К. М. МОСЕСЯН

k — БАЗИРУЕМЫЕ ГРАФЫ

В настоящей статье мы придерживаемся терминологии, принятой в [1]. Под словом „граф" всюду будем понимать конечный граф.

Орграф $\vec{C}_n$, полученный из простого цикла длины $n \geqslant 1$ ориентацией ребер, назовем k-неполным орциклом ($k \geqslant 0$), если наименьшее число друг, переориентацией которых получается орцикл, равно k; по определению, орцикл длины k считается также k-неполным орциклом.

Будем говорить, что орграф $\vec{L}=(X, \vec{U})$ содержит k-неполный орцикл, если он содержит часть, изоморфную k-неполному орциклу.

Граф $L=(X, U)$ назовем k-базируемым (соответственно слабо k-базируемым), где $k \geqslant 2$, если его можно ориентировать так, чтобы полученный орграф не содержал p-неполных орциклов ни при каком $p<k$ (соответственно $0<p<k$).

Через S_k (соответственно B_k) обозначим класс k-базируемых (слабо k-базируемых) графов, а через $\vec{S}_k(L)$ (соответственно $\vec{B}_k(L)$) — множество k-базирующих (слабо k-базирующих) ориентации графа L. Условимся в этих обозначениях при $k=2$ его не писать и 2-базируемые (слабо 2-базируемые) графы назовем сильно базируемыми (базируемыми).

Через $[m, n]$ обозначаем множество неотрицательных целых чисел, не меньших m и не больших n; смысл обозначения $[m, \infty)$ тоже ясен.

Пусть $L=(X, U)$ — неориентированный граф, $\vec{L}=(X, \vec{U})$ - орграф, $a, b \in X$ — произвольные вершины, $Y \subseteq X$ — произвольное подмножество вершин, $k \geqslant 0$ — произвольное целое неотрицательное число.

Через $d(a, b)$ обозначим длину кратчайшей цепи графа L между вершинами a и b, а через $\vec{d}(a, b)$ - длину кратчайшего (ориентированного) пути орграфа $\vec{L}$, с началом a и концом b.

Введем также обозначения:

$$\Gamma_k[Y, L]=\{x \in X / \exists y \in Y(d(x, y)=k)\},$$

$$\Gamma_{+k}[Y, \vec{L}]=\{x \in X / \exists y \in Y(\vec{d}(y, x)=k)\},$$

$$\Gamma_{-k}[Y, \vec{L}] = \{x \in X / \exists y \in Y(\vec{d}(x, y) = k)\},$$

$$\vec{L}^{+} = \vec{L}^{+1} = \{x \in X / \Gamma_{-1}[x, \vec{L}] = \varnothing\}, \ \vec{L}^{-} = \{x \in X / \Gamma_{+1}[x, \vec{L}] = \varnothing\},$$

$$\vec{L}^{+m} = \{x \in \vec{L}^{+(m-1)} / \forall y \in \Gamma_{+(m-1)}[x, \vec{L}](|\Gamma_{-1}[y, \vec{L}]| = 1)\}, \ m \geqslant 2$$

(запись типа $\Gamma_{+k}[x, \vec{L}]$ означает $\Gamma_{+k}[\{x\}, \vec{L}]$).

Вершины из $\vec{L}^{-}$ называются тупиками, а из $\vec{L}^{+m}$ — m-антитупиками (при $m=1$ — просто антитупиками) орграфа $\vec{L}$.

Через Λ_k обозначим класс графов с обхватом не менее k (обхват ациклического графа считается равным бесконечности).

Через C_i обозначим простой цикл длины i, через $\rho(x)$ — степень вершины x, а через $\bar{\varphi}$ - ориентацию, обратную ориентации φ.

Цепь $(x_0, x_1, \ldots, x_l)$ называется элементарной, если $\rho(x_i) = 2$ при $i \in [1, l-1]$.

Если графу $L = (X, U)$ придана ориентация φ, то полученный орграф можно обозначить так:

$$\vec{L} = (X, \vec{U}) = L(\varphi) = (X, U(\varphi)).$$

Пусть $Y \subseteq X$ - произвольное подмножество вершин графа $L(\varphi) = (X, U(\varphi))$, $(\overrightarrow{a\,b}) \in U(\varphi)$ и $0 \leqslant m \leqslant n$. Расстояние между Y и $(\overrightarrow{a\,b})$ определяется соотношением

$$d(Y, (\overrightarrow{a\,b})) = \min_{y \in Y} \{d(y, a), \ d(y, b)\}.$$

Через $\bar{\varphi}(Y, [m, n])$ обозначим ориентацию, получающуюся из ориентации φ изменением направления всех тех дуг, расстояние которых от множества Y находится на интервале $[m, n]$.

