П. Г. АЛЕКСАНЯН

О ГИПОТЕЗЕ ХАРАРИ

В настоящей работе рассматривается реберная гипотеза Улама (гипотеза Харари) и доказывается ее справедливость для некоторых классов графов. Дадим список обозначений для дальнейшего использования.

1. $\exists!$ — существует единственный.
2. N — множество натуральных чисел.
3. $f(X \prec\!\!-\!\!\succ Y)$ — взаимно-однозначное отображение f множества X на множестве Y.

Для связного графа $G=(X(G), U)$ обозначим

$$M^G=\{P_{ij}=(x_i, x_j)/x_i, x_j \in X(G) \& (x_i, x_j) \notin U\}$$

$$L_G=\{G_k=(X(G_k), U_k)/\forall k \exists f_k(M^G \prec\!\!-\!\!\succ M^{G_k})(\forall P_{ij} \in M^G(G \cup P_{ij} \cong G_k \cup f_k(P_{ij}))\}$$

(под $G \cup P_{ij}$ понимается граф, полученный добавлением ребра $P_{ij}=(x_i, x_j)$ в графе G). Легко заметить, что справедливы следующие леммы.

Лемма 1. $\forall G \forall G_i, G_j \in L_G\ (\max\limits_{x \in X(G_i)} \rho(x)=\max\limits_{y \in X(G_j)} \rho(y) \& \min\limits_{x \in X(G_i)} \rho(x)=\min\limits_{y \in X(G_j)} \rho(y) \&$
$\& \forall k(\min\limits_{x \in X(G_i)} \rho(x) \leqslant k \leqslant \max\limits_{x \in X(G_i)} \rho(x))$
$(|\{x/x \in X(G_i) \& \rho(x)=k\}|=|\{y/y \in X(G_j) \& \rho(y)=k\}|))$.

Лемма 2. $\forall G \forall G_i, G_j \in L_G \forall k, l \in N(k, l \leqslant |x(G_i)|)((x_k, x_l) \in M^{G_i} \Rightarrow$
$\Rightarrow \{\rho(x_k), \rho(x_l)\}=\{\rho(y_k), \rho(y_l)\})$ где $(y_k, y_l)=f_{ij}(x_k, x_l)$.

Из леммы 1 следует:

Теорема 1. $\forall G \forall G_i, G_j \in L_G(\exists m, n \in N\ (m, n \leqslant |X(G_i)| \&$
$\&(x_m, x_n) \notin U_i) \forall i, j \in N(i, j \leqslant |X(G_i)| \& (x_i, x_j) \in U_i)$
$(\rho(x_m)+\rho(x_n)+1 \notin \{\rho(x_i)+\rho(x_j), \rho(x_i)+\rho(x_j)-1\}) \Rightarrow G_i \cong G_j)$.

Следствие 1. 1. $\forall G \forall G_i, G_j \in L_G((\exists m, n \in N$

$$((x_m, x_n) \notin U_i) \& \rho(x_m)=\rho(x_n)=\max_{x \in X(G_i)} \rho(x)) \Rightarrow G_i \cong G_j).$$

Лемма 3. $\forall G \forall G_i, G_j \in L_G \exists f_{ij}(M^{G_i} \leftarrow\!\!-\!\!\rightarrow M^{G_j})$
$\forall k, l \in N(k, l \leqslant |X(G_i)|)((P_{kl} \in M^{G_i}) \Rightarrow (G_i \cup P_{kl} \cong G_j \cup f_{ij}(P_{kl})))$.

Теорема 2. $\forall G \forall G_i, G_j \in L_G((|X(G_i)| \geqslant 8 \& \max\limits_{x \in X(G_i)} \rho(x) \leqslant |\{x/x \in X(G_i) \&$
$\& \rho(x)=\max\limits_{y \in X(G_i)} \rho(y)\}|) \Rightarrow G_i \cong G_j)$.

