Т. Э. ПИЛИПОСЯН

О ДЛИНЕ ОДНОГО КЛАССА ОРИЕНТИРОВАННЫХ ДЕРЕВЬЕВ НА ПЛОСКОСТИ

Алгоритм нахождения минимальных по длине линейных размещений ориентированных корневых деревьев дается в работе [1]. Там же изучаются размещения неориентированных графов в m-мерной решетке и даются оценки m-мерной длины некоторых классов графов. В [2] дается алгоритм нахождения минимального размещения неориентированных деревьев.

В настоящей работе рассматриваются размещение ориентированных корневых деревьев в двумерной решетке. Описывается один класс ориентированных корневых деревьев, которые имеют минимально возможную длину и дается алгоритм их оптимального размещения.

Пусть на множестве $N^2=N\times N$, где N—натуральный ряд, введена метрика ρ $\rho(\alpha, \beta)=|\alpha_1-\beta_1|+|\alpha_2-\beta_2|$ и частичный порядок $\leqslant$ $\alpha\leqslant\beta\Leftrightarrow(\alpha_1\leqslant\beta_1\&\alpha_2\leqslant\beta_2)$, где $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2)$, $\beta=(\beta_1, \beta_2)$.

Пусть далее $i\in N$ и $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2)\in N^2$ произвольные элементы, а $A\subset N^2$ некоторое множество.

Введем обозначения:

$$C_\alpha^i=\{\beta/\beta\in N^2,\ \rho(\alpha, \beta)=i,\ \alpha\leqslant\beta\}.$$ Ясно, что $|C_\alpha^i|=i+1$ для $\forall\alpha\in N^2$

$$D_\alpha^i=\bigcup_{j=0}^{i} C_\alpha^j$$

$$A_\alpha^i=A\cap C_\alpha^i$$

$$\Pi p_j\alpha=\alpha_j,\ j=1,\ 2.$$

Пусть $T(a, X, U)$ некоторый связный ориентированный граф, где X — множество вершин, U — множество дуг и $a\in X$.

$T(a, X, U)$ называется ориентированным деревом с корнем a, если

I. $S^-(a)=0$

II. $S^-(x)=1$ для любого $x\in X\setminus\{a\}$,

где $S^-(x)[S^+(x)]$ полустепень захода [исхода] вершины x. Далее мы будем рассматривать только такие деревья.

Если существует путь, соединяющий вершину x дерева T, с его вершиной y, то y называется достижимой из x вершиной, а длина этого пути, которую обозначим через $r(x, y)$, называется расстоянием от x до y. Через $T(x)$ обозначим поддерево дерева $T(a, X, U)$, порожденное вершиной x и всеми достижимыми из нее вершинами, а через $T^i(x)$ поддерево дерева $T(x)$, порожденное теми вершинами y дерева $T(x)$, для которых $r(x, y) \leq i$, где $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Ясно, что $T(x)$ и $T^i(x)$ ориентированные деревья с корнем x.

Пусть $T(a, X, U)$ некоторое дерево, $x \in X$ и $i \in N$.

Введем обозначения:

$$R(x, i) = \{y / y \in X,\ r(x, y) = i\}$$

$$f_x^i = |R(x, i)|$$

$R(x, i)$ называется i-ым ярусом в дереве $T(x)$.

Определение. Взаимно-однозначное соответствие $\varphi : X \longleftrightarrow A \subset N^2$ называется размещением дерева $T(a, X, U)$ на множество A, если из того, что $(x, y) \in U$ следует, что $\varphi(x) \leq \varphi(y)$, где $\varphi(x) = (\varphi^1(x), \varphi^2(x))$. Обозначим $\varphi(L) = \bigcup\limits_{x \in L} \{\varphi(x)\}$, где L—поддерево дерева $T(a, X, U)$.

Пусть $A \subset N^2$—некоторое конечное множество, удовлетворяющее условию $(\min\limits_{\beta \in A} \Pi p_1 \beta, \min\limits_{\beta \in A} \Pi p_2 \beta) \in A$. Это равносильно существованию таких $\alpha \in A$ и $k \in N$, что $A \subseteq D_\alpha^k$.