Орграф $\vec{L} = (X, \vec{U})$ называется бисвязным, если

$$\forall a, b \in X \exists k \geqslant 0 (a \in \Gamma_{+k}[b, \vec{L}]).$$

Подграф $\vec{L}' = (X', \vec{U}')$ орграфа $\vec{L} = (X, \vec{U})$ называется его бикомпонентой, если он бисвязен и максимален относительно этого свойства.

Стягиванием части $\vec{H} = (Y, \vec{V})$ орграфа $\vec{L} = (X, \vec{U})$ называется процесс, при котором все отличные от ориентированных петель дуги из $\vec{V}$ опускаются, вершины из Y отождествляются и оставшиеся дуги из $\vec{U}$, инцидентные вершинам из Y, становятся инцидентными вершине, получившейся в результате отождествления вершин Y. В частности, если существует дуга $(\overrightarrow{xy}) \in \vec{U} \setminus \vec{V}$, $x, y \in Y$, то в результате стягивания образуется ориентированная петля.

Обозначим

$$S_Y^{+k}(L)=\{\varphi\in\vec{S}(L)/Y\subseteq L^{+k}(\varphi)\},\ k\geqslant 1.$$

Связный граф назовем критическим не сильно базируемым, если он не является сильно базируемым, но становится таковым после удаления любого ребра.

Через $\overline{S_c}$ (соответственно $\overline{S_c^n}$) обозначим класс критических не сильно базируемых (n-вершинных критических не сильно базируемых) графов.

Докажем, что имеет место

Теорема 1. При любом $k\geqslant 2$ следующие высказывания о связном графе $L=(X, U)$ равносильны:

(а) $L\in S_k$,

(б) $\forall a\in X\exists\varphi\in\vec{S}_k(L)(\{a\}=L^+(\varphi)=L^{+k}(\varphi))$.

Доказательство. Очевидно, имеет место следующее утверждение

$$\forall H\in S_k\forall\varphi\in\vec{S}_k(H)\forall Y\subseteq H^+(\varphi)(\tilde{\varphi}(Y,[0,0])\in\vec{S}_k(H)). \tag{1}$$

Докажем, что

$$\forall H=(Y, V)\in S_k\forall\varphi\in\vec{S}_k(H)\forall a\in H^+(\varphi)\setminus H^{+k}(\varphi)\exists\psi\in\vec{S}_k(H)(H^+(\psi)= =H^+(\varphi)\setminus\{a\}). \tag{2}$$

Пусть $a\in H^{+p}(\varphi)\setminus H^{+(p+1)}(\varphi)$, где $p\in[1, k-1]$.

Обозначим $\varphi_0^1=\varphi$, $A_0^e=\{a\}$, $A_i^e=\{x\in X\setminus\bigcup_{j=0}^{i-1}A_j^e/\Gamma_{-1}[x, H(\varphi_0^e)]\subseteq\bigcup_{j=0}^{i-1}A_j^e\}$,

$\varphi_i^e=\tilde{\varphi}_{i-1}^e(A_{i-1}^e,[0,0])$, $\varphi_0^{e+1}=\varphi_{k_e+1}^e$ при $e\in[1,p]$, $i\in[1,k_e+1]$, где k_e - такое число, что $A_{k_e}^e\neq\varnothing$ и $A_{k_e+1}^e=\varnothing$.

Пользуясь соотношением (1), легко заметить, что все эти ориентации $\varphi_i^e(e\in[1,p], i\in[1,k_e+1])$ k-базирующие и $H^+(\varphi_{k_p+1}^p)=H^+(\varphi)\setminus\{a\}$.

