**К. М. МОСЕСЯН**

# О СВОЙСТВАХ НЕКОТОРЫХ ОРИЕНТАЦИЙ ГРАФОВ

В настоящей статье мы придерживаемся терминологии, принятой в [1]. Все понятия и обозначения, не определяемые здесь, можно найти в работе [2]. Под словом „граф" всюду будем понимать конечный граф.

Базой дуг орграфа $\vec{L}=(X,\vec{U})$ называется такое подмножество $\vec{U}_1\subseteq\vec{U}$, которое удовлетворяет двум условиям:

$$1)\ \forall x\in X\,(\bigcup_{i\geqslant 0}\Gamma_{+i}[x,\vec{L}]=\bigcup_{i\geqslant 0}\Gamma_{+i}[x,\vec{L}_1=(X,U_1)]),$$

$$2)\ \forall\vec{U}_2\subset\vec{U}_1\exists x\in X\,(\bigcup_{i\geqslant 0}\Gamma_{+i}[x,\vec{L}]\not\subseteq\bigcup_{i\geqslant 0}\Gamma_{+i}[x,\vec{L}_2=(X,\vec{U}_2)]).$$

Если $\vec{W}$—база дуг для $\vec{L}=(X,\vec{U})$, то $\vec{L}_1=(X,\vec{W})$ назовем базисным графом орграфа $\vec{L}$.

Графом структуры $(X,\geqslant)$ называется орграф $\vec{L}=(X,\vec{U})$, где

$$\forall a,b\in X\,(\overrightarrow{ab}\in\vec{U}\Longleftrightarrow a\leqslant b).$$

Неориентированный граф, который можно ориентировать так, чтобы он стал базисным графом некоторого графа структуры, назовем структурно базируемым, а соответствующую ориентацию — — структурно базирующей.

Через $R$ обозначим класс структурно базируемых графов, а через $\vec{R}\,(L)$— множество структурно базирующих ориентаций графа $L$.

Ориентации $\varphi$ и $\psi$ графа $L=(X,U)$ называются различными, если $U(\varphi)\cap\overline{U}(\psi)\neq\varnothing$, т. е. существует ребро, принимающее при ориентациях $\varphi$ и $\psi$ противоположные направления.

Граф называется насыщенным, если он базируем и при всякой базирующей ориентации превращается в бисвязный орграф.

Декартовым произведением двух графов $L_1=(X_1, U_1)$ и $L_2=(X_2, U_2)$ называется граф $L_1 \times L_2$, с вершинами $x_{ij}$, где $i \in [1, |X_1|]$, $j \in [1, |X_2|]$, причем две вершины $x_{i_1 j_1}$ и $x_{i_2 j_2}$ смежны, если

$$1.\ i_1=i_2, \quad x_{j_1} x_{j_2} \in U_2;$$

$$2.\ x_{i_1} x_{i_2} \in U_1, \quad j_1 = j_2.$$

Под $\{A; \times\}$ будем здесь понимать замыкание множества графов $A$ относительно операции декартова произведения.

Через $K$ обозначим класс двудольных связных обыкновенных графов, которые обладают следующим свойством: для всякой вершины существует структурно базирующая ориентация, при которой эта вершина является тупиком.

Докажем, что имеет место

Лемма 1. Класс К замкнут относительно операции декартова произведения графов.

Пусть $L_i=(\{x_1^i, \ldots, x_{n_i}^i\}, U_i) \in K$, $i \in [1,2]$ и $L=(X,U)=L_1 \times L_2$. Очевидно, граф $L$ — двудольный, связный, обыкновенный. Пусть $x_{j_1 j_2} \in X$ произвольная его вершина. Докажем, что существует ориентация $\varphi_{j_1 j_2} \in \vec{R}(L)$, при которой $L^-(\varphi_{j_1 j_2})=\{x_{j_1 j_2}\}$.

По определению графов $L_i$, существует структурно базирующая ориентация $\varphi_{j_i}$, при которой $L_i^-(\varphi_{j_i})=\{x_{j_i}^i\}$.

Пусть

$$X_2^k=\{x_{kj} \in X / j \in [1,n_2]\}, \quad k \in [1,n_1],$$

$$X_1^r=\{x_{ir} \in X / i \in [1,n_1]\}, \quad r \in [1,n_2].$$

Для любых $k \in [1,n_1]$ и $r \in [1,n_2]$, присвоив подграфу $L(X_2^k)$ (соответственно $L(X_1^r)$) ориентацию $\varphi_{j_2}$ (соответственно $\varphi_{j_1}$), получим требуемую структурно базирующую ориентацию для графа $L$. Лемма доказана.

