Р. Г. ДАВТЯН

ОДНОЗНАЧНАЯ ВОССТАНАВЛИВАЕМОСТЬ ПОЛУТУРНИРОВ

В настоящей работе определяются понятия полутурнира, его однозначной восстанавливаемости, описывается класс однозначно восстанавливаемых полутурниров и находятся оценки количества их ребер.

Если некоторому множеству ребер $U_1 \subseteq U$ полного неориентированного графа $L=(X, U)$ придать какую-то ориентацию, то получим частично ориентированный граф $\tilde{L}=(X, U_0 \cup \vec{U}_1)$, называемый полутурниром с множеством вершин X, множеством дуг $\vec{U}_1$ и множеством ребер $U_0=\vec{U} \setminus \vec{U}_1$. Заметим, что случаи $U_0=\varnothing$ или $\vec{U}_1=\varnothing$ не исключаются.

Полутурнир $\tilde{L}$ называется однозначно восстанавливаемым до турнира с заданными полустепенями исхода, если при восстанавливании всегда получается один и тот же турнир с этими параметрами.

Через $\rho^+(x)$ и $\rho^-(x)$ обозначим полустепени исхода и захода вершины x в полутурнире, а через $d^+(x)$ и $d^-(x)$—соответственные параметры в турнире, из которого получен данный полутурнир.

Будем рассматривать конечные турниры и полутурниры с помеченными вершинами.

Докажем, что имеет место следующая

Лемма 1. Для однозначной восстанавливаемости полутурнира $\tilde{L}=(X, U_0 \cup \vec{U}_1)$, полученного из турнира $\vec{L}=(X\vec{U})$ дезориентацией некоторых дуг, необходимо и достаточно, чтобы суграф $\vec{L}_1=(X, \vec{U} \setminus \vec{U}_1)$ не содержал орциклов.

Доказательство. Пусть суграф L_1 содержит орцикл $\vec{C}=(x_1, x_2, \ldots, \ldots, x_k)$. Ясно, что орграф $\vec{L}'$, полученный из $\vec{L}$ переориентацией дуг орцикла $\vec{C}$, и орграф $\vec{L}$ будут результатами восстановления для полутурнира $\tilde{L}$ и, следовательно последний восстанавливается не однозначно.

Пусть полутурнир $\tilde{L}$ восстанавливается неоднозначно, т. е. существуют разные турниры $\vec{L}=(X,\vec{U})$ и $\vec{L}_2=(X,\vec{U}_2)$, полученные из $\tilde{L}$ ориентаций ребер из U_0.

Так как $\vec{L}$ и $\vec{L}_2$ конечные, отличные друг от друга и $\forall x_i \in X$ $(d^+_{\vec{L}}(x_i)=d^+_{\vec{L}_2}(x_i))$, то в X найдется последовательность вершин $x_1,\ldots,x_k$, где $k\geqslant 3$, такая что

$$\overrightarrow{(x_1,x_2)}\ldots,\overrightarrow{(x_{k-1},x_k)},\ \overrightarrow{(x_k,x_1)}\in \vec{U}\setminus\vec{U}_1,$$
$$\overrightarrow{(x_1,x_k)}\overrightarrow{(x_k,x_{k-1})},\ldots,\ \overrightarrow{(x_2,x_1)}\in\vec{U}_2\setminus\vec{U}_1.$$

Этим доказано существование орцикла $(x_1,\ldots,x_k)$ в суграфе $\vec{L}_1$, что завершает доказательство леммы.

Через $X_{\tilde{L}}$ обозначим множество вершин полутурнира $L=(X,U_0\cup\vec{U}_1)$, имеющих инцидентное ребро (из U_0). Докажем, что имеет место следующая

Лемма 2. В любом однозначно восстанавливаемом полутурнире существуют вершины $x_i,\ x_j\in X_{\tilde{L}}$

$$\text{с } \rho^+(x_i)=d^+(x_i) \quad\text{и}\quad \rho^-(x_j)=d^-(x_j).$$

Доказательство. Пусть для полутурнира $\vec{L}=(X,\ U_0\cup\vec{U}_1)$, который однозначно восстанавливается до турнира $L=(X,U)$, утверждение леммы не верно, т.е.

$$\forall x\in X_{\tilde{L}}(\rho^+(x)<d^+(x))\vee\forall x\in X_{\tilde{L}}(\rho^-(x)<d^-(x)). \qquad (*)$$

Так как $\vec{L}$—конечный, то, очевидно, при справедливости (*) в $X_{\tilde{L}}$ существует последовательность вершин $x_1,\ldots,x_k$ такая, что $k\geqslant 3$ и

$$(x_1,\ x_2),\ (x_2,\ x_3),\ldots,\ (x_{k-1},\ x_k),\ (x_k,\ x_1)\in\vec{U}\setminus\vec{U}_1.$$

По лемме 1, $\tilde{L}=(X,\ U_0\cup\vec{U}_1)$ не является однозначно восстанавливаемым, что противоречит условию леммы.