Соотношение (2) доказано. Откуда следует, что

$$\forall H=(Y, V)\in S_k\forall\varphi\in\vec{S}_k(H)(|H^+(\varphi)|=\min_{\psi\in\vec{S}_k(H)}|H^+(\psi)|\Rightarrow H^+(\varphi)=H^{+k}(\varphi)). \tag{3}$$

Для связного графа L докажем следующее соотношение:

$$L\in S_k\Rightarrow\exists\varphi\in\vec{S}_k(L)(|L^+(\varphi)|=1). \tag{4}$$

Допустим оно не верно, т. е. при любой k-базирующей ориентации графа L количество антитупиковых вершин не меньше двух.

Пусть

$$\Phi=\{\varphi\in\vec{S}_k(L)/|L^+(\varphi)|=\min_{\psi\in\vec{S}_k(L)}|L^+(\psi)|\},\ \varphi_1\in\Phi,$$

$$a_1, b_1\in L^+(\varphi_1)\text{ и } d(a_1, b_1)=\min_{\varphi\in\Phi}\min_{\substack{x,y\in L^+(\varphi)\\ x\neq y}}d(x, y).$$

Из соотношения (3) следует, что $L^+(\varphi_1)=L^{+k}(\varphi_1)$.

Пусть $C^t=(a_1=c_0, c_1, \ldots, c_t=b_1)$ — одна из кратчайших цепей графа L, соединяющих вершины a_1 и b_1, и пусть $\varphi_2=\tilde{\varphi}_1(a_1, [0, 0])$. Очевидно, $\varphi_2 \in \vec{S}_k(L)$ и

$$L^+(\varphi_2)=(L^+(\varphi_1)\setminus\{a_1\})\cup\Gamma_1[a_1, L].$$

Пользуясь соотношением (2), можно удалить из $L^+(\varphi_2)$ вершины множества $\Gamma_1[a_1, L]\setminus\{c_1\}$ (при этом новые антитупиковые вершины не появятся) и получить ориентацию $\varphi_3 \in \vec{S}_k(L)$, для которой

$$L^+(\varphi_3)=(L^+(\varphi_1)\setminus\{a_1\})\cup\{c_1\},$$

что невозможно, так как $\varphi_3 \in \Phi$ и $d(c_1, b_1)<d(a_1, b_1)$. Полученное противоречие доказывает (4).

Допустим, что импликация (а) $\Rightarrow$ (б) не верна. Тогда существует ребро $(cd)\in U$ такое, что для вершины c имеется ориентация $\varphi_4 \in \vec{S}_k(L)$, при которой c — единственная антитупиковая вершина, а для вершины d такой ориентации нет. Точно таким же образом, как из ориентации φ_1 была получена ориентация φ_3, мы из ориентации φ_4 получим ориентацию φ_5, при которой

$$L^+(\varphi_5)=(L^+(\varphi_4)\setminus\{c\})\cup\{d\}=\{d\}$$

вопреки предположению.

Итак, импликация (а) $\Rightarrow$ (б) верна. Импликация же (б)$\Rightarrow$(а) очевидна*.

Докажем, что имеет место

Т е о р е м а 2: $\forall k\geqslant 2(S_k=B_k\cap\Lambda_{2k})$.

Очевидно, для любого целого $k\geqslant 2$ имеет место

$$S_k\subseteq B_k\cap\Lambda_{2k}.$$

Соотношение

$$B_k\cap\Lambda_{2k}\subseteq S_k$$

верно для однореберных графов. Допустим, что оно верно для всех графов с числом ребер не более $m-1$ и пусть $L=(X, U)\in B_k\cap\Lambda_{2k}$ содержит m ребер ($m\geqslant 2$). Возможны следующие случаи:

1) В L существует элементарная цепь $C=(c_0, c_1, \ldots, c_k)$. Удалив ее, получим граф $L_1=(X_1, U)\in\Lambda_{2k}\cap B_k$ с $|U_1|<m-1$. В силу предположения индукции, $L_1\in S_k$. Пользуясь теоремой 1, дадим графу L_1 такую ориентацию $\psi\in\vec{S}_k(L_1)$, при которой $c_0\in L_1^{+k}(\psi)$. Ориентируя ребра графа L как при ориентации ψ, а ребра (c_i, c_{i+1}) ($i\in\in[0, k-1]$)- от c_i, получим k-базирующую ориентацию для графа L.

2) В L нет элементарной цепи длины более $k-1$. Придадим графу L какую-нибудь слабо k-базирующую ориентацию. Докажем, что полученный граф $\vec{L}$ не может быть бисвязным.