Теорема 1. Для того чтобы на множество $A \subset N^2$ можно было разместить некоторое дерево, необходимо и достаточно, чтобы существовали $\alpha \in A$ и $k \in N$ при которых $A \subseteq D_\alpha^k$.

Доказательство очевидно.

Определение. Длиной дуги $(x, y) \in U$ при размещении φ называется число $\rho(\varphi(x), \varphi(y))$, а число $\sum\limits_{(x,y) \in U} \rho(\varphi(x), \varphi(y)) = E(\varphi, T, A)$ называется длиной размещения φ.

Определение. Длиной дерева T на множестве A называется число $E(T, A) = \min\limits_{\varphi} E(\varphi, T, A) = E(\varphi_0, T, A)$, а φ_0 называется оптимальным размещением дерева T на множество A.

Определение. Длиной дерева T называется число $E(T) = \min\limits_{A} E(T, A) = E(T, A_0)$, а A_0 называется оптимальным множеством. Ясно, что самые „короткие" те деревья, для которых $E(T) = |U|$. Такие деревья назовем минимальными деревьями.

Отсюда возникают две задачи:

1. Описать класс минимальных деревьев.
2. Описать класс множеств, оптимальных для минимальных деревьев.

Вторая задача легко решается.

Теорема 2. Для того чтобы множество $A \subset N^2$ служило оптимальным множеством для некоторого минимального дерева, необходимо и достаточно, чтобы существовали $\alpha \in A$ и $k \in N$, при которых

1. $A \subseteq D^k_\alpha$

2. $\forall c \in A^{i+1}_\alpha \exists t \in A^i_\alpha$ такое, что $\rho(c, t) = 1$ $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

Доказательство очевидно.

Определение. Множество $A \subset N^2$ называется сжатым, если существуют $\alpha \in A$ и $k \in N$ такие, что имеют место (1)—(4).

3. $\forall c \in A^i_\alpha \exists t \in A^{i+1}_\alpha$ такое, что $\rho(c, t) = 1$ $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

4. $\max\limits_{\beta \in A^i_\alpha} \Pi p_1 \beta - \min\limits_{\beta \in A^i_\alpha} \Pi p_1 \beta = |A^i_\alpha| - 1$ для $i = 1, 2, \ldots, k$.

Ясно, что для минимальности дерева необходимо, чтобы $\forall x \in X$ $f^i_x \leqslant i+1$ $i = 0, 1, \ldots$

Далее мы будем рассматривать размещения деревьев только на сжатые множества. Тогда для минимальности дерева необходимо, чтобы

$$6. \quad \forall x \in X \ |f^{i+1}_x - f^i_x| = \begin{cases} l & l \leqslant 1 \\ f^i_x & \text{если } f^{i+1}_x = 0 \end{cases} \quad i = 0, 1\ 2, \ldots$$

Это следует из определения сжатого множества. Нетрудно также заметить, что из 6 следует 5, и что условие 6 недостаточно для минимальности дерева.

Пусть $T(a, X, U)$ — некоторое дерево, $x \in X$.

Условие 7 (для вершины x).

Если существует $k \in N$, для которого $f^k_x < f^{k-1}_x$, то либо $f^k_x = 0$, либо $f^{k+1}_y < f^k_y$, где $(y, x) \in U$.

Скажем, что дерево удовлетворяет условию 7, если это условие выполнено для всех $x \in X$.

Теорема 3. Дерево, удовлетворяющее условиям 6, 7, минимально на некотором сжатом множестве.

Для доказательства этой теоремы дадим некоторые определения и докажем леммы.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_p$ некоторая последовательность всех вершин k-го яруса дерева $T(a, X, U)$, x некоторая вершина из X, а $M(x) = \{j / a_j \in T(x)\}$.

Определение. Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_p$ называется допустимой, если для всех $x \in X$ $\max\limits_{j \in M(x)} j - \min\limits_{j \in M(x)} j = |M(x)| - 1$.

Пусть $T(a, X, U)$ — дерево, минимальное на некотором сжатом множестве, а φ — соответствующее оптимальное размещение.