Доказательство. Пусть $\max\limits_{x \in X(G_i)} \rho(x)=l$ и $|\{x/x \in X(G_i) \& \rho(x)=l\}|=l_1$.

Рассмотрим следующие возможные случаи. a) $l < l_1 - 1$ b) $l = l_1 - 1$ c) $l = l_1$. По теореме Ловаса [2] достаточно рассматривать случай $l \geqslant |X(G_i)|/2$.

a) Из $l < l_1 - 1$ следует, что в графе G_i существуют вершины x_1, x_2 такие, что $\rho(x_1) = \rho(x_2) = l$ и $(x_1, x_2) \notin U_i$. Отсюда и из следствия 1. 1 получим $G_i \cong G_j$.

b) Из $l = l_1 - 1$ следует, что существуют вершины $x_1, x_2 \in X(G_i)$ такие, что $\rho(x_1) = \rho(x_2) = l$ и $(x_1, x_2) \notin U_i$, или G_i есть l-регулярный граф, из чего легко получить, что $G_i \cong G_j$.

c) Достаточно рассматривать только случай, когда не существуют вершины x_1, x_2 такие, что $\rho(x_1) = \rho(x_2) = l$ и $(x_1, x_2) \notin U_i$.

Пусть $\overline{N} = \{x / x \in X(G_i) \,\&\, \rho(x) = l\}$, а вершина $x \in X(G_i)$ такая, что $\rho(x) = \max\limits_{y \in X(G_i) \setminus \overline{N}} \rho(y)$.

Очевидно, существует вершина $x_1 \in \overline{N}$ такая, что $(x, x_1) \notin U_i$. Следовательно, при $\rho(x) < l - 1$ имеем $G_i \cong G_j$.

Пусть $\rho(x) = l - 1$, $N^0 = \{x / x \in X(G_i) \,\&\, \rho(x) = l - 1\}$ а x_0—произвольная вершина из множества N^0. Очевидно, существует вершина $x_1 \in \overline{N}$ такая, что $(x_0, x_1) \notin U_i$. Если при всяком изоморфизме $f^0\colon G_i \cup (x_0, x_1) \cong G_j \cup f_{ij}(x_0, x_1)$ имеет место $f^0(x_0) \neq y_0$ (допускается, что $f_{ij}(x_0, x_1) = (y_0, y_1) \,\&\, \rho(y_0) = l - 1$), то $|\Gamma_x \cap \overline{N}| \geqslant l - 2$. Для любой вершины $x' \in N^0$ обозначим: $T_{x'} = \{x_i / x_i \in \overline{N} \,\&\, (x_i, x') \notin U_i\}$.

Если для любой вершины $x' \in N^0$ и для любой вершины $x_0 \in T_{x'}$, при всяком изоморфизме $f_x\colon G_i \cup (x', x_0) \cong G_j \cup f_{ij}(x', x_0)$ (пусть $f_{ij}(x', x_0) = (y', y_0)$ и $\rho(y') = \rho(x')$) имеет место $f_x(x') \neq y'$, то $l \geqslant |N_0|(l-2)$, т. е. $l \leqslant \dfrac{2|N_0|}{|N_0| - 1}$. Если $|N_0| \geqslant 3$, то получим противоречие, следовательно, $|N_0| < 3$.

Рассмотрим следующие два возможных случая. 1) $|N_0| = 2$; 2) $|N_0| = 1$.

1) Из $|N_0| = 2$ следует, что $l \leqslant 4$. Достаточно рассматривать случай, когда $l = 4$. Пусть $N_0 = \{x_i, x_j\}$, а вершина x такая, что $\rho(x) = \max\limits_{y \in X(G_i) \setminus (\overline{N} \cup \{x_i, x_j\})} \rho(y)$. Если $\rho(x) < l - 2$ т. е. $\rho(x) = 1$, то легко доказать, что $G_i \cong G_j$.