При $k=2$ это утверждение доказано Бержем ([2], стр. 136). Допустим, что оно справедливо при $k\leqslant t-1$, где $t\geqslant 3$, и пусть $\vec{H}$ — — слабо t-базируемо ориентированный граф, причем в H нет элементарных цепей длины t. Предположим, что H — бисвязный. Так

* Из доказанной теоремы при $k=2$ получается теорема 1 работы [7].

как H — слабо $(t-1)$ - базируемый, то по предположению индукции в нем имеются элементарные цепи длины $t-1$. Стягивая по одной дуге во всех элементарных цепях длины $t-1$, получим бисвязный слабо $(t-1)$-базируемый граф, все элементарные цепи которого имеют длины не более $t-2$. Полученное противоречие с предположением индукции доказывает наше утверждение.

Если в $\vec{L}$ нет орциклов, то $L \in S_k$. Если же орцикл есть, то, орстянув в точку $c \notin X$ одну из бикомпонент $\vec{G}=(Z, \vec{W})$, получим граф $\vec{L}_2=(X_2, \vec{U}_2)$ с $1<|U_2|<m-1$. Легко заметить, что $L_2 \in \Lambda_{2k} \cap B_k$ и $G \in \Lambda_{2k} \cap B_k$. Следовательно, по предположению индукции, $L_2 \in S_k$ и $G \in S_k$.

Пусть $\psi \in \vec{S}_k(G)$ и ориентация $\psi_2 \in \vec{S}_k(L_2)$ такова, что $c \in L_2^{+k}(\psi)$. Ориентируя ребра из $U \setminus W$ (из W) так, как при ориентации ψ_2 (соответственно ψ_1), получим k-базирующую ориентацию для графа L. Теорема доказана*.

Используя соотношение (1) легко убедиться, что справедлива

Лемма 1: Пусть $k \geqslant 2$ и $j \geqslant 0$ — любые целые;

$L(\varphi)$ — произвольный k-базируемо ориентированный граф,

$$Y \subseteq L^{+(j+1)}(\varphi).$$

Тогда $L(\bar{\varphi}(Y, [0, j])) \in \vec{S}_k$.

Замечание: $\forall L \forall k \geqslant 2 \forall \varphi (\varphi \in \vec{S}_k(L) \Longleftrightarrow \bar{\varphi} \in \vec{S}_k(L))$.

Следствие: Пусть $k \geqslant 2$, $j \geqslant 1$ и $i \in [0, j]$. Переориентируя в произвольном k-базируемо ориентированном графе $L(\varphi)$ все дуги, удаленные от любого множества $Y \subseteq L^{+j}(\varphi)$ более чем на $i-1$, получим k-базируемо ориентированный граф.

Действительно, при $i=0$ имеем

$$\bar{\varphi}(Y, [0, \infty)) = \bar{\varphi} \in \vec{S}_k(L).$$

Если же $i>0$, то в силу леммы 1 и замечания к ней

$$\bar{\varphi}(Y, [i, \infty)) = \overline{\bar{\varphi}(Y, [0, i-1])} \in \vec{S}_k(L).$$

В работе [4] доказано

Предложение 1: Если граф $L'=(X', U')$ полученный из $L=(X, U) \in \Lambda_4$ удалением какой-нибудь вершины a степени $\rho(a) \leqslant 2$, является сильно базируемым, то сильно базируемым, будет и граф $L=(X, U)$.

Докажем, что имеет место

Лемма 2: $\forall k \geqslant 1 (\forall L = (X, U) \in S_k \cap \Lambda_k \forall a \in X (S_a^{+3}(L) \neq \varnothing) \Longrightarrow \Lambda_k \subset S)$.

Для $k \in [1, 5]$ утверждение леммы верно в силу ложности посылки.

Допустим, что лемма не верна, т. е.

---

* Из доказанной теоремы при $k=2$ получается теорема 1 работы [3].

$\exists k \geqslant 6[\forall L=(X, U) \in \Lambda_k \cap S \forall a \in X(\vec{S}_a^{+3}(L) \neq \varnothing) \& \exists H=(Y, V) \in \Lambda_k \cap \bar{S}_c]$.

Пусть $y_1 y_2 \in V$ — произвольное ребро графа H и $y_3 \notin Y$.

