С. Х. ДАРБИНЯН

ОБХОДЫ В РЕГУЛЯРНЫХ ТУРНИРАХ

В настоящей статье рассматриваются конечные турниры.

Все понятия и обозначения, не определяемые здесь, можно найти в книге [1].

Через T_p, где $p \geq 1$, обозначим p-вершинный турнир. T_{2n+1} (T_{2n}) называется регулярным (почти регулярным), если для любой вершины u имеет место $s^+(u)=n$ (соответственно $|s^+(u)-s^-(u)|=1$), где $n \geq 1$, а $s^+(u)$ и $s^-(u)$ означают полустепени исхода и захода вершины u.

Через $[m, n]$ обозначем множество целых чисел, не меньших m и не больших n.

Б. Алспач [2] доказал, что в каждом $(2n+1)$-вершинном регулярном турнире, где $n \geq 1$, всякая дуга находится на цикле длины m для любого $m \in [3, 2n+1]$. Б. Алспач, К. В. Рейд и Д. П. Роселли [3] доказали, что в каждом регулярном $(2n+1)$-вершинном турнире, где $n \geq 3$, для всякой дуги (u, v) и для любого $m \in [3, 2n]$ существует путь длины m от вершины u к вершине v.

Под r-путем будем понимать простой путь длины r. Если u, v, $w \in T_p$, то через $Q^r_{T_p}(u, v, w)$ обозначим множество r-путей турнира T_p, ведущих от u к v и не проходящих через w.

Пусть

$$S^-(u)=\{v \in T_p/(v, u) \in T_p\} \text{ и } S^+(u)=\{v \in T_p/(u, v) \in T_p\}.$$

Очевидно, имеет место следующая

Лемма. Если $Q=\{v_0, v_1, \ldots, v_r\}$ — r-путь в турнире T_p, $u \notin Q$ и для некоторых i, j, $0 \leq i < j \leq r$, имеет место $(v_i, u) \in T_p$, $(u, v_j) \in T_p$, то существует такой $(r+1)$-путь от вершины v_0 к v_r, который проходит через вершины $v_0, v_1, \ldots, v_r, u$.

Теорема 1. В каждом регулярном турнире T_{2n+1}, $n \geq 5$, для всякой тройки вершин u, v, w и для любого $m \in [3, 2n-1]$, имеет место $Q^m_{T_{2n+1}}(u, v, w) \neq \varnothing$.

Доказательство проведем индукцией по длине r-пути. Простой проверкой легко убедиться в справедливости утверждения теоремы при $m=3$. Предположим, что теорема верна для любого $m \leq r$, где $r \in [3, 2n-2]$, и докажем ее для $m=r+1$.

Пусть $T_{2n+1}=(V_{2n+1}, W_{2n+1})$, $Q=(u=v_0, v_1, \ldots, v_r=$

$=v)\in Q^r_{T_{2n+1}}(u, v, w)$, где $r\in[3, 2n-2]$, и $A=\{v_0, v_1, \ldots, v_r, w\}$, $\overline{A}=$
$=W_{2n+1}\setminus A$.

Возможны следующие случаи:

I. $|\overline{A}|\geqslant n+1$.

Из регулярности T_{2n+1} следует существование $x\in A$, для которой $(v_0, x)\in W_{2n+1}$. Если для некоторого $j\in[1, r]$ имеет место $(x, v_j)\in \in W_{2n+1}$, то по лемме, очевидно, $Q^{r+1}_{T_{2n+1}}(u, v, w)\neq\varnothing$.

Пусть $(v_i, x)\in W_{2n+1}$, для всех $i\in[1, r]$. Существует вершина $y\in S^+(x)$ такая, что $(y, v_2)\in W_{2n+1}$, действительно, в противром случае $s^+(v_2)>n$. Следовательно, $(v_0, x, y, v_2, \ldots, v_r)$ есть искомый $(r+1)$ — путь.

II. $4\leqslant|\overline{A}|\leqslant n$.

2а) $\exists x\in\overline{A}((v_0, x)\in W_{2n+1})$.

Пользуясь леммой, можно предположить, что $(v_i, x)\in W_{2n+1}$ при $i\in[1, r]$. Так как $(v_2, v_3)\in W_{2n+1}$ и $|\overline{A}|=n$, то существует вершина $y\in\overline{A}\setminus\{x\}$ такая, что $(y, v_2)\in W_{2n+1}$. Отсюда, пользуясь очевидным соотношением $S^-(x)=A\setminus\{w\}$, получим искомый $(r+1)$-путь $(v_0, x, y, v_2, \ldots, v_r)$.

