З. А. КАРЕЯН

ДРЕВЕСНОСТЬ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ

В настоящей статье рассматриваются конечные орграфы без петель и кратных дуг. Все понятия, не определяемые здесь, можно найти в монографии [1].

Орграф называется бисвязным, если любые его две вершины взаимодостижимы ориентированными путями. Подграф $\vec{L}_0=(X_0, \vec{U}_0)$ орграфа $\vec{L}=(X, \vec{U})$ называется его бикомпонентой, если он бисвязен и максимален относительно этого свойства. Бикомпонента $\vec{L}_0=(X_0, \vec{U}_0)$ орграфа $\vec{L}=(X, \vec{U})$ называется базовой, если не существует дуги идущей из вершины $x\in X/X_0$ в вершину $y\in X_0$.
Если $x\in X$, то через $v_L^-(x)$ (соответственно $v_L^+(x)$) обозначим число дуг орграфа $\vec{L}=(X, \vec{U})$, входящих в вершину x (выходящих из вершины x).

Орграф $\vec{L}=(X, \vec{U})$ называется p-регулярным, где $p\geqslant 0$, если для любой вершины $x\in X$ имеет место $v_L^-(x)=v_L^+(x)=p$.

Ориентированным лесом (орлесом) орграфа $\vec{L}=(X, \vec{U})$ назовем такой его суграф $\vec{T}=(X, \vec{U}_1)$, что для каждой вершины $x\in X$ имеет место $v_T^-(x)\leqslant 1$ и $\vec{T}$ не содержит орциклов. Если $v_T^-(x)=0$, то x назовем корнем орлеса $\vec{T}$. Через $|\vec{T}|$ обозначим количество дуг орлеса $\vec{T}$. Через $\vec{L}(F)$ обозначим множество орлесов орграфа $\vec{L}$.

Мощность минимального множества попарно не пересекающихся по дугам орлесов, покрывающего данный орграф, назовем ориентированной древесностью (ордревесностью) этого орграфа.

Если $\vec{L}=(X, \vec{U})$—некоторый орграф, то через $\vec{R}(\vec{L})$ (соответственно $R(L)$) обозначим его ордревесность (древесность неориентированного графа $L=(X, U)$).

Замечание 1. Для любого орграфа $\vec{L}=(X, \vec{U})$ имеет место $\bar{R}(\vec{L})\geqslant\max\limits_{x\in X} v_{L}^{-}(x)$.

Замечание 2. В орграфе $\vec{L}=(X, \vec{U})$ ни для какой пары вершин x_1 и x_2 из разных базовых бикомпонент нет ориентированного пути, идущего от x_1 к x_2.

Лемма 1. Для любого орграфа $\vec{L}=(X, \vec{U})$ и при любом $k\geqslant1$

$$\max|\vec{T}|=|X|-k$$

тогда и только тогда, когда орграф $\vec{L}$ имеет в точности k базовых бикомпонент.

Доказательство. Из того, что $|\vec{T}_0|=\max\limits_{\vec{T}\in\vec{L}(F)}|\vec{T}|=|X|-k$, следует, что орлес $\vec{T}_0$ состоит из k компонент связности. В каждой из них, очевидно, существует вершина, принадлежащая некоторой базовой бикомпоненте орграфа $\vec{L}=(X, \vec{U})$. Покажем что ни в какой из этих компонент нет двух вершин из разных базовых бикомпонент орграфа $\vec{L}$. Предположим, что это утверждение не верно, и пусть вершины x_1 и x_2 разных базовых бикомпонент L_1 и L_2 принадлежат компоненте связности $\vec{T}_0^1$ орлеса T_0. По замечанию 2, вершины x_1 и x_2 не являются корнями для орлеса $\vec{T}_0$. Пусть x_0—корень этого орлеса, входящий в компоненту связности $\vec{T}_0^1$. По замечанию 2, пара вершин x_0 и x_1 (соответственно x_0 и x_2) принадлежит базовой бикомпоненте $\vec{L}_1$ (соответственно $\vec{L}_2$), следовательно, $\vec{L}_1$ и $\vec{L}_2$ совпадают, вопреки предложению.

Для завершения доказательства необходимости леммы остается показать, что не существует двух вершин x_i и y_i из одной базовой бикомпоненты $\vec{L}_i$, принадлежащих разным компонентам связности орлеса $\vec{T}_0$.