Пользуясь доказанной леммой, легко заметить, что справедлива

Теорема 1. Полутурнир $\tilde{L}=(X,U_0\cup\vec{U}_1)$ однозначно восстанавливается до турнира $L=(X,\ U)$ с полустепенями исхода $d^+(x_1),\ldots,\ d^+(x_n)$ тогда и только тогда, когда с помощью следующего процесса он восстанавливается до такого турнира:

в L найти вершину x_i с $\rho^-(x_i)=d^-(x_i)$, $\rho^+(x_i)<d^+(x_i)$, все ребра, инцидентные x_i, ориентировать от нее и повторять этот процесс, пока возможно.

Заметим, что эта теорема дает эффективный алгоритм для проверки полутурниров на однозначную восстанавливаемость.

Для любого $n \geqslant 1$ через $f(n)$ обозначим наименьшее число такое, что никакой $2n+1$-вершинный полутурнир не является однозначно восстанавливаемым до регулярного турнира при $|U_0| > f(n)$. Точно значение этой функции при любом n дает

Теорема 2. $f(n) = \dfrac{3n^2+n}{2}$.

Доказательство. Пусть $n \geqslant 1$, $\tilde{L} = (X, U_0 \cup \vec{U}_1)$ -однозначно восстанавливаемый полутурнир и $\min\limits_{x \in X} \rho^-(x) = n - i$.

Из теоремы 1 легко заметить, что в X существуют вершины $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}$, для которых

$$\forall j \in [0, i-1] \quad (\rho^-(x_j) \geqslant n-j).$$

Отсюда

$$|\vec{U}_1| \geqslant n + (n-1) + \ldots + (n-i+1) + (n-i)(2n+1-i) \geqslant \frac{n(n+1)}{2}.$$

Следовательно,

$$|U_0| \leqslant n(2n+1) - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{3n^2+n}{2}$$

и

$$f(n) \leqslant \frac{3n^2+n}{2}$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно для любого $n \geqslant 1$ построить $2n+1$-вершинный однозначно восстанавливаемый полутурнир $\tilde{L} = (X, U_0 \cup \vec{U}_1)$ с

$$|U_0| = \frac{3n^2+n}{3}.$$

Рассмотрим полутурнир $L = (X, U_0 \cup \vec{U}_1)$, где

$X = \{x_1, \ldots, x_{2n+1}\}, \quad n \geqslant 1,$

$\vec{U}_1 = \{(x_i, x_{2n+2-j}) / i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, i}\}$

Пользуясь торемой 1, легко убедиться в однозначной восстанавливаемости $\vec{L}$. Очевидно также, что при любом $n \geqslant 1$

$$|U_0| = \frac{3n^2+n}{2}$$

Теорема доказана.

Интересным является вопрос о том, сколько можно дезориентировать дуг в любом n-вершинном турнире, сохраняя однозначную восстанавливаемость, т. е. нахождения максимального множества дуг, не содержащего в себе орциклов, названного множеством согласованных дуг.

Ниже улучшается нижняя оценка мощности такого множества, полученная Эрдешем и Муном и несколько улучшенная Рейдом [1, 2].

$F(n)$ всюду будет означать мощность максимального множества согласованных дуг в n—вершинном турнире.

Лемма 3. Пусть $n=2^k$, тогда

$$F(n) \geqslant \frac{n^2}{4} + \frac{n}{4}(k-1).$$

Доказательство. Легко видеть, что в любом $2m$—вершинном турнире множество вершин можно разбить на два m—элементных подмножества так, чтобы между ними в одном направлении находилось не менее

$$\frac{m(m+1)}{2} \text{ дуг.}$$

Исходя из этого, будем разбивать пополам множество вершин 2^k—вершинного турнира и всех вновь полученных турниров с соблюдением этого свойства, до получения одноэлементных множеств. Учитывая, что на каждом этапе число турниров удваивается, и для всех турниров, суммируя по количеству дуг, находящихся между двумя подмножествами множества вершин турнира в одном направлении, получим, что

$$F(n) \geqslant 2^{k-2}(2^k+k-1) = \frac{n^2}{4} + \frac{n}{4}(k-1).$$

Рассмотрим турниры T_n с $n=2m$.