2б) $\exists x\in\overline{A}((x, v_r)\in W_{2n+1})$.

Этот случай рассматривается аналогично случаю 2а).

2в) $\forall x\in\overline{A}((x, v_0)\in W_{2n+1}\ \&\ (v_r, x)\in W_{2n+1})$.

2в1) $\exists x\in\overline{A}((v_1, x)\in W_{2n+1})$.

Пользуясь леммой, можно предположить, что для любого $i\in[2, r]$ имеет место $(v_i, x)\in W_{2n+1}$. Легко заметить, что

$$|\overline{A}|\in[n-1, n] \quad \text{и} \quad |S^+(x)\cap\overline{A}|\geqslant n-2.$$

В случае, если для некоторых $y\in S^+(x)\cap\overline{A}$ и $i\in[3, r]$ справедливо соотношение $(y, v_i)\in W_{2n+1}$, искомый $(r+1)$-путь будет $(v_0, \ldots, v_{i-2}, x, y, v_i, \ldots, v_r)$.

Пусть для всех $y\in S^+(x)\cap\overline{A}$ и $i\in[3, r]$ имеет место $(v_i, y)\in W_{2n+1}$

Рассмотрим случай $|\overline{A}|=n-1$.

Так как $(v_1, v_3)\in W_{2n+1}$, то существует вершина $z\in S^+(x)\cap\overline{A}$ такая, что $(z, v_1)\in W_{2n+1}$. Очевидно, $(v_0, v_3)\in W_{2n+1}$ и $(v_1, v_r)\in W_{2n+1}$ (или $(v_2, v_r)\in W_{2n+1}$). Следовательно, искомый $(r+1)$ — путь будет $(v_0, v_3, \ldots, v_{r-1}, x, z, v_1, v_r)$ или, соответственно, $(v_0, v_3, \ldots, v_{r-2}, x, z, v_1, v_2, v_r)$.

Пусть $|\overline{A}|=n$. Очевидно, $S^-(v_r)=A\setminus\{v_r\}$ и $S^+(v_0)=A\setminus\{v_0\}$.

Легко заметить, что для некоторого $z\in S^+(x)\cap\overline{A}$ имеет место $(z, v_1)\in W_{2n+1}$. Поэтому $(v_0, v_3, \ldots, v_{r-1}, x, z, v_1, v_r)$ есть искомый $(r+1)$ — путь.

2в2) $\exists x\in\overline{A}((x, v_{r-1})\in W_{2n+1})$.

Пользуясь леммой, можем предположить, что $(x, v_i) \in W_{2n+1}$ для всех $i \in [0, r-2]$, откуда $r \leqslant n$ и $|A| \geqslant n-1$. Если существует вершина $y \in S^-(x) \cap \overline{A}$ такая, что $(v_j, y) \in W_{2n+1}$ для некоторого $j = [0, r-3]$, то искомый $(r+1)$—путь будет $(v_0, \ldots, v_j, y, x, v_{j+2}, \ldots, v_r)$.

Пусть $(y, v_j) \in W_{2n+1}$, для всех $y \in S^-(x) \cap \overline{A}$ и $j \in [0, r-3]$, откуда $n=5$, $|\overline{A}| = n-1$ и $r=n$. Легко заметить, что $\{(v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_1, v_5), (v_2, v_4), (v_2, v_5)\} \subset W_{2n+1}$. Следовательно, существует вершина $z \in S^-(x) \cap \overline{A}$ такая) что $(v_4, z) \in W_{2n+1}$, поэтому $(v_0, v_1, v_4, z, x, v_2, v_5)$ есть искомый $(r+1=6)$—путь.

2в3) $\forall x \in \overline{A}((x, v_1) \in W_{2n+1} \,\&\, (v_{r-1}, x) \in W_{2n+1})$.

Нетрудно заметить существование такого $i \in [2, r-1]$, что $(v_0, v_1) \in W_{2n+1}$ и $(v_{i-1}, v_r) \in W_{2n+1}$. Следовательно, искомый $(r+1)$—путь есть $(v_0, v_i, \ldots, v_{r-1}, x, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_r)$, где $x \in A$.

