентации ребер последнего, получаем неориентированный граф, который, тем не менее, сохраняет какую-то частичную информацию об исходном множестве и возникает задача исследования взаимосвязи свойств этого множества и соответствующего графа. В качестве исходного структуризированного множества может уже фигурировать некоторый ориентированный граф, и тогда задача формулируется в следующем виде: каким должен быть неориентированный (или частично ориентированный) граф, чтобы надлежащей ориентацией ребер можно было превратить его в орграф с наперед заданными свойствами. Задачами такого рода занимались Е. Уулк, Роббинс, А. Гуйя-Ури, Д. Гилмор и А. Гоффман, Л. Н. Шеврин и Н. Д. Филиппов и др. К этому же кругу вопросов относятся следующие 4 статьи сборника.

С. М. Гюлумян вводит понятие числа i-ориентируемости $\nu_i(G)$ графа G (для любого целого $i \geqslant 0$, не превосходящего числа внутренней устойчивости G) следующим образом: это такое наименьшее число k, что, выбирая в G любое независимое множество i вершин, можно ориентировать ребра G так, чтобы все выбранные вершины оказались тупиковыми, а полустепени исхода остальных вершин не превосходили k.
Доказывается, что

$$\nu_i(G) = \max_n \left[\frac{q_n}{n-i} \right],$$

где q_n — наибольшее из количеств ребер в n-вершинных подграфах графа $G (n \geqslant i+1)$; при $i=1$ правая часть совпадает с выражением Нэш-Вильямса для реберной древесности графа. Получены и другие результаты (как полностью новые, так и усиления известных), интересные не только для задач ориентируемости, но и с точки зрения свойств неориентированных графов самих по себе.

К. М. Мосесян определяет k-базируемый граф как такой, ребра которого можно так ориентировать, чтобы в полученном орграфе переориентация дуг в количестве менее k никогда не приводила к появлению орциклов. Доказывается, что для любой вершины

* Настоящий сборник сдан в печать 25 апреля 1977 г.

a такого графа существует ориентация (k - базирующая), при которой на всех цепях длины $\leqslant k$, начинающихся в a, все дуги ориентированы от a. Если ослабить определение k - базируемости, разрешив появление орциклов длины $\geqslant k$, то полученное свойство (слабая k - базируемость) вместе с отсутствием циклов длины менее $2k$ обеспечивает k - базируемость (и обратно, последняя влечет оба эти свойства). Далее устанавливается существование критических (по удалению ребра) графов с заданными степенью и радиусом, не являющихся 2 - базируемыми.

В следующей работе К. М. Мосесяна исследуется возможность превращения графов путем ориентации в диаграммы некоторых структур и точно оцениваются количества различных 2-базирующих и слабо 2-базирующих ориентаций. В частности, опровергается одна гипотеза А. Коцига.

Дальнейшие две работы сборника относятся к турнирам.

Частично ориентированный граф, полученный из турнира дезориентацией некоторых дуг, называется полутурниром. Р. Г. Давтян выводит необходимое и достаточное условие однозначной доориентируемости полутурнира до регулярного турнира и доказывает, что никакой $(2n+1)$ - вершинный полутурнир с более чем $\frac{1}{2}(3n^2+n)$ неориентированными ребрами не является однозначно доориентируемым, и эта оценка точна при всех n.

Исследование специальных обходов в турнирах, начатое еще Л. Редеи, продолжили в случае бисвязных турниров Дж. Мун, а в случае регулярных—Б. Алспач, К. Рейд и Д. Россели; результаты последних получаются как частный случай из следующей теоремы, доказанной С. Х. Дарбиняном: в регулярном $(2n+1)$ -вершинном турнире, $n \geqslant 5$ для любых трех вершин x, y, z существуют пути (ориентированные) всех возможных длин $\geqslant 3$, идущие от x к y и не проходящие через z. Показано также, что эти результаты переносятся и на почти регулярные турниры (в которых полустепени исхода и захода каждой вершины различаютя на 1).

Ясно, что наименьшее количество ориентированных лесов (с корнем в каждой компоненте), покрывающих данный орграф $\vec{L}$ и попарно не имеющих общих дуг (т. е. ориентированная древесность) не меньше, чем наибольшая из полустепеней захода вершин $\sigma^-(\vec{L})$; но насколько оно может превышать эту величину, непосредственно не ясно. В работе З. А. Кареяна, где введено понятие ориентированной древесности, доказывается, что она может быть только $\sigma^-(\vec{L})$ или $\sigma^-(\vec{L})+1$; для регулярных орграфов имеет место второй случай и таково же значение обычной («неориентированной») древесности.

Работа Т. Э. Пилипосяна посвящена вопросам размещения ориентированных корневых деревьев в двумерной решетке. Описывается один класс ориентированных корневых деревьев, имеющих наименьшую возможную длину, и дается алгоритм их оптимального размещения.

Материал сборника свидетельствует о том, что в Ереване сложился коллектив молодых ученых, ведущих интенсивные исследования в интересной и важной области дискретной математики—теории графов; хочется пожелать графистам Армении дальнейших творческих успехов.

Профессор А. А. Зыков