Пусть $L=(X,U)$ состоит из $l$ компонент связности, причем $l \geqslant 1$ и $i$-ая компонента является простой цепью длины $k_i \geqslant 1$, т. е. $C^{k_i}=(a_0^i, \ldots, a_{k_i}^i)$. Обозначим через $E_{k_1, \ldots, k_l}$ граф, полученный из $L$ склеиванием подмножества вершин $\bigcup_{j=1}^{l} \{a_0^j\}$ в одну вершину $a_0$ и подмножества $\bigcup_{j=1}^{l} \{a_{k_j}^j\}$ в вершину $a_1$.

Обозначим

$$E=\{E_1\} \cup \{E_{i,i} / i > 2\}, \quad K'=\{E \cup \{E_{k_1, \ldots, k_l} / l, k_1, \ldots, k_l > 2,\ k_1 = \ldots = k_l \ (mod\, 2)\}; \times\}.$$

А. Коциг [4] (см. также [5]) высказал гипотезу о том, что $K=\{E; \times\}$.

Следующая теорема опровергает эту гипотезу.

Теорема 1. а) $K' \setminus \{E; \times\} \neq \varnothing$,

б) $K' \subseteq K$.

а) Возьмем, например, 11—вершинный граф $E_{4,3,4} \in K'$. Он не может быть представлен в виде декартова произведения непустых графов (так как число его вершин — простое) и не входит в множество $E$. Следовательно, $E_{4,4,4} \in K' \setminus \{E; \times\}$.

б) В силу леммы 1, достаточно доказать, что

$$E \cup \{E_{k_1,\ldots,k_l} / l, k_1, \ldots, k_l > 2,\ k_1 = \ldots = k_l \pmod 2\} \subseteq K.$$

Очевидно, $E \subset K$. Пусть $l, k_1, \ldots, k_l > 2,\ k_1 = \ldots = k_l \pmod 2$. Докажем, что $E_{k_1,\ldots,k_l} \in K$. Ясно, что граф $E_{k_1}, \ldots, E_{k_l}$—двудольный, связный и обыкновенный.

Пусть $x$ — произвольная вершина графа $E_{k_1 \ldots k_l}$. Нужно доказать, что

$$\exists \varphi_x \in \vec{R}(E_{k_1,\ldots,k_e})\,(E^{-}{}_{k_1,\ldots,k_e}(\varphi_x) = \{x\}). \tag{1}$$

Случай $б_1$: $\rho(x) > 2$.

Тогда, по определению графа $E_{k_1,\ldots,k_e}$, $x = a_0$ или $x = a_1$.

Заметим, что все рассуждения относительно вершины $a_0$ справедливы и для $a_1$. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что $x = a_0$.

Обозначим через $\varphi_x$ ту ориентацию графа $E_{k_1,\ldots,k_e}$, при которой все простые цепи между вершинами $a_1$ и $a_0$ исходят из $a_1$ и заходят в $a_0$. Очевидно, $\varphi_x$ удовлетворяет соотношению (1).

Случай $б_2$: $\rho(x) = 2$.

Пусть $x = a^i_j$, где $i \in [1, l]$, $j \in [1, k_i - 1]$.

Пользуясь замечанием, сделанным в случае $б_1$, можно без нарушения общности считать, что $d(x, a_1) \geqslant d(x, a_0)$.

Ориентируем граф $E_{k_1,\ldots,k_e}$ так, как это было сделано при рассмотрении случая $б_1$, и в полученном орграфе переориентируем дуги $\overrightarrow{a^i_j a^i_{j-1}}, \ldots, \overrightarrow{a^i_1 a_0}$, если $j > 1$, и дугу $\overrightarrow{a^i_1 a_0}$, если $j = 1$.

Очевидно, полученный орграф ориентирован структурно базируемо и в нем вершина $x$ тупиковая. Теорема доказана.

Ниже мы получим точные нижние и верхние оценки для количества различных базирующих, сильно базирующих и структурно базирующих ориентаций и укажем все графы, на которых верхние оценки достигаются.

Легко заметить, что из формул (2), (3) и теоремы 1 работы [2], при $k = 2$ получаются следующие утверждения:

Предложение 1. Для любой вершины $a \in (L^{+}(\varphi) \setminus L^{+2}(\varphi))$, произвольного сильно базируемо ориентированного графа $L(\varphi) = (X, U(\varphi))$ существует ориентация $\psi \in \vec{S}(L)$, при которой $L^{+}(\psi) = L^{+}(\varphi) \setminus \{a\}$.