III. $|\overline{A}| = 3$.

Тогда, очевидно, $r = 2n-4$. Не нарушая общности, можно полагать, что $\overline{A} = \{x, y, z\}$ и $\{(y, x), (x, z)\} \subset W_{2n+1}$.

Рассмотрим следующее утверждение:

$$\left.\begin{array}{l}(z, v_{j_1}), (v_{i_1}, z) \in W_{2n+1} \text{ для всех } j_1 \in [0, n-3],\ i_1 \in [n, r],\\ (x, v_{j_2}), (v_{i_2}, x) \in W_{2n+1} \text{ для всех } j_2 \in [0, n-3],\ i_2 \in [n-1, r],\\ (y, v_{i_3}), (v_{j_3}, y) \in W_{2n+1} \text{ для всех } j_3 \in [0, n-4],\ i_3 \in [n-1, r].\end{array}\right\} (*)$$

Если (*) не верно, то, пользуясь леммой, легко построить искомый $(r+1)$—путь.

Пусть (*) имеет место и

$$k = \max_{i < 2n-6} \{i / (v_i, v_r) \in W_{2n+1}\}.$$

Заметим, что $k \geqslant n-3$, и рассмотрим следующие случаи:

2а) $k \geqslant n-1$.

Легко видеть, что существует такое $i \in [0, n-4]$, для которого $(v_i\ v_{k+1}) \in W_{2n+1}$. Следовательно, $(v_0, \ldots, v_i, v_{k+1}, \ldots, v_{r-1}, x, v_{i+1}, \ldots v_k, v_r)$ есть искомый $(r+1)$ - путь.

3б) $k = n-2$.

3б1) $\exists i \in [0, n-4]((v_i, v_{k+1}) \in W_{2n+1})$.

Тогда $(v_0, \ldots, v_i, v_{k+1}, \ldots, v_{r-1}, x, v_{i+1}, \ldots, v_k, v_r) \in Q^r_{T_{2n+1}}(u, v, w)$.

3б) $\forall i \in [0, n-4]((v_{k+1}, v_i) \in W_{2n+1})$.

Тогда, поскольку $\{(v_{k+1}, y), (v_{k+1}, x), (v_{k+1}, v_{k+2})\} \subset W_{2n+1}$, то $S^+(v_{k+1}) = \{v_0, \ldots, v_{n-4}, y, x, v_{k+2}\}$.

Отсюда, $(v_{r-1}, v_{k+1}) \in W_{2n+1}$. Если $(v_0, v_j) \in W_{2n+1}$, для некоторого $j \in [n, r-1]$, то $(v_0, v_j, \ldots, v_{r-1}, v_{k+1}, \ldots, v_{j-1}, x, v_1, \ldots, v_k, v_r)$ искомый $(r+1)$—путь.

Пусть $(v_j, v_0) \in W_{2n+1}$ для всех $j \in [n, r-1]$.

Имеем $S^-(v_0) = \{v_{n-1}, v_n, \ldots, v_{2n-5}, x, y, z\}$.

Нетрудно заметить существование такого $i \in [1, n-3]$, что $(v_i, v_r) \in W_{2n+1}$ и $(v_0, v_{i+1}) \in W_{2n+1}$. Следовательно, $(v_0, v_{i+1}, \ldots, v_{r-1}, x, v_1, \ldots, v_i, v_r)$—искомый $(r+1)$—путь.

3в) $k = n-3$.

Легко заметить существование такого $j \in [0, n-4]$, что $(v_j, v_n) \in W_{2n+1}$. Поэтому $(v_0, \ldots, v_j, v_n, \ldots, v_{r-1}, y, x, z, v_{j+1}, \ldots, v_k, v_r)$ —искомый $(r+1)$—путь.

IV. $|\overline{A}| = 2$.

Очевидно, $r = 2n-3$. Не нарушая общности, можно полагать, что $\overline{A} = \{x, y\}$ и $(x, y) \in W_{2n+1}$.

Рассмотрим следующее утверждение:

$$\left.\begin{array}{l} (x, v_{j_1}) \in W_{2n+1}; (v_{i_1}, x) \in W_{2n+1} \text{ для всех } j_1 \in [0, n-3],\ i_1 \in [n-1, r]) \\ (y, V_{j_2}) \in W_{2n+1}; (v_{i_2}, x) \in W_{2n+1} \text{ для всех } j_2 \in [0, n-2],\ i_2 \in [n, r]. \end{array}\right\} \quad (**)$$

Если (**) не верно, то, пользуясь леммой, легко построить искомый $(r+1)$—путь.