Обозначим

$$H_1=(Y \cup \{y_3\}, (V \setminus \{y_1 y_2\}) \cup \{y_1 y_3,\ y_2 y_3\}).$$

По предложению 1, $H_1 \in \Lambda_k \cap S$. Следовательно, по условию доказываемой леммы, существует ориентация $\varphi \in \vec{S}_{y_3}^{+3}(H_1)$.

Ориентируя ребро $y_1 y_2$ произвольным образом, а все остальные ребра H так, как при ориентации φ, получим сильно базирующую ориентацию для H, вопреки допущению.

Заметим, что поставленная П. Эрдешем [5] задача о нахождении графа из $\Lambda_5 \setminus S$ пока не решена. Следующая теорема может быть полезной при решении этой задачи.

Теорема 3. Следующие высказывания равносильны:

(1) Для произвольной вершины $a \in X$ любого графа $L=(X, U) \in \Lambda_6 \cap S$ имеет место $\vec{S}_a^{+3}(L) \neq \varnothing$.

(2) Для произвольной вершины $a \in X$ любого графа $L=(X, U) \in \Lambda_6$ справедливо $\vec{S}_a^{+3}(L) \neq \varnothing$.

(3) Для произвольной вершины $a \in X$ любого графа $L=(X, U) \in \Lambda_r$, $r \geqslant 6$ имеет место $S_a^{+\left[\frac{r}{2}\right]}(L) \neq \varnothing$.

(4) Для любого графа $L=(X, U) \in \Lambda_r$, где $r \geqslant 6$, для любого числа q, где $q \in [2, r-4]$ и $\operatorname{rest}(q, 2) \geqslant \operatorname{rest}(r, 2)$*, для любого подмножества $Y \subseteq Z$, где

$$Z=\{x \in X / \forall y, z \in Z(d(y, z) \geqslant q)\},$$

справедливо $\vec{S}_Y^{+\left[\frac{q}{2}\right]}(L) \neq \varnothing$.

(5) Для любой вершины $a \in X$ произвольного графа $L=(X, U) \in \Lambda_r$, где $r \geqslant 6$, для любого числа q, где $q \in [2, r-4]$ и $\operatorname{rest}(q, 2) \geqslant \operatorname{rest}(r, 2)$, для любого подмножества $Y \subseteq Z$, где

$$Z=\left\{x \in X / d(a, x) \geqslant \left[\frac{r}{2}\right]+\left[\frac{q}{2}\right]+1 \ \& \ \forall y, z \in Z(d(y, z) \geqslant q)\right\},$$

справедливо $\vec{S}_a^{+\left[\frac{r}{2}\right]}(L) \cap \vec{S}_Y^{+\left[\frac{q}{2}\right]}(L) \neq \varnothing$.

(6) В любом графе $L=(X, U) \in \Lambda_r$, где $r \geqslant 6$, стягиванием всех ребер, инцидентных произвольной вершине $a \in X$, получается сильно базируемый граф.

(1)$\Rightarrow$(2) следует из леммы 2.

(2)$\Rightarrow$(3) докажем индукцией по числу r. Для $r=6$ утверждение тривиально. Допустим, что оно верно для всех $r \in [6, p]$, где $p \geqslant 6$, и пусть $L=(X, U) \in \Lambda_{p+1}$.

Если число p четное, то утверждение следует из предположения индукции.

* rest (m, n) означает остаток от деления числа m на n.

Пусть число p нечетное и $a\in X$ — произвольная вершина. Докажем, что $S_a^{+}\left[\frac{p+1}{2}\right](L)\neq\varnothing$.

Пусть граф L_1 получен из L стягиванием всех ребер, инцидентных вершине a. Ясно, что $L_1\in\Lambda_{p-1}$ и $p-1\in[6, p]$. По предположению индукции,

$$\exists\varphi\in\vec{S}_a^{+}\left[\tfrac{p-1}{2}\right](L_1).$$

Ориентируя ребра графа L как при ориентации φ и так, чтобы вершина a была антитупиком, получим сильно базируемо ориентированный граф $\vec{L}=(X, \vec{U})$, в котором a является $\left[\frac{p+1}{2}\right]$ - антитупиком.

(3)$\Rightarrow$(4). При $Y=\varnothing$ утверждение тривиально. Пусть числа r, q и множество $Y=\{x_1, \ldots, x_p\}$, $p\geqslant1$, удовлетворяют условиям высказывания (4).