Предложение 2. Если при сильно базирующей ориентации $\varphi$ графа $L = (X, U)$ имеет место

$$|L^+(\varphi)|=\min_{\psi\in\vec{S}(L)}|L^+(\psi)|, \text{ то } L^+(\varphi)=L^{+2}(\varphi).$$

Предложение 3. Для того чтобы связный граф $L=(X,U)$ был сильно базируемым, необходимо и достаточно, чтобы для любой вершины $a\in X$ существовала такая сильно базирующая ориентация $\varphi$, при которой вершина $a$ — единственная антитупиковая.

Из теоремы 2 и леммы 1 работы [2] при $\kappa=2$ получаются следующие утверждения:

Предложение 4. Граф $L=(X,U)$ сильно базируем тогда и только тогда, когда он содержится в классе $\Lambda_4$ и базируем, то есть $S=B\cap\Lambda_4$.

Предложение 5. Для любого целого $t\geqslant 0$ и любого сильно базируемо ориентированного графа $L(\varphi)$, переориентируя все дуги, удаленные от произвольного множества $Y\subseteq L^{+(t+1)}(\varphi)$ не более, чем на $t$, получим сильно базируемо ориентированный граф.

Докажем, что справедлива

Лемма 2. Для любой пары несмежных вершин $a,b\in X$ произвольного связного сильно базируемого графа $L=(X,U)$ существует ориентация $\varphi\in\vec{S}(L)$, при которой множество антитупиковых вершин состоит из этой пары.

Пусть $c\notin X$. Построим граф $L_1=(X\cup\{c\},\ U\cup\{ac,bc\})$ и докажем, что $L_1\in S$. Придадим графу $L$ какую-нибудь сильно базирующую ориентацию. Если при этой ориентации ни одна из вершин $a$ и $b$ не достижима из другой, то ориентируем ребра $ac$ и $bc$ в сторону вершины $c$, а если, допустим, вершина $b$ достижима из вершины $a$, то ребрам $ac$ и $bc$ придадим ориентации $\vec{ac}$ и $\vec{cb}$.

В результате получим сильно базирующую ориентацию для графа $L_1$. Пользуясь предложением 3, графу $L_1$ дадим ориентацию $\psi\in\vec{S}(L_1)$, при которой $L_1^+(\psi)=\{c\}$.

По предложению 2, $\{c\}=L_1^{+2}(\psi)$. Удаляя из орграфа $L_1(\psi)$ вершину $c$, получим сильно базируемо ориентированный орграф $\vec{L}=(X,\vec{U})$, в котором множество антитупиков состоит из вершин $a$ и $b$.

Лемма 3. Для любого непустого множества $Y\subseteq\Gamma_1[a,L]$, где $L=(X,U)$ связный сильно базируемый граф и $a\in X$, существует ориентация $\varphi\in\vec{S}(L)$, при которой $L^+(\varphi)=Y$.

Пользуясь предложениями 2 и 3, построим ориентацию $\varphi_1\in\vec{S}(L)$, при которой $L^+(\varphi_1)=L^{+2}(\varphi_1)=\{a\}$. По предложению 5 ориентация $\varphi_2$, получающаяся из $\varphi_1$ переориентацией всех дуг, инцидентных вершине $a$, сильно базирующая. Очевидно, $L^+(\varphi_2)=\Gamma_1[a,L]$ и при $Y\neq\Gamma_1[a,L]$ справедливо $\Gamma_1[a,L]\setminus Y\subset(L^+(\varphi_2)\setminus L^{+2}(\varphi_2))$.

Пользуясь предложением 1, можно вершины множества $\Gamma_1[a,L]\setminus Y$ поочередно удалить из множества антитупиковых вершин орграфа

$L(\varphi_2)$ и получить ориентацию $\varphi \in \vec{S}(L)$, при которой $L^{+}(\varphi)=Y$.

Очевидно, справедливы следующие замечания:

1. Стягивая бисвязный подграф базируемо ориентированного графа, получим базируемо ориентированный граф.

2. Если структурно базируемый граф ациклический, то он — простая цепь.

3. Всякая простая цепь имеет ровно две различных структурно базирующих ориентации.

4. Если граф $L=(X,U)$ ациклический, то $|\vec{B}(L)|=|\vec{S}(L)|=2^{|U|}$.

5. При $k \geqslant 3$

$$|\vec{S}(C_k)|=2^k-2k-2, \quad |\vec{B}(C_k)|=2^k-2k.$$

Пусть дан граф $L(\{x_1, \ldots, x_n\}, U)$. Произведем в нем элементарные стягивания (см. [3]) следующим образом: если вершина $x$ входит в некоторый цикл длины 2 или 3, то стягиваем этот цикл в вершину $x_i$ и повторяем процесс для полученного графа, пока возможно.