Пусть $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$, $n=n_0+n_1$, где $n_0=2^k$, $0 \leqslant n_1 < 2^k$. Без нарушения общности можно предполагать, что существует не менее n_1 вершин с полустепенью захода не менее $\frac{n}{2} \geqslant n_1$. Если взять n_1 штук таких вершин, то число дуг заходящих к ним от остальных вершин будет не меньше

$$\frac{n_1(n_0+1)}{2}.$$

Далее рассматриваем турнир, порожденный n_1 вершинами и проводим аналогичные рассуждения: $n^1=n_2+n_3$, $n_2=2^{k_1}$ $0 \leqslant n_3 < 2^{k_1}$ и так далее до тех пор, пока $n_{2r+1}=0$ $(r \geqslant 0)$. Получаем последовательность $n_0, n_1, \ldots, n_{2r}$ такую, что

$$n_{2i}=2^{[\log_2 n_{2i-1}]}, \quad n_{2i+1}=n_{2i-1}-n_{2i} \quad (1 \leqslant i \leqslant r).$$

Используя лемму 1 и вышесказанное, получим

$$F(n) \geqslant F(n_0) + \sum_{i=0}^{r-1} \left[\frac{(n_{2i}+1)n_{2i+1}}{2} + F(n_{2i+2}) \right].$$

Ясно, что при $n=2m+1$ имеет место

$$F(n)\geqslant F(n-1)+\left[\frac{n}{2}\right].$$

Рассмотрим разность

$$F(n)-\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+2t+1}{2}\right] \quad \text{при } n=2m$$

Легко заметить, что

$$\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+2t+1}{2}\right]=\sum_{i=0}^{r}\frac{n_{2i}^2}{4}+\sum_{i=0}^{r-1}\frac{n_{2i}\cdot n_{2i+1}}{2}+\frac{nt}{2},$$

а соотношение для $F(n)$ можно представить в виде:

$$F(n)\geqslant\sum_{i=0}^{r}\frac{n_{2i}^2}{4}+\sum_{i=0}^{r-1}\frac{n_{2i}\,n_{2i+1}}{2}+\frac{n_0}{4}\,(k-1)+\frac{n_1}{2}.$$

Следовательно, имеет место

$$F(n)\geqslant\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+(\log_2 8n)/2}{2}\right], \quad \text{при} \quad \left[\frac{1}{2}\log 8n\right]=2t+1\,(t=1,2,3\ldots)$$

$$F(n)\geqslant\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+(\log_2 2n)/2}{2}\right], \quad \text{при} \quad \left[\frac{1}{2}\log_2 2n\right]=2t+1\,(t=1,2,3\ldots)$$

Легко заметить, что полученные формулы верны и для нечетных n.

В заключение выражаю благодарность А. В. Петросяну за внимание к работе и К. М. Мосесяну за постановку задачи.

Ռ. Գ. ԴԱՎԹՅԱՆ

ԿԻՍԱՄՐՑԱՇԱՐԵՐԻ ՄԻԱՐԺԵՔ ՎԵՐԱԿԱՆԳՆՈՒՄԸ

Ամփոփում

Եթե ոչ կողմնորոշված լրիվ գրաֆի ինչ որ կողերին վերագրված են կողմնորոշումներ, ապա ստացված մասնակի կողմնորոշված գրաֆը կոչվում է

կիսամրցաշար։ Աշխատանքում դիտարկվում են համարակալված գագաթներով վերջավոր մրցաշարեր և կիսամրցաշարեր։ Կիսամրցաշարը կոչվում է միարժեք վերականգնվող, եթե տված պարամետրերով մրցաշար ստանալու նպատակով նրա կողերին ինչպիսի կողմնորոշումներ էլ տանք, արդյունքում ստացվում է միևնույն մրցաշարը։

Աշխատանքում նկարագրված է միարժեք վերականգնվող կիսամրցաշարերի դասը և ստացված են գնահատականներ նրանց կողերի քանակի համար։

ЛИТЕРАТУРА

1. «Теория графов; покрытия, укладки, турниры». Сб. переводов. Москва, «Мир», 1974.
2. *K. B. Reid*, On sets of arcs containing no cycles in a tournament, Canad. Math. Bull., 12, 3 (1969).