Пусть $\rho(x) = l - 2$. Очевидно, что для любого элемента $x_1 \in \overline{N}$ $(x, x_1) \notin U_i$ и при всяком изоморфизме $f^0\colon G_i \cup (x, x_1) \cong G_j \cup f_{ij}(x, x_1)$ (пусть $f_{ij}(x, x_1) = (y, y_1)$ и $\rho(x) = \rho(y)$) имеет место $f^0(x) = y$. Отсюда получим $G_i \cong G_j$. Если $\rho(x) = l - 1$ то $G_i \cong (X^0, U^0)$, где $X^0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $U^0 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 6), (3, 5), (4, 6), (5, 6), (3, 4)\}$. Отсюда легко заметить, что $G_i \cong G_j$.

2) Пусть $N_0 = \{x_i\}$, и $\rho(x) = \max\limits_{y \in X(G_i) \setminus (\overline{N} \cup \{x_i\})} \rho(y)$.

Если $\rho(x) < l - 2$, то легко доказать, что $G_i \cong G_j$. Пусть $\rho(x) = l - 2$

а вершина $x_1 \in \overline{N}$ такая, что $(x_1, x) \notin U_i$. Если существует изоморфизм $\sigma: G_i \cup (x_1, x) \cong G_j \cup f_{ij}(x_1, x)$ (допускается, что $f_{ij}(x_1, x) = (y_1, y)$ и $\rho(y) = \rho(x)$) такой, что $\sigma(x) = y$, то легко заметить, что $G_i \cong G_j$. Пусть при всяком изоморфизме $\sigma': G_i \cup (x_1, x) \cong G_j \cup f_{ij}(x, x_1)$ имеет место $\sigma'(x) \neq y$. Тогда, очевидно, $l \leqslant 5$. Рассмотрим следующие два возможные случая. a') $l=4$ и a'') $l=5$.

a') $l=4$

$$a_1') \ \exists x(x \in X(G_i) \& (\rho(x) = 2) \& \ (\forall x' \in \overline{N}, \ (x', x) \notin U_i)),$$

$$a_2') \ \forall x(x \in X(G_i) \& (\rho(x) = 2)) \exists x_1 \in \overline{N}((x, x_1) \in U_i).$$

a_1') Пусть $x \in X(G_i)$, $\rho(x) = 2$ и x_1 произвольная вершина из множества $\overline{N}$. Легко видеть, что при всяком изоморфизме $f^0: G_i \cup (x, x_1) \cong$ $\cong G_j \cup f_{ij}(x, x_1)$ (пусть $f_{ij}(x, x_1) = (y, y_1)$ и $\rho(x) = \rho(y)$) имеет место $f^0(x) = y$. Отсюда следует, что $C_i \cong C_j$.

a_2') Очевидно, $|\{x / x \in X(G_i) \& \rho(x) = 2\}| \leqslant 2$. Следовательно, $G_i \in \{G_r \cong$ $\cong (X^r, U^r)\}_{r=1}^{6}$, где

$X^1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $X^2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;

$X^4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;

$X^5 = X^3 = X^2$; $X^6 = X^4$;

$U_1 = \{(1, 2); (2, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (4, 10), (5, 6), (5, 8), (6, 10), (7, 10), (8, 9)\}$,

$U^2 = \{(1, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (2, 7), (1, 2), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (1, 4)\}$,

$U^3 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (5, 6), (6, 7)\}$,

$U^4 = \{(1, 2), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 8), (3, 4), (3, 5), (3, 8), (4, 5), (4, 8), (6, 7), (6, 8)\}$,

$U^5 = \{(1, 3), (1, 7), (2, 3), (2, 4), (2, 6), (2, 7), (3, 4), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (6, 7)\}$,

$U^6 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 7), (2, 3), (2, 4), (2, 8), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (5, 6), (7, 8)\}$. В рассмотренных случаях легко проверить, что $G_i \cong G_j$.