Пусть имеет место (**) и $k = \max\limits_{j < 2n-5} \{j / (v_j, v_2) \in W_{2n+1}\}$.

Заметим, что $k \geqslant n-3$, и рассмотрим следующие случаи:

4а) $k \geqslant n-1$.

Тогда существует такое $j \in [0, n-3]$, что $(v_j, v_{k+1}) \in W_{2n+1}$. Следовательно, $(v_0, \ldots, v_j, v_{k+1}, \ldots, v_{r-1}, y, v_{j+1}, \ldots, v_k, v_r)$—искомый $(r+1)$—путь.

4б) $k = n-2$.

Легко заметить существование такого $j \in [0, n-3]$, что $(v_j, v_n) \in W_{2n+1}$. Поэтому $(v_0, \ldots, v_j, v_n, \ldots, v_{r-1}, x, y, v_{j+1}, \ldots, v_k, v_r)$—искомый $(r+1)$—путь.

4в) $k = n-3$.

Тогда $S^+(v_r) = \{v_{k+1}, \ldots, v_{2n-5}, x, y\}$ и, следовательно, $S^-(v_r) = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-3}, v_{2n-4}, w\}$.

4в1) $\exists j \in [0, n-4]\ ((v_j, v_{k+2}) \in W_{2n+1} \vee (v_j, v_{k+1}) \in W_{2n+1}$.

В этом случае искомым $(r+1)$—путем будет соответственно $(v_0, \ldots, v_j, v_{k+2}, \ldots, v_{r-1}, x, y, v_{j+1}, \ldots, v_k, v_r)$ или $(v_0, \ldots, v_j, v_{k+1}, \ldots, v_{r-1}, y, v_{j+1}, \ldots, v_k, v_r)$.

4в2) $\forall i \in [0, n-4]\ ((v_{k+2}, v_i) \in W_{2n+1}\ \&\ (v_{k+1}, v_i) \in W_{2n+1})$.

Тогда существует такое $j \in [n, r-1]$, что $(v_{n-5}, v_j) \in W_{2n+1}$. Действительно, в противном случае имеет место $\{v_{n-2}, v_{n-1}, v_n, \ldots, v_{r-1}, x, y\} \subset S^-(v_{n-5})$, что приводит к противоречию (т. к. $s^-(v_{n-5}) = n$). Следовательно, $(v_0, \ldots, v_{n-5}, v_j, \ldots, v_{r-1}, y, v_{n-2}, \ldots, v_{j-1}, x, v_k, v_r)$—искомый $(r+1)$— путь.

V. $|A|=1$. Пусть $\bar{A}=\{x\}$.

Пользуясь леммой, можем предположить, что $(x,v_i),(v_j,x)\in W_{2n+1}$ для всех $i\in[0,n-2]$ и $j\in[n,r]$. Пусть $k=\max\limits_{i<2n-4}\{i \,/\, (v_i, v_r)\in W_{2n+1}\}$. Очевидно, $r=2n-2$ и $k\geqslant n-3$.

Возможны следующие случаи:

5а) $k\geqslant n-1$.

Если $(x, v_{n-1})\in W_{2n+1}$, то существует вершина v_i, где $i\in[0,n-2]$, что $(v_i, v_{k+1})\in W_{2n+1}$. Поэтому $(v_0,\ldots, v_i, v_{k+1}, \ldots, v_{2n-3}, x, v_{i+1},\ldots, v_k, v_r)$ есть $(r+1)$—путь требуемого вида.

Пусть теперь $(v_{n-1}, x)\in W_{2n+1}$.

1) $\exists j\in[0,n-3]\ ((v_j, v_{k+1})\in W_{2n+1})$.

Тогда $(v_0,\ldots, v_j, v_{k+1},\ldots, v_{2n-3}, x, v_{j+1},\ldots, v_k, v_r)$ —искомый $(r+1)$ —путь.

2) $\forall j\in[0,n-3]\ ((v_{k+1}, v_j)\in W_{2n+1})$.