Обозначим $l=\left[\frac{r}{2}\right]-\left[\frac{q}{2}\right]-1$. Пусть далее,

$$\forall i\in[1, p]\,\forall j\in[1, l](x_j^i\overline{\in}X),\ x_0\overline{\in}X$$

и граф L_1 получен из L соединением вершины x_0 с вершинами x_i, (где $i\in[1, p]$) непересекающими цепями $(x_0\, x_1^i \ldots x_e^i\, x_i)$.

Длины циклов графа L_1 проходящих через x_0, не меньше $2\left(\left[\frac{r}{2}\right]-\left[\frac{q}{2}\right]\right)+q$. Последнее выражение при справедливости соотношения $\operatorname{rest}(q, 2)\geqslant\operatorname{rest}(r, 2)$ не меньше r. Следовательно, $L_1\in\Lambda_r$ и, на основании (3), $\exists\varphi\in\vec{S}_{x_0}^{+}\left[\frac{r}{2}\right](L_1)$.

Обозначим $\vec{L}_1=L_1(\varphi)$. Для завершения доказательства импликации (3)$\Rightarrow$(4) достаточно заметить, что ориентация графа $\vec{L}_1(X)$ принадлежит множеству $\vec{S}_Y^{+}\left[\frac{q}{2}\right](L)$.

(4)$\Rightarrow$(1). Пусть $L=(X, U)\in\Lambda_6$, $a\in X$ — произвольная вершина, $q=2$ и $Y=\{a, \Gamma_2[a, L]\}$. Согласно высказыванию (4), $\exists\varphi\in\vec{S}_Y^{+1}(L)$. Из леммы 1 и следствия из нее вытекает, что ориентации $\varphi_1=\bar{\varphi}(\Gamma_2[a, L], [0, 0])$ и $\bar{\varphi}_1(a, [2, \infty))$ сильно базирующие. Легко заметить, что

$$\bar{\varphi}_1(a, [2, \infty))\in\vec{S}_a^{+2}(L).$$

(3)$\Rightarrow$(5). При $Y=\varnothing$ утверждение тривиально. Пусть числа r, q и множество $Y=\{x_1, \ldots, x_p\}$, $p\geqslant1$, удовлетворяют условиям высказывания (5). Пусть $a\in X$ — произвольная вершина графа $L=(X, U)\in\Lambda_r$ и граф L_1 получен из L соединением вершины a со всеми вершинами Y непересекающимися цепями длины $\left[\frac{r}{2}\right]-\left[\frac{q}{2}\right]$.

Длины циклов графа L_1, проходящих через вершину a, не меньше, чем

$$\min\left\{\left[\frac{r}{2}\right]+\left[\frac{r}{2}\right]+1,\quad 2\left(\left[\frac{r}{2}\right]-\left[\frac{q}{2}\right]\right)+q\right\}.$$

Последнее выражение при справедливости соотношения $\mathrm{rest}(q, 2)\geqslant \geqslant \mathrm{rest}(r, 2)$ не меньше r. Следовательно, $L_1 \in \Lambda_r$ и, согласно (3), $\exists \varphi \in \in \vec{S}_a^{+}\left[\frac{r}{2}\right](L_1)$.

Обозначим $\vec{L}_1 = L_1(\varphi)$. Ясно, что ориентация графа $\vec{L}_1(X)$ принадлежит множеству

$$\vec{S}_a^{+}\left[\frac{r}{2}\right](L) \cap \vec{S}_j^{+}\left[\frac{q}{2}\right](L).$$

(5)$\Longrightarrow$(6). Пусть $L=(X, U)\in\Lambda_r$, $r\geqslant 6$, $a\in X$ — произвольная вершина и $L_1=(X_1, U_1)$ — граф, получающийся из L стягиванием всех ребер, инцидентных вершине a. Из высказывания (5) следует, что $\exists\varphi\in\vec{S}_a^{+}\left[\frac{r}{2}\right](L)$. Стягивая все дуги орграфа $L(\varphi)$, инцидентные вершине a, получим сильно базируемо ориентированный граф $\vec{L}_1 = =(X_1, \vec{U}_1)$.

(6)$\Longrightarrow$(2). Пусть a — произвольная вершина графа $L=(X, U)\in \in\Lambda_6$, и граф L_1 получен из L стягиванием всех ребер, инцидентных a. Из высказывания (6) следует, что L_1 сильно базируем. По теореме 1, $\exists\varphi\in S_a^{+2}(L_1)$.