Если в результирующем графе через вершину $x_1$ не проходят циклы длины 2 или 3, то переходим к вершине со следующим номером и повторяем описанный процесс. Так как граф конечный, то этот процесс закончится.

Через $L^*=(X^*, U^*)$ обозначим полученный граф, а через $L^{**}=(X^{**}, U^{**})$ — максимальную часть графа $L$, каждая компонента связности которой в ходе описанного процесса оказалась стянутой в одну вершину.

Через $E(H)$ обозначим множество непустых блоков графа $H$. При этих обозначениях имеет место

**Теорема 2.** Если граф $L=(X, U)$ базируем и

$$E(L^*)=\{L_i=(X_i, U_i)/i\in[1, k]\}, \quad \text{то}$$

$$2^{|E(L^{**})|} \prod_{i=1}^{k}\left(\frac{|X_i|(|X_i|+1)}{2}-|U_i|+\sum_{j=3}^{\sigma_i}|P_i^j|\right)\leqslant|\vec{B}(L)|\leqslant 2^{|U|},$$

где

$$\sigma_i=\max_{x\in X_i}|\Gamma_1[x, L_i]|,$$

$$P_i^j=\{\{x_{q_1}, \ldots, x_{q_j}\}/\exists x\in X_i(\{x_{q_1}, \ldots, x_{q_j}\}\subseteq\Gamma_1[x, L_i])\};$$

обе оценки достижимы, причем верхняя достигается тогда и только тогда, когда граф $L$ ациклический.

Верхняя оценка следует из того, что количество всевозможных ориентаций графа $L$ равно $2^{|U|}$. По замечанию 4 на ациклических графах оценка достигается. С другой стороны, если граф содержит циклы, то для него существует небазирующая ориентация и, следовательно, верхняя оценка не достигается.

В [3] доказано, что $|\vec{B}(L^{**})|=2^{|E(L^{**})|}$. Следовательно, на графах, каждый блок которых насыщенный, нижняя оценка достигается.

Сильная базируемость графов $L_i$ ($i\in[1, k]$) следует из замечания 1 и из предложения 4.

Сильно базирующие ориентации графа $L_i$, получающиеся в предложении 3, в лемме 2 и в лемме 3 (для $|Y|\geqslant 3$), попарно различны и $|\vec{S}(L_i)|$ не меньше суммы количеств этих ориентаций:

$$|\vec{S}(L_i)|\geqslant|X_i|+\frac{|X_i|(|X_i|-1)}{2}-|U_i|+\sum_{j=3}^{\sigma_i}|P_i^j|=$$

$$=\frac{|X_i|(|X_i|+1)}{2}-|U_i|+\sum_{j=3}^{\sigma_i}|P_i^j|.$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что $|\vec{S}(L^{*})|=\prod_{i=1}^{k}|\vec{S}(L_i)|$ и что, комбинируя любую базирующую ориентацию графа $L^{**}$ с любыми сильно базирующими ориентациями блоков $L_i=(X_i, U_i)$, где $i\in[1,k]$, получим базирующую ориентацию для графа $L=(X,U)$.

**Следствие.** Если $L=(X,U)$ — непустой связный сильно базируемый граф, $\sigma=\max\limits_{x\in X}\rho(x)$,

$$P_i=\{\{x_{j_1},\ldots,x_{j_i}\}/\exists x\in X(\{x_{j_1},\ldots,x_{j_i}\}\subseteq\Gamma_1[x,L])\},\qquad \text{то}$$

$$\frac{|X|(|X|+1)}{2}-|U|+\sum_{i=2}^{\sigma}|P_i|\leqslant|\vec{S}(L)|\leqslant 2^{|U|};$$

обе оценки достижимы, причем верхняя достигается тогда и только тогда, когда $L$ ациклический.

Нижняя оценка дает точное количество сильно базирующих ориентаций для графов

$$E_1;\ E_2;\ E_{2.2};\ E_{2.2.2};\ \ldots$$

Если граф $L=(X,U)$ содержит цикл, то $|\vec{S}(L)|<2^{|U|}$ и верхняя оценка на графе $L$ недостижима. Если же $L$ ациклический, то $|\vec{S}(L)|=2^{|U|}$ по замечанию 4.

**Теорема 3.** Если $L=(X,U)$ — непустой структурно базируемый граф, то

а) при $|X|\leqslant 3$ граф $L$ есть простая цепь длины $|X|-1$, причем $|\vec{R}(L)|=2$;

б) при $|X|>3$ справедливы оценки

$$2\leqslant|\vec{R}(L)|\leqslant|X|^2-3|X|;$$

обе достижимые, причем верхняя достигается тогда и только тогда, когда $L=C_{|X|}$.