a'') Если $t = |\{x / x \in X(G_i) \& \rho(x) = 3\}| \geqslant 2$, то легко доказывается, что $G_i \cong G_j$. Пусть $t = 1$ и вершина x_0 такая, что $\rho(x_0) = 3$. Очевидно существует вершина $x_1 \in \overline{N}$ такая, что $(x_0, x_1) \notin U_i$. Если существует изоморфизм $\sigma: G_i \cup (x_0, x_1) \cong G_j \cup f_{ij}(x_0, x_1)$ такой, что $\sigma(x_0) = y_0$ (пусть $f_{ij}(x_0, x_1) = (y_0, y_1)$ и $\rho(y_0) = \rho(x_0)$) то, очевидно, $G_i \cong G_j$. Если при всяком изоморфизме $f: G_i \cup (x_0, x_1) \cong G_j \cup f_{ij}(x_0, x_1)$ имеет место $f(x_0) \neq y_0$, то для произвольной вершины $x_r \in X(G_i)$, для которой $\rho(x_r) \leqslant 2$, и для произвольной вершины $x_p \in \overline{N}$ имеет место $(x_r, x_p) \notin U_i$. Рассмотрим следующие два возможных случая: b') $\exists x_r \in X(G_i)(\rho(x_r) = 2)$ и b'') $\{x / x \in X(G_i) \& \rho(x) = 2\} = \varnothing$.

b') Пусть $x_r' \in X(G_i)$ и $\rho(x_r') = 2$. Легко заметитъ, что при $x_j \in \overline{N}$ и при всяком изоморфизме

$$\varphi_1 : G_i \cup (x_r', x_j) \cong G_j \cup f_{ij}(x_r', x_j)$$

(пусть $f_{ij}(x_r', x_j) = (y_r', y_j)$ и $\rho(x_j) = \rho(y_j)$) имеет место $\varphi(x_r') = y_r'$. Отсюда легко доказать, что $G_i \cong G_j$.

b'') Пусть существует вершина $x \in X(G_i)$ такая, что $\rho(x) = 1$. Очевидно, для всякой вершины $x_r \in \overline{N}$ и при всяком изоморфизме $f' : G_i \cup (x_1, x_r) \cong G_j \cup f_{ij}(x, x_r)$ (пусть $f_{ij}(x, x_r) = (y, y_r)$ и $\rho(x) = \rho(y)$) имеет место $f'(x) = y$. Отсюда получим $G_i \cong G_j$. Пусть $\{x / x \in X(G_i) \& \& \rho(x) = 1\} = \varnothing$. Тогда $G_i \cong (X, U)$, где

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $U = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,7), (4,5), (4,6), (4,7), (5,6), (5,7), (6,7)\}$. В этом случае очевидно, что $G_i \cong G_j$. Теорема доказана.

Теорема 3. $\forall G \forall G_i, G_j \in L_G((l_1 = |\{x / x \in X(G_i) \& \rho(x) = \max\limits_{y \in X(G_i)} \rho(y)\}| < < l = \max\limits_{x \in X(G_i)} \rho(x) < \dfrac{3l_1 - 5}{2}) \Rightarrow G_i \cong G_j)$.

Доказательство. Допустим, что $l_1 > \dfrac{n+5}{3}$, так как в противном случае из $l < \dfrac{3l_1 - 5}{2}$ получим $l < n/2$, при котором из теоремы Ловаса следует $G_i \cong G_j$. Пусть $\overline{N} = \{x / x \in X(G_i) \& \rho(x) = l\}$ и граф, порожденный на множестве $\overline{N}$ полный (в противном случае легко доказать, что $G_i \cong G_j$). Пусть $l - p = \min\limits_{x \in X(G_i)} \rho(x)$.