Отсюда $S^+(v_{k+1})=\{v_0,\ldots, v_{n-3}, v_{k+2}, x\}$.

2.1) $k>n-1$.

Легко заметить, что $(v_{n-1}, v_{k+1}), (v_{n-2}, v_{k+1})\in W_{2n+1}$. Откуда следует, что для некоторого $j\in[0,n-3]$ $(v_j, v_{n-1})\in W_{2n+1}$, и $(v_0,\ldots,v_j, v_{n-1}, \ldots, v_k, x, v_{j+1},\ldots,v_{n-2},v_{k+1},\ldots,v_r)$—искомый $(r+1)$—путь.

2.2) $k=n-1$.

Очевидно, $S^-(v_{k+1})=\{v_{n-2}, v_{n-1}, v_{k+2},\ldots,v_r, w\}$ и $(v_{2n-3}, v_n)\in W_{2n+1}$. Тогда существует такое $j\in[0,n-3]$, что $(v_j, v_{2n-3})\in W_{2n+1}$. Следовательно, $(v_0,\ldots, v_j, v_{2n-3}, v_n,\ldots,v_{2n-4},x,v_{j+1},\ldots, v_{n-1}, v_r)$—искомый $(r+1)$—путь.

5б) $k=n-2$.

1. $\exists j\in[0,n-3]\ ((v_j, v_{n-1})\in W_{2n+1}$.

Тогда $(v_0, \ldots, v_j, v_{n-1}, \ldots, v_{2n-3}, x, v_{j+1}, \ldots, v_{n-2}, v_r)-(r+1)$—путь требуемого вида.

2. $\forall j\in[0, n-3]((v_{n-1}, v_j)\in W_{2n+1})$.

2.1. $(v_{n-1}, x)\in W_{2n+1}$.

Тогда $S^+(v_{n-1})=\{v_0, \ldots, v_{n-3}, x, v_n\}$. Значит. $(v_{2n-4}, v_{n-1})\in W_{2n+1}$ и $(v_{2n-3}, v_{n-1})\in W_{2n+1}$. Поэтому существует такое $i\in[0, n-3]$, что $(v_i, v_{2n-4})\in W_{2n+1}$. Следовательно, $(v_0, \ldots, v_i, v_{2n-4}, v_{2n-3}, v_{n-1}, \ldots, v_{2n-5}, x, v_{i+1}, \ldots, v_{n-2}, v_r)$ будет $(r+1)$—путем требуемого вида.

2.2). $(x, v_{n-1})\in W_{2n+1}$.

Пусть $(v_{n-1}, v_{2n-3})\in W_{2n+1}$. Очевидно, для некоторого $j\in[0, n-2]$ имеет место $(v_j, v_n)\in W_{2n+1}$. Следовательно, $(v_0, \ldots, v_j, v_n, \ldots, v_{2n-4}, x, v_{j+1}, \ldots, v_{n-1}, v_{2n-3}, v_r)$—искомый $(r+1)$—путь.

Допустим, что $(v_{2n-3}, v_{n-1})\in W_{2n+1}$. Тогда существует такое $j\in[0, n-3]$, что $(v_j, v_{2n-3})\in W_{2n+1}$. Поэтому $(v_0, \ldots, v_j, v_{2n-3}, v_{n-1}, \ldots, v_{2n-4}, x, v_{j+1}, \ldots, v_{n-2}, v_r)-(r+1)$ - путь требуемого вида.

5в) $k=n-3$.

Имеем $S^-(v_r)=\{v_0, v_1, \ldots, v_{n-3}, v_{2n-3}, w\}$.

1) $\exists l\in[2, n-2], \exists j\in[0, l-2]((v_l, v_j)\in W_{2n+1})$.

В этом случае $(v_0, \ldots, v_j, v_l, \ldots, v_{2n-3}, x, v_{j+1}, \ldots, v_{l-1}, v_r)$ — искомый $(r+1)$-путь.

2) $\forall l\in[2, n-2], \forall j\in[0, l-2]((v_l, v_j)\in W_{2n+1})$, откуда $\{v_2, v_3, \ldots, v_{n-2}\}\subset S^-(v_0)$, $\{v_3, \ldots, v_{n-2}\}\subset S^-(v_1)$.

2.1) $(v_0, v_{n-1})\in W_{2n+1}$.