а) Очевидно.

б) Пользуясь замечаниями 2 и 3, достаточно рассмотреть случай, когда граф $L=(X,U)$ содержит циклы, т. е. $|U|\geqslant|X|$.

При всякой структурно базирующей ориентации $\varphi$ графа $L$ в орграфе $L(\varphi)$ нет дуги между вершинами $L^+(\varphi)$ и $L^-(\varphi)$. Следовательно, $|\vec{R}(L)|$ не больше удвоенного количества различных пар несмежных вершин в графе $L$, т. е.

$$|\vec{R}(L)|\leqslant 2\left(\frac{|X|(|X|-1)}{2}-|U|\right) \tag{2}$$

и, тем более

$$|\vec{R}(L)|\leqslant 2\left(\frac{|X|(|X|-1)}{2}-|X|\right)=|X|^2-3|X|. \tag{3}$$

Достижимость нижней оценки следует из замечания 3. Для графов, изоморфных $C_{|X|}$, верхняя оценка достигается.

Индукцией по количеству вершин докажем, что верхняя оценка достижима только для таких графов.

Для четырехвершинных графов утверждение очевидно. Допустим, что оно верно для всех графов с количеством вершин не более $k (k\geqslant 4)$, и пусть $L=(X, U)$ — структурно базируемый граф с $|X|=k+1$ и $\vec{R}|(L)|=|X|^2-3|X|$.

Сначала докажем, что $\forall x\in X(\rho(x)\geqslant 2)$.

Допустим противное, т. е. что существует вершина $y\in X$ степени 1, и пусть $L_1=L(X\setminus\{y\})$. При любой структурно базирующей ориентации $\varphi$ графа $L$ вершина $y$—тупиковая или антитупиковая; удалив $y$ из $L(\varphi)$, получим структурно базирующую ориентацию для графа $L_1$. Очевидно, что при удалении вершины $y$ различным структурно базирующим ориентациям графа $L$ соответствуют различные структурно базирующие ориентации графа $L_1$, т. е. $|\vec{R}(L_1)|\geqslant|\vec{R}(L)|$. Однако, по (3), $|\vec{R}(L_1)|<|\vec{R}(L)|$. Из полученного противоречия следует, что $\forall x\in X(\rho(x)\geqslant 2)$.

Как видно из (2), неравенство $|X|<|U|$ влечет $|\vec{R}(L)|<|X|^2-3|X|$. Значит, в связном графе $L$ имеем $|X|=|U|$ и $\forall x\in X(\rho(x)\geqslant 2)$.

Отсюда следует, что $L\doteq C_{|X|}$.

Կ. Մ. ՄՈՍԵՍՅԱՆ

## ԳՐԱՖՆԵՐԻ ՈՐՈՇ ԿՈՂՄՆՈՐՈՇՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

*Ոչ կողմնորոշված գրաֆը կոչվում է բազիսացվող (ուժեղ բազիսացվող, ստրուկտուրային բազիսացվող), եթե այն կարելի է կողմնորոշման միջոցով դարձնել որևէ կողմնորոշված գրաֆի (մասնակի կարգավորման գրաֆի, ստրուկտուրային գրաֆի) բազիսային գրաֆ։*

Աշխատանքում հերքվում է Ա. Կոցիգի առաջարկած որոշ հատկություններով ստրուկտորային բաղխացվող գրաֆների նկարագրմանը վերաբերվող հիպոթեզը, ստացվում են ստորին և վերին ճշգրիտ գնահատականներ՝ գրաֆի իրարից տարբեր բաղխային, ուժեղ բաղխային, ստրուկտուրային բաղխային կողմնորոշումների քանակի համար և նշվում են բոլոր այն գրաֆները, որոնց համար վերին գնահատականները հասանելի են։

## ЛИТЕРАТУРА


1. *А. А. Зыков.* Теория конечных графов. I, «Наука», Новосибирск, 1969.
2. *К. М. Мосесян.* к—базируемые графы (см. наст. сб.).
3. *К. М. Мосесян.* Насыщенные графы. ДАН Арм. ССР, LVI, № 5 (1973), 257—262.
4. *A. Kotzig.* Beitrage zur Graphentheorie, Kolloq... Manebach, Mai 1967; B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1968, 224—225.
5. *Л. С. Мельников.* Многообразие задач теории графов, Вычислительная математика и вычислительная техника, вып. III, 1972, 103—114.