Достаточно рассматривать случай, когда для любого числа $i (l - p < i < l)$ в графе G_i существует вершина x такая, что $\rho(x) = i$. Пусть для любого числа $i (i < p)$ $K_{l-i} = |\{x / x \in X(G_i) \& \rho(x) = l - i)\}|$. Из неравенства (*) $\sum\limits_{i=1}^{l-2} K_{l-i}(l_1 - i - 1) > l_1(l - l_1 + 1)$ следует, что существуют вершины $x_0, x_1 \in X(G_i)$ такие, что $x_1 \notin \overline{N}$, $x_0 \in \overline{N}$, $(x_1, x_0) \notin U^i$ и при всяком изоморфизме $f' : G_i \cup (x_1, x_0) \cong G_j \cup f_{ij}(x_1, x_0)$ (пусть $f_{ij}(x_1, x_0) = (y_1, y_0)$ и $\rho(x_0) = \rho(y_0)$) имеет место $f'(x_1) = y_1$. Отсюда получим $G_i \cong G_j$. Легко доказать также, что из неравенства $l < \dfrac{3l_1 - 5}{2}$ следует неравенство (*). Теорема доказана.

Будем использовать обозначения предыдущих теорем.

Теорема 4. $\forall G \forall G_i, G_j \in L_G((l_1 = 1 \ \& \ l <]p/2[) \Rightarrow G_i \cong G_j)$.

Доказательство. Из $l <]p/2[$, следует, что существуют вершины x_0, x_1 такие, что $x_1 \notin \overline{N}$, $x_0 \in \overline{N}$, $(x_0, x_1) \notin U_i$, и при всяком изоморфизме $f' : G_i \cup (x_1, x_0) \cong G_j \cup f_{ij}(x_1, x_0)$ (пусть $f_{ij}(x_0, x_1) = (y_0, y_1)$ и $\rho(x_0) = \rho(y_0)$) имеет место $f'(x_1) = y_1$. Следовательно, $G_i \cong G_j$. Теорема доказана.

Теорема 5. $\forall G \forall G_i, G_j \in L_G((l_1=1 \;\&\; l<K_{l-1}) \Rightarrow G_l \cong G_j)$.

Доказательство очевидно.

Для каждого связного графа $G=(X(G), U)$ определим класс графов.

$$\overline{L}_G=\{G_k=(X_k, U_k)/\forall k \exists f_k(U \leftarrow\rightarrow U_k)(\forall p \in U(G \setminus p \cong G_k \setminus f_k(p)))\}.$$

Легко заметить, что из теоремы 2 следует

Теорема 2. 1. $\forall G\ \forall G_i, G_j \in \overline{L}_G((|X(G_i)| \geqslant 8 \;\&$

$$1+\min_{x \in X(G_i)} \rho(x)+|\{x \in X(G_i)/\rho(x)=\min_{y \in X(G_i)} \rho(y)\}| \geqslant |X(G_i)|) \Rightarrow G_i \cong G_j).$$

ԱԼԵՔՍԱՆՅԱՆ Պ. Գ.

ՀԱՐԱՐԻԻ ՀԻՊՈԹԵԶԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

$G_1=(X_1, U_1)$, $G_2=(X_2, U_2)$ գրաֆների զույգը բավարարում է Հարարիի հիպոթեզի պայմաններին, եթե գոյություն ունի այնպիսի փոխմիարժեք համապատասխանություն $f: U_1 \rightarrow U_2$, որ ցանկացած $u \in U_1$ կողի համար $G_1 \setminus u \cong G_2 \setminus f(u)$։ Աշխատանքում ապացուցված է Հարարիի հիպոթեզի ճշտությունը այն գրաֆների համար, որոնց գագաթների թիվը մեծ չէ մինիմալ լոկալ աստիճան ունեցող գագաթների թվի և այդ աստիճանի գումարից։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ф Харари*. Теория графов, «Мир», М., 1973.
2. *L. Lovasz*, J. Combin. Theory, B 13, 309–310 (1972).