Ориентируя ребра графа L как при ориентации φ и так, чтобы вершина a была антитупиком, получим сильно базируемо ориентированный граф $\vec{L}=(X, \vec{U})$, в котором a является 3-антитупиком. Теорема доказана.

Для любых целых $k\geqslant 2$ и $p\geqslant 11$ определим $(4k+3)$-вершинный граф M_{4k+3} и p-вершинный граф $\tilde{M}_p$ следующим образом:

$$M_{4k+3}=(\{a_0\}\cup\bigcup_{i=1}^{2k+1}\{b_i, c_i\};\ \{c_1 c_{2k+1}\}\cup\{c_1 b_{2k+1}\}\cup\{a_0 b_{2k+1}\}\cup$$

$$\cup\{b_1 c_{2k+1}\}\cup\bigcup_{i=1}^{2k}(\{c_i c_{i+1}\}\cup\{b_{i+1} c_i\}\cup\{a_0 b_i\}\cup\{b_i c_{i+1}\})).$$

Граф $\tilde{M}_p$ при нечетном p получается из M_{2p-11} склеиванием подмножества $(b_2, b_4, \ldots, b_{p-9})$ в одну вершину b_2 и подмножества $(b_3, b_5, \ldots, b_{p-8})$ в одну вершину b_3, а также удалением параллельных ребер. При четном p граф $\tilde{M}_p$ получается из $\tilde{M}_{p+1}$ склеиванием вершин (b_1, b_{p-6}) в b_1 и удалением параллельных ребер.

В работе [3] показано, что имеет место

Предложение 2: а) $\forall k\geqslant 2\,(M_{4k+3}\in\vec{S}_c^{4k+3})$, б) $\forall p \geqslant 11(\tilde{M}_p \in \bar{S}_c^p)$.

Известные до сих пор критические не сильно базируемые графы [3, 6] имеют радиус 2. Это давало надежду на существование эффективного алгоритма для проверки графов на сильную базируемость. Действительно, если доказать, что радиус любого графа из $\bar{S}_c$ не более k, то для проверки графов на сильную базируемость достаточно проверить k-окружения всех его вершин. Следовательно, возникает вопрос: для каких значений r существует граф из $\bar{S}_c$ с радиусом r?

Пусть дан граф $L=(\{x_1, \ldots, x_n\}, U)$, где $\Gamma_1[x_1, L]=\{x_{n-2}, x_{n-1}, x_n\}$. На ребрах $x_1 x_j \in U$, $j \in [n-2, n]$, поставим по одной вершине x_{j+3} и добавим ребра $x_{n+1} x_{n-1}$, $x_{n+2} x_n$, $x_{n+3} x_{n-2}$. Полученный граф назовем расширением графа L относительно вершины x_1 и обозначим через $L_{x_1, 1}=L[x_1, 1]$.

Положим, далее, $L[x_1, k]=L_{x_1, k-1}[x_1, 1]$, где $k \geqslant 2$, и $L[x, 0]=L$.

Через $\bar{S}_c(k, r)$ обозначим класс графов из $\bar{S}_c$ степени k и радиуса r.

Следующая теорема дает ответ на поставленный вопрос.

Теорема 4. 1) $\bar{S}_c(2, 1)=\{c_2, c_3\}$,

2) $\forall k \geqslant 3(\bar{S}_c(k, 1)=\varnothing)$,

3) $\forall k \in [2, 3] \forall r \geqslant 2(\bar{S}_c(k, r)=\varnothing)$,

4) $\forall k \geqslant 4(\bar{S}_c(k, 2) \neq \varnothing)$,

5) $\forall k \geqslant 5 \forall r \geqslant 2(\bar{S}_c(k, r) \neq \varnothing)$.

Переходя к доказательству, напомним [6], что имеет место

Предложение 3: Если хроматическое число графа меньше его обхвата, то граф сильно базируем.

Утверждения 1) и 2) очевидны, утверждение 3) следует из теоремы Брукса [см. 1] и предложения 3, а утверждение 4) конструктивно доказано в пункте б) предложения 2 (т. к. $\tilde{M}_{2k+4} \in \bar{S}_c(k, 2)$).