Действительно, в противном случае, по замечанию 2, корни этих компонент связности также принадлежат $\vec{L}_i$, следовательно, можно эти компоненты связности объединить и построить орлес $\vec{T}_1$ с $|\vec{T}_1|>|\vec{T}_0|$, что противоречит предположению.

Пусть орграф $\vec{L}=(X,\vec{U})$ имеет ровно k базовых бикомпонент. Легко видеть, что любой орлес орграфа $\vec{L}$ имеет по крайней мере k компонент связности, следовательно, $\max\limits_{\vec{T}\in\vec{L}(F)}|\vec{T}|\leqslant|X|-k$.

Если из всех базовых бикомпонент в качестве корней выберем по одной вершине и построим максимальный орлес $\vec{T}_1$ орграфа $\vec{L}$, то он будет состоять из k компонент связности, то есть $|T|=|X|-k$.

Лемма доказана.

Замечание 3. Пусть подграфы $\vec{L}_i=(X_i,\vec{U}_i)$, $i\in[1,k]$ являются всеми базовыми бикомпонентами орграфа $\vec{L}=(X,\vec{U})$. Тогда орграф $\vec{L}$ имеет орлес $\vec{T}_0$ такой, что

$$|\vec{T}_0|=|X|-k \text{ и } V^+_{\vec{L}_i}(x_i^0)=V^+_{\vec{T}_0}(x_i^0) \tag{1}$$

где $x_i^0\in X_i$, $i\in[1,k]$ и x_i^0—корень орлеса $\vec{T}_0$.

Замечание 4. Пусть $\vec{T}_1=(X,\vec{U}_1)$ является максимальным орлесом с корнями x_i, $i\in[1,p]$, орграфа $\vec{L}=(X,\vec{U})$. Тогда для любой вершины $x\neq x_i$, $i\in[1,p]$ в орграфе $\vec{L}_1=\vec{L}/\vec{T}_1=(X,\vec{U}/\vec{U}_1)$ имеет место $V^-_{\vec{L}_1}(x)=$ $=V^-_{\vec{L}}(x)-1$.

Пусть $\vec{L}=(X,\vec{U})$—произвольный орграф. Опишем алгоритм (обозначим его через S), разбивающий орграф $\vec{L}$ на орлеса:

1. Выделить бикомпоненты в орграфе $\vec{L}=(X,\vec{U})$, [2].
2. Выделить базовые бикомпоненты среди всех бикомпонентов, получившиеся в пункте 1.
3. Из всех базовых бикомпонент, получившиеся в пункте 2, выбрать по одной вершине в качестве корня и из орграфа устранить орлес T_0, удовлетворяющий условию (1).
4. Если орграф $\vec{L}\setminus\vec{T}_0$ не содержит дуг, то алгоритм считать завершенным, в противном случае применить пункт 1 для орграфа $\vec{L}\setminus\vec{T}_0$.

Легко проверить, что порядок алгоритма S равен $c\cdot|X|^3$.

Теорема 1. Для любого орграфа $\vec{L}=(X,\vec{U})$ имеет место

$$\bar{R}(\vec{L})=\max_{x\in X}v^-_{\vec{L}}(x) \text{ или } \bar{R}(\bar{L})=\max_{x\in X}v^-_{\vec{L}}(x)+1.$$

Доказательство. Пусть $\vec{L}=(X,\vec{U})$ — произвольный орграф и $\max\limits_{x\in X} v_L^-(x)=p$. Предположим, что после применения алгоритма S орграф $\vec{L}$ разложен на орлеса $\vec{T}_i=(X,\vec{U}_i)$, где $i=1,\ldots,q$. Пусть $q>p+1$. Обозначим $\vec{L}'=\bigcup\limits_{i=p+1}^{q}\vec{T}_i=(X,\bigcup\limits_{i=p+1}^{q}\vec{U}_i)$. Покажем, что для любой вершины $x\in X$ имеет место неравенство $v_{L'}^-(x)\leqslant 1$. Допустим противное, т.е. существует вершина $x_0\in X$ такая, что $v_{L'}^-(x_0)\geqslant 2$. Алгоритм S при устранении $(p+1)$ — ого орлеса орграфа $\vec{L}$, по крайней мере 2 раза выбрал вершину x_0 в качестве корня, так как иначе, по замечанию 4 имеет место $v_L^-(x_0)>p$. Но алгоритм S второй раз выбирает вершину x в качестве корня тогда и только тогда, когда вершина x становится изолированной вершиной, следовательно вершина x_0 в орграфе $\vec{L}'$ является изолированной вершиной, что противоречит предположению, и поэтому $v_{L'}^-(x)\leqslant 1$ для любой вершины $x\in X$.