Тогда $(v_0, v_{n-1}, \ldots, v_{2n-3}, x, v_{n-2}, v_1, \ldots, v_{n-3}, v_r)$ — искомый $(r+1)$-путь.

2.2) $(v_{n-1}, v_0)\in W_{2n+1}$.

2.2а) $(v_0, v_n)\in W_{2n+1}$.

а1) $(v_{n-1}, v_1)\in W_{2n+1}$.

Тогда $(v_0, v_n, \ldots, v_{2n-3}, x, v_{n-2}, v_{n-1}, v_1, \ldots, v_{n-3}, v_r)$ — $(r+1)$-путь требуемого вида.

а2) $(v_1, v_{n-1})\in W_{2n+1}$

Если для некоторого $j\in[2, n-3]$ имеет место $(v_{n-1}, v_j)\in W_{2n+1}$, то существует такое $p\in[1, n-4]$, что (v_p, v_{n-1}), $(v_{n-1}, v_{p+1})\in W_{2n+1}$. Следовательно, $(v_0, v_n, \ldots, v_{2n-3}, x, v_{n-2}, v_1, \ldots, v_p, v_{n-1}, v_{p+1}, \ldots, v_{n-3}, v_r)$ — искомый $(r+1)$-путь.

Пусть теперь $(v_j, v_{n-1})\in W_{2n+1}$ для всех $j\in[2, n-3]$. Тогда существует такое $i\in[2n-4, 2n-3]$, что $(v_{n-1}, v_i)\in W_{2n+1}$. Поэтому $(v_0, v_n, \ldots, v_{i-1}, x, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_i, \ldots, v_r)$ — искомый $(r+1)$-путь.

2.2б) $(v_n, v_0)\in W_{2n+1}$.

Тогда имеет место $S^-(v_0)=\{v_2, \ldots, v_n, x\}$ и $S^+(v_0)=\{v_1, v_{n+1}, \ldots, v_{2n-2}, w\}$.

б1). $\exists j\in[n, 2n-4]((v_j, v_1)\in W_{2n+1})$.

Тогда $(v_0, v_{j+1}, v_{2n-3}, x, v_{n-2}, \ldots, v_j, v_1, \ldots, v_{n-3}, v_r)$ — искомый $(r+1)$-путь.

б2) $\forall j\in[n, 2n-4]((v_1, v_j)\in W_{2n+1})$.

Если $(v_i, v_2)\in W_{2n+1}$, для некоторого $i\in[n-1, 2n-5]$, то $(v_0, v_1, v_{i+1}, \ldots, v_{2n-3}, x, v_{n-2}, \ldots, v_i, v_2, \ldots, v_{n-3}, v_r)$ будет $(r+1)$-путем требуемого вида.

Пусть теперь $(v_2, v_i)\in W_{2n+1}$ для каждого $i\in[n-1, 2n-5]$. Тогда $(v_{r-1}, v_2)\in W_{2n+1}$. Следовательно, $(v_0, v_{r-1}, v_2, \ldots, v_{r-2}, x, v_1, v_r)$ — искомый $(r+1)$-путь.

Все возможные случаи исчерпаны. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Следующие примеры показывают, что наложенные в теореме ограничения на порядок турнира существенны:

$$T_5=\left(\{x_1, \ldots, x_5\}; \left\{\bigcup_{i=1}^{5}\bigcup_{j=1}^{2}\left\{(x_i, x_{i+j})\right\}\right\}\right), \text{ где } x_{5+i}=x_i \text{ для } i\geqslant 1.$$

$T_7=(\{1, \ldots, 7\}; \{(1, 2); (1, 5); (1, 6); (2, 3), (2, 4); (2, 6); (3, 1); (3, 4); (3, 7); (4, 1); (4, 5); (4, 7); (5, 1); (5, 2); (5, 3); (6, 3); (6, 4); (6, 7); (7, 1); (7, 2); (7, 5)\})$.

$T_9=(\{1, \ldots, 9\}; \{(1,2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (2, 3); (2, 6); (2, 7); (2, 9); (3, 5); (3, 7); (3, 8); (3, 9); (4, 2); (4, 3); (4, 5); (4, 8); (5, 2); (5, 7);

(5, 8); (5, 9); (6, 1); (6, 3); (6, 4); (6, 5); (7, 1); (7, 4); (7, 6); (7, 9); (8, 1); (8, 2); (8, 6); (8, 7); (9, 1); (9, 4); (9, 6); (9, 8)}).