Для доказательства утверждения 5) сначала покажем, что

$$L=(X, U) \in \bar{S}_c \rightarrow \forall k \geqslant 0 \forall x \in X(\rho(x)=3 \rightarrow L[x, k] \in \bar{S}_c) \qquad (*)$$

Соотношение (*) достаточно доказать для $k=1$.

а) Докажем, что $L_1=(X_1, U_1)=L[x, 1] \notin S$.

Допустим противное, т. е. что $L_1 \in S$. По теореме 1, $\exists \varphi \in \vec{S}_x^{+2}(L_1)$. Ориентируя ребра графа L как при ориентации φ, а ребра, инцидентные вершине x, —от нее, получим сильно базируемо ориентированный граф $\vec{L}=(X, \vec{U})$.

Полученное противоречие доказывает пункт а).

б) Докажем, что удалением любого ребра из L_1 получается граф класса S.

Пусть $yz\in U_1$ и $L_2=(X_1, U_1\setminus\{yz\})$.

б1) $d(x,\{yz\})>1$.

Пусть $L_3=(X, U\setminus\{yz\})$ и $\varphi\in\vec{S}_x^{+2}(L_3)$. Ориентируя ребра графа L_2 как при ориентации φ и так, чтобы вершина x была 2-антитупиком, получим сильно базируемо ориентированный граф $\vec{L}_2$.

б2) $d(x,\{yz\})\leqslant 1$.

Ясно, что удалением вершин степени 2 из L_2 можно получить сильно базируемый граф $L(X\setminus\{x\})$. По предложению 1, граф L_2 сильно базируем.

Соотношение (*) доказано. Пользуясь этим соотношением, легко показать, что

$$\forall k\geqslant 5\,\forall r\geqslant 2(\bar{M}_{2k+4}[b_{2k-1}, 2(r-2)]\in\bar{S}_c(k, r)).$$

Теорема доказана.

Կ. Մ. ՄՈՍԵՍՅԱՆ

k-ԲԱԶԻՍԱՑՎՈՂ ԳՐԱՖՆԵՐ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում են k-բազիսացվող և թույլ k-բազիսացվող գրաֆների դասերը: Ապացուցվում են՝

Թեորեմ 1: *$L=(X, U)$ գրաֆը k-բազիսացվող է միայն և միայն այն ժամանակ, երբ կամայական $a\in X$ գագաթի համար գոյություն ունի այնպիսի k-բազիսային φ կողմնորոշում, որի դեպքում L գրաֆում a գագաթից սկսվող բոլոր k-երկարության պարզ շղթաները $L(\varphi)$ գրաֆում կողմնորոշված են a-ից և $X\setminus\{a\}$ բազմության յուրաքանչյուր գագաթի համար կա այդ գագաթը մտնող աղեղ:*

Թեորեմ 2: *Գրաֆը k-բազիսացվող է միայն և միայն այն ժամանակ երբ թույլ k-բազիսացվող է և չունի 2k-ից փոքր երկարության ցիկլեր:*

Ապացուցվում է նաև 2-բազիսացվող գրաֆներին վերաբերող վեց տարբեր ասույթների համարժեքությունը և կամայական $k\geqslant 5$, $r\geqslant 2$ ամբողջ թվերի համար կառուցվում է k-աստիճանով և r-շառավղով ոչ 2-բազիսացվող գրաֆներ, որոնք 2-բազիսացվող են դառնում կամայական կողը հեռացնելիս:

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Зыков.* Теория конечных графов, I, «Наука», Новосибирск, 1969.
2. *К. Берж.* Теория графов и ее применение, ИЛ, М., 1962.
3. *К. М. Мосесян.* Базисные графы некоторых упорядочений, ДАН Арм. ССР, т. LVII, № 5, (1973).
4. *К. М. Мосесян.* О сильно базируемых графах, ДАН Арм. ССР, т. LIV, № 3 (1972).
5. *P. Erdos.* Combinatorial Mathemetics and its Applications. Proc. Conf. Math. Oxford, July 1969; ed. by Welsh D. J. A. 1971 AP, London & New-York, p. 99.
6. *C. E. Haff, U. S. R. Murty, R. C. Wilton.* A note on undirected graphs realizable as p. o. sets. Can. Math. Bull., 1970, 13, No. 3, 371—374.
7. *К. М. Мосесян.* Базируемые и сильно базируемые графы, ДАН Арм. ССР, т. LV, № 2 (1972).