Покажем, что орграф $\vec{L}'$ не содержит орциклов. Предположим противное. Пусть дуга $\overrightarrow{(x_1, x_2)}$ принадлежит некоторому орциклу орграфа $\vec{L}'$. Так как $v_{L'}^-(x_1)=1$ то, по замечанию 4, вершина x_1 при устранении $(p+1)$ — ого орлеса была выбрана в качестве корня некоторого орлеса и, следовательно, x_1 принадлежала некоторой базовой бикомпоненте. Ясно, что к этой бикомпоненте также принадлежала вершина x_2. Тогда по условию (1) вместе с орлесом, имеющий корень x^0, должна быть устранена и дуга $\overrightarrow{(x_1, x_2)}$, что невозможно.

Таким образом, орграф $\vec{L}'$ является орлесом и, следовательно, $q=p+1$,

Полученное противоречие, по замечанию 1, завершает доказательство теоремы.

Замечание 5. Если орлесом орграфа $\vec{L}=(X,\vec{U})$ назовем такой суграф $\vec{T}=(X,\vec{U}_1)$, что для каждой вершины $x\in X$ имеет место $v_{\underline{L}}^+(x)\leqslant 1$ и $\vec{T}$ не содержит орциклов, то в силу принципа ориентированной двойственности [3] справедлива следующая двойственная

Теорема 1′. Для любого орграфа $\vec{L}(X,\vec{U})$ имеет место

$$\vec R(\vec L)=\max_{x\in X} v_L^-(x) \quad \text{или} \quad \bar R(\vec L)=\max_{x\in X} v_L^-(x)+1$$

Из теоремы 1 вытекает

Следствие. Для любого p—регулярного орграфа $\vec L=(X, \vec U)$ имеет место равенство $R(L)=\bar R(\vec L)=p+1$.

В заключение выражаю искреннюю благодарность К. М. Мосесяну за ценные указания.

Զ. Ա. ԿԱՐԵՅԱՆ

ԿՈՂՄՆՈՐՈՇՎԱԾ ԳՐԱՖՆԵՐԻ ԾԱՌԱՅՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ամփոփում

$\vec L=(X, \vec U)$ *կողմնորոշված գրաֆի կողմնորոշված անտառ կոչվում է նրա այնպիսի* $\vec T=(X, \vec U_0)$ *սուգրաֆը, որի ցանկացած* $x\in X$ *գագաթի համար տեղի ունի* $V_T^-(x)\leqslant 1$ *և* $\vec T$*-ն չի պարունակում կողմնորոշված ցիկլ։* $\vec L$ *գրաֆի աղեղներով իրար հետ չհատվող կողմնորոշված անտառների նվազագույն քանակը, որոնք ծածկում են* $\vec L$*-ը, կոչվում է նրա կողմնորոշված ծառայնություն և նշանակվում է* $\vec R(\vec L)$*-ով։*

$R(L)$*-ը* $L=(X, U)$ *ոչ կողմնորոշված գրաֆի ծառայնությունն է։*

Աշխատանքում ալգորիթմիկ ձևով ապացուցվում է, որ ցանկացած $\vec L=(X, \vec U)$ *կողմնորոշված գրաֆի համար* $\bar R(\vec L)=\max_{x\in X} V_L^-(x)$ *կամ* $\bar R(\vec L)=\max V_L^-(x)+1$, *որտեղից ստացվում է այսպիսի*

Հետևանք. Ցանկացած p-համասեռ $\vec L$ *կողմնորոշված գրաֆի համար* $\bar R(\vec L)=R(L)=p+1$։

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Зыков.* Теория конечных графов, I, «Наука», Новосибирск, 1969.
2. *В. Н. Косянов.* Об одном алгоритме выделения бикомпонент в ориентированном графе, сб. «Систем. и теор. программир.», Новосибирск, 1974.
3. *Ф. Харари.* Теория графов, «Мир», М., 1973.