Через $\Pi(\varphi, T, k)$ обозначим последовательность всех вершин множества $R(a, k)$, упорядоченное по возрастанию $\varphi^2(x) = \Pi p_2 \varphi(x)$, где $x \in R(a, k)$. Ясно, что последовательность $\Pi(\varphi, T, k) = (b_1, b_2, \ldots, b_p)$ допустима, и если $R(a, k+1) \neq \varnothing$, то она удовлетворяет одному из следующих условий:

8. $\sum_{i=1}^{e} S^+(b_i) = \begin{cases} e \\ e+1 \end{cases}$ для всех $1 \leqslant e \leqslant p$

9. $\sum_{i=1}^{e} S^+(b_i) = \begin{cases} e \\ e-1 \end{cases}$ для всех $1 \leqslant e \leqslant p$

Определение. Сжатое множество $B = \bigcup_{i=0}^{k+1} B^i_\alpha$ называется продолжением сжатого множества $A = \bigcup_{i=0}^{k} A^i_\alpha$, если $A^i_\alpha = B^i_\alpha$ $i=1, 2, \ldots, k$ и $B^{k+1}_\alpha \neq \varnothing$.

Определение. Продолжение B сжатого множества A называется верхним (нижним) продолжением, если

$$\max_{\beta \in B^k_\alpha} \Pi p_1 \beta = \max_{\beta \in B^{k+1}_\alpha} \Pi p_1 \beta \; (\max_{\beta \in B^k_\alpha} \Pi p_1 \beta \neq \max_{\beta \in B^{k+1}_\alpha} \Pi p_1 \beta).$$

Пусть $T(a, X, U) = T^n(a) = T^n$ некоторое дерево, где $R(a,n) \neq \varnothing$, и дерево $T^{n-1}(a) = T^{n-1}$ минимально на сжатом множестве $\varphi(T^{n-1})$, где φ соответствующее оптимальное размещение.

Лемма 1. Если $\Pi(\varphi, T^{n-1}, n-1)$ удовлетворяет условию 8 (9), то дерево T^n минимально на нижнем (верхнем) продолжении множества $\varphi(T^{n-1})$.

Доказательство. Пусть $\Pi(\varphi, T^{n-1}, n-1) = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$, и пусть $(c_1, c_2, \ldots, c_t)$, такая последовательность всех вершин n-го яруса дерева T, что для любых чисел i, j, k, l, где $1 \leqslant i, j \leqslant p$, $1 \leqslant l, k \leqslant t$, если $(a_i, c_l) \in U$, $(a_j, c_k) \in U$, $l \leqslant k$, то $i \leqslant j$.

Теперь положим

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} (\varphi^1(a_1)+2-i,\ \varphi^2(a_1)+i-1), & \text{если } x = c_i \ i=1, 2, \ldots, \\ \varphi(x) & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} (\varphi^1(a_1)+1-i,\ \varphi^2(a_1)+i), & \text{если } x = c_i \ i=1, 2, \ldots, t \\ \varphi(x) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Легко видеть, что $\varphi_1(\varphi_2)$ требуемое размещение. Лемма доказана.

Лемма 2. Если $a_1, a_2, \ldots, a_k$ допустимая последовательность вершин $R(a, n)$, удовлетворяющая условию 8 (9) и $f^k_a = f^{k+1}_a$, то допустимая последовательность $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1$ удовлетворяет условию 9 (8). Если $f^k_a \neq f^{k+1}_a$, то $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1$ удовлетворяет условию 8 (9)

Доказательство очевидно.

Пусть $T(a, X, U)$ некоторое дерево $S^+(a) = 2$, $(a, b) \in U$, $(a, c) \in U$.

Лемма 3. Если $c_1, c_2, \ldots, c_k$ допустимая последовательность вершин $R(b, n-1)$, удовлетворяющая условию 8, и $f^{n-1}_b < f^n_b$ а $d_1, d_2, \ldots, d_p$ допустимая последовательность вершин $R(c, n-1)$, удовлетворяющая условию 9, то $c_1, c_2, \ldots, c_k, d_1, \ldots, d_p$ — допустимая последовательность вершин $R(a, n)$, которая удовлетворяет условию 8.

Доказательство очевидно.

Пусть $T(a, X, U)$—некоторое дерево, удовлетворяющее условию 6, и $k \in N$ такое число, что $R(a, k+1) \neq \varnothing$.

Лемма 4. Если $f_a^{k+1} \geqslant f_a^k$ ($f_a^{k+1} \leqslant f_a^k$), то существует допустимая последовательность вершин $R(a, k)$, удовлетворяющая условию 8(9).