Замечание 2. Для каждого $n \geqslant 5$ существует $(2n+1)$ — вершинный регулярный турнир, в котором имеется тройка вершин x_1, x_2, x_{n+2} такие, что $Q^2_{T_{2n+1}}(x_1, x_2, x_{n+2}) = \varnothing$. Действительно, достаточно рассмотреть следующий турнир:

$$T_{2n+1} = \left(\left\{x_1, x_2, \ldots, x^{2n+1}\right\}, \bigcup_{i=1}^{2n+1} \bigcup_{j=1}^{n} \left\{(x_i, x_{i+j})\right\}\right) \quad \text{где} \quad x_{2n+1+i} = x_i$$

для $i \geqslant 1$.

Следствие 1. В каждом регулярном турнире T_{2n+1}, $n \geqslant 5$, всякая дуга находится по крайней мере на различных n циклах длины k, для любого $k \in [5, 2n+1]$.

Следствие 2. В каждом регулярном турнире T_{2n+1}, $n \geqslant 5$, для всякой дуги (u, v) существуют по крайней мере $n-1$ различных путей длины $k \in [3, 2n-1]$, идущих от вершины u к вершине v.

Следствие 3. В любом почти регулярном турнире T_{2n}, $n \geqslant 5$, для каждой пары вершин u, v существует путь длины $k \in [3, 2n-1]$, от вершины u к вершине v.

С небольшой модификацией метода доказательства теоремы 1 можно доказать, что имеет место.

Теорема 2. В каждом регулярном турнире T_{2n+1}, $n \geqslant 5$, для всякого подмножества $Y \subset V_{2n+1}$, где $2 \leqslant |Y| \leqslant \left[\dfrac{n-2}{3}\right]$, и всякой пары вершин $u, v \in V_{2n+1} \setminus$ и для любого $m \in [3, 2n-|Y|]$ имеет место $Q^m T_{2n+1}(u, v, Y) \neq \varnothing$.

Заметим, что при $Y = \left[\dfrac{n-1}{3}\right]$ или $m=2$ утверждение теоремы 2 не верно.

В заключение считаю своим долгом выразить благодарность А. В. Петросяну и К. М. Мосесяну за внимание к работе.

Ս. Խ. ԴԱՐԲԻՆՅԱՆ

ՇՐՋԱՆՑՈՒՄՆԵՐ ՀԱՄԱՍԵՌ ՄՐՑԱՇԱՐԵՐՈՒՄ

Ամփոփում

Ցույց է տրվում, որ կամայական $2n+1$ $(n \geqslant 5)$ *գագաթանի համասեռ մրցաշարում ցանկացած* u, v, w *գագաթների և ցանկացած* $k \in [3. 2n]$ *թվի համար գոյություն ունի* u*-ից դուրս եկող,* v *մտնող և* w*-ով չանցնող* k *երկարությամբ պարզ կողմնորոշված ճանապարհ։ Մասնավորապես հետևում է, որ՝*

1) կամայական $2n+1$ $(n\geqslant 5)$ գագաթանի համասեռ մրցաշարի ցանկացած աղեղ գտնվում է առնվազն n իրարից տարբեր $k\in[3,2n+1]$ երկարության պարզ կողմնորոշված ցիկլերի վրա,

2) կամայական $2n+1$ $(n\geqslant 5)$ գագաթանի համասեռ մրցաշարի ցանկացած (u, v) աղեղի համար գոյություն ունի առնվազն $n-1$ իրարից տարբեր $k\in[3, 2n]$ երկարության պարզ կողմնորոշված՝ u-ից դուրս եկող և v-մտնող ճանապարհներ,

3) կամայական $2n$ $(n\geqslant 5)$ գագաթանի համարյա համասեռ մրցաշարի ամեն մի աղեղ գտնվում է $k\in[5, 2n]$ երկարության պարզ կողմնորոշված ցիկլի վրա։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ф. Харари.* Теория графов, «Мир», М., 1973.
2. *B. Alspach.* Cycles of each length in regular tournaments, Cand. Math. Bull., Vol. 10, № 2, (1967) 383—286.
3. *B. Alspach.* K. B. Reid and D. P. Roselle, Bypasses in Asymmetric Digraphs, J. Combinatorial Theory, Vol. 17, № 1. (1974), 11—18.