Доказательство проведем индукцией по числу ярусов дерева T.

При $n=1, 2$ лемма очевидна.

Пусть лемма верна для всех деревьев, удовлетворяющих условиям леммы 4 с количеством ярусов не более n, и пусть дерево $T(a, X, U)$ удовлетворяет условию 6, а $R(a, n+1) \neq \varnothing$.

Если $S^+(a)=1$, то доказательство легко сводится к случаю $n-1$ ярусов.

Пусть $S^+(a)=2$ $(a, b) \in U$, $(a, c) \in U$.

Возможны следующие случаи:

1. $f_a^n < f_a^{n+1}$.
2. $f_a^n = f_a^{n+1}$.
3. $f_a^n > f_a^{n+1}$.

Рассмотрим 1. $f_a^n < f_a^{n+1}$. Тогда или а) $f_b^{n-1} < f_b^n$ и $f_c^{n-1} = f_c^n$, или б) $f_b^{n-1} = f_b^n$ и $f_c^{n-1} < f_c^n$.

Так как по индуктивному предположению лемма верна для деревьев $T(b)$ и $T(c)$, то в случае (а) существует допустимая последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_k$ множества $R(b, n-1)$, удовлетворяющая условию 8, и допустимая последовательность $c_1, c_2, \ldots, c_t$ множества $R(c, n-1)$, удовлетворяющая условию 9. Но тогда по лемме 3 последовательность $b_1, \ldots b_k, c_1 \ldots, c_t$ будет допустимой последовательностью, удовлетворяющей условию 8. В случае (б) выберем $c_1, \ldots, c_t$, удовлетворяющую условию 8, а $b_1, b_2, \ldots, b_k$ условию. 9. Тогда по лемме 3 последовательность $c_1, \ldots, c_t, b_1, \ldots, b_k$ удовлетворяет условию 8.

Таким же образом и в случаях II, III, пользуясь леммами 2 и 3, найдем соответствующие допустимые последовательности.

Лемма 4 доказана.

Пусть дерево $T(a, X, U)$ минимально на сжатом множестве $\varphi(T)$, где φ соответствующее оптимальное размещение и $R(a, n) \neq \varnothing$.

Лемма 5. Если T удовлетворяет условию 7, то для любого $1 \leqslant \leqslant k \leqslant n$ и для любой допустимой последовательности вершин $R(a, k)$, существует оптимальное размещение ψ дерева T^k на сжатое множество $\varphi(T^k)$, такое, что $\Pi(\psi, T, k)$ совпадает с этой допустимой последовательностью.

Докажем индукцией по n (n количество ярусов).

При $n=1,2$ лемма очевидна.

Пусть лемма 5 верна для всех деревьев, удовлетворяющих условиям леммы 5, и имеющих менее n ярусов.

Пусть $T(a,X,U)$ удовлетворяет условиям леммы 5 и $R(a,n) \neq \varnothing$. Если $S^+(a)=1$, то доказательство легко сводится к случаю $n-1$ ярусов.

Пусть $S^+(a)=2$, $(a,b)\in U$, $(a,c)\in U$ и $\varphi^2(b)<\varphi^2(c)$. $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ — — произвольная допустимая последовательность $R(a,n.)$

$$\Pi(\varphi, T, n) = d_1, d_2, \ldots, d_k, \ldots, d_p.$$

$$\Pi(\varphi, T(b), n-1) = d_1, d_2, \ldots, d_k \quad \Pi(\varphi, T(c), n-1) = d_{k+1}, \ldots, d_p.$$

Можно предположить, что ни одна из последних двух последовательностей не пуста, в противном случае доказательство легко сводится к случаю $n-1$ ярусов.

Ясно, что или $a_1\in R(b, n-1)$ или $a_1\in R(c, n-1)$.

А. $a_1\in R(b, n-1)$.

Так как $a_1 a_2, \ldots, a_p$ и $d_1, d_2, \ldots, d_p$ допустимые последовательности вершин $R(a,n)$, то $\{a_1, \ldots, a_k\} = \{d_1, \ldots, d_k\} = R(b, n-1)$ и поскольку лемма 5 верна для $T(b)$, то существует оптимальное размещение φ_1 этого дерева на множество $\varphi(T(b))$ такое, что $\Pi(\varphi_1, T(b), n-1) = a_1, a_2, \ldots, a_k$. Существует также оптимальное размещение φ_2 дерева $T(c)$ на множество $\varphi(T(c))$ такое, что $\Pi(\varphi_2, T(c), n-1) = a_{k+1}, \ldots, a_p$. Тогда ψ будет нужным размещением дерева T, где

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & x\in T(b) \\ \varphi_2(x) & x\in T(c) \\ \varphi(x) & x=a \end{cases}$$

Б. $a_1\in R(c, n-1)$

Обозначим

$$\Pi(\varphi, T, n-1) = e_1, e_2, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_t$$
$$\Pi(\varphi, T(b), n-2) = e_1, e_2, \ldots, e_m$$
$$\Pi(\varphi, T(c), n-2) = e_{m+1}, \ldots, e_t$$

Если $\varphi(T^n)$ является нижним продолжением $\varphi(T^{n-1})$, то $e_1, e_2, \ldots, e_t$ удовлетворяет условию 8. Но тогда условию 8 удовлетворяют и допустимые последовательности

$$e_{m+1}, \ldots, e_t, e_1, \ldots, e_m, \quad \text{если } p=t;$$
$$e_t, \ldots, e_{m+1}, e_1, \ldots, e_m, \quad \text{если } p=t+1 \text{ и } k=m+1;$$
$$e_{m+1}, \ldots, e_t, e_m, \ldots, e_1, \quad \text{если } p=t+1 \text{ и } k=m;$$

Другие случаи не возможны. Это следует из лемм 2 и 3 и из того, что условие 7 для дерева T выполняется. Во всех этих случаях по индуктивному предположению существует размещение φ_1 дерева T^{n-1} на множество $\varphi(T^{n-1})$ такое, что $\Pi(\varphi_1, T^{n-1}, n-1)$ совпадает с соответствующей допустимой последовательностью, и $\varphi_1^2(b)>\varphi_1^2(c)$. По лемме 4 существует такое оптимальное размещение φ_2 дерева T на множество $\varphi(T^n)$, что $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$, если $x\in T^{n-1}$. Следовательно, $\varphi_2^2(b)>\varphi_2^2(c)$. Так как $a_1\in R(c, n-1)$, то доказательство свелось к случаю А.

Если $\varphi(T^n)$ является верхним продолжением, то $e_1, \ldots, e_l$ удовлетворяет условию 9. Но тогда условию 9 удовлетворяют и допустимые последовательности

$$e_{m+1}, \ldots, e_l, \; e_1, \ldots, e_m, \quad \text{если } p=t,$$

$$e_l, \ldots, e_{m+1}, \; e_1, \ldots, e_m, \quad \text{если } p=t-1.$$

После этого, как в случае нижнего продолжения, задача сводится к случаю А.

Лемма 5 доказана.

Теперь уже из лемм 4,1, 5 легко следует доказательство теоремы 3, и алгоритм оптимального размещения.

Следствие. Для того чтобы дерево T, удовлетворяющее условиям 6,7 было бы минимальным на сжатом множестве A, необходимо и достаточно, чтобы $|A_a^i| = f_a^i \;\; \forall i \in N$.

Տ. Է. ՓԻԼԻՊՈՍՅԱՆ

ԱՐՄԱՏՈՎ ԿՈՂՄՆՈՐՈՇՎԱԾ ԾԱՌԵՐԻ ՄԻ ԴԱՍԻ՝ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ ՈՒՆԵՑԱԾ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է արմատով կողմնորոշված ծառերի տեղաբաշխումը երկու չափանի ցանցում։ Նկարագրվում է այդպիսի ծառերի մի դաս, որոնք այնպես կարելի է տեղաբաշխել երկու չափանի ցանցում, որ բոլոր աղեղների երկարությունները հավասար լինեն մեկի։ Բերվում է այդ դասի օպտիմալ տեղաբաշխման ալգորիթմ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. А. Шейдвассер.* О длине и ширине размещений графов в решетках. Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 29. М., «Наука», 1974, 63—102.
2. *М. К. Гольдберг, И. А. Клипкер.* Минимальные размещения деревьев на прямой. АН УССР, ФТИНТ, препринт, Харьков, 1976.