С. Г. ИНДЖЕЯН, З. А. КАРЕЯН, Ж. Г. НИКОГОСЯН

ЧИСЛО МИНИМАЛЬНОГО РЕБЕРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ m — ХРОМАТИЧНОГО ГРАФА НА n — РАСКРАШИВАЕМЫЕ ГРАФЫ *

В настоящей статье доказывается, что $]\log_n m[$ есть минимальное число реберно-непересекающихся n-раскрашиваемых подграфов, покрывающие данный m-хроматичный граф.

Пусть K_m — полный m-вершинный граф, $\chi(G)$ — хроматическое число графа G, $]l[$ — наименьшее целое число, не меньше l.

Через $\psi(G, n)$ обозначим минимальное число реберно-непересекающихся n-дольных подграфов, покрывающих данный граф G.

Под разложением графа будем понимать реберно-непересекающееся разложение.

Лемма 1. $\forall G \forall n \geqslant 2(\psi(G, n) \geqslant \log_n \chi(G))$

Доказательство проведем индукцией по числу $\psi(G, n)$. При $\psi(G, n) = 1$ утверждение очевидно. Допустим лемму верной для всех чисел $\psi(G, n)$, где $\psi(G, n) < p$ и докажем ее для $\psi(G, n) = p$.

Пусть $H_i = (V, X_i)$, где $i \in [1, p]$, минимальное разложение графа $G = (V, X)$ на n-дольные графы.

Рассмотрим граф $G' = (V, X \setminus X_p)$. По предположению индукции $\log_n \chi(G') \leqslant p-1$, т. е. G' является не более, чем n^{p-1} дольным графом. Легко заметить, что добавление ребер графа H_p к графу G' может разложить каждую долю графа G' не более чем на n независимых множеств, т. е. $\chi(G) \leqslant n^{p-1} n = n^p$.

Отсюда имеем $\log_n \chi(G) \leqslant p = \psi(G, n)$. Лемма доказана.

Лемма 2. $\forall m \geqslant 2(\psi(K_m, n) =]\log_n m[)$.

Доказательство. Сперва докажем, что $\psi(K_m, n) \leqslant]\log_n m[$. Доказательство проведем индукцией по числу m. При $m = 2$ утверждение очевидно. Предположим, что неравенство верно для всех чисел m, где $2 \leqslant m < p$ и докажем его для $m = p$. Пусть $K_p = (V, X)$. Разобъем V на n „почти равномощных“ подмножеств $V_1, V_2, \ldots, V_n$, так, чтобы для любого числа i, где $i \in [1, n]$, имеет место $|V_i| \leqslant \left]\frac{p}{n}\right[$.

Обозначим: $X_1 = \{(u, v) / u \in V_i; v \in V_j; i, j \in [1, n]$ и $i \neq j\}$. Подграф $G_1 = (V, X_1)$ является полным n-дольным графом. Подграф $G' =$

---

* Мы придерживаемся терминологии и обозначений, принятых у Харари [1].

$=(V, X \setminus X_1)$ состоит из компонент связности H_i, каждая из которых является не более чем $\left|\frac{p}{n}\right|$ вершинным полным графом. По предположению индукции H_i можно разложить на не более чем $\left]\log_n\left|\frac{p}{n}\right[\right[$ непересекающихся по ребрам n-дольных графов. Так как подграфы H_i и H_j при $i \neq j$ не пересекаются, то G' также можно разложить на не более чем $\left]\log_n\right]\frac{p}{n}\left[\right[$ непересекающихся по ребрам n-дольных графов. Следовательно, G можно разложить на не более чем $\left]\log_n\right]\frac{p}{n}\left[\right[+1=]\log_n p[$ непересекающихся по ребрам n-дольных графов, т. е. $\psi(K_p, n) \leqslant]\log_n p[$. Но по лемме 1 $\psi(K_m, n) \geqslant \geqslant \log_n \chi(K_m) = \log_n m$ и ввиду целочисленности ψ имеем $\psi(K_m, n) \geqslant \geqslant]\log_n m[$. Следовательно, $\psi(K_m, n) =]\log_n m[$. Лемма доказана.

Теорема. $\forall G \forall n \geqslant 2\ (\psi(G, n) =]\log_n \chi(G)[)$.

Доказательство. Пусть $G=(V, X)$ — произвольный m-хроматичный граф и $V = \bigcup\limits_{i=1}^{m} V_i$, где $V_i \cap V_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и каждое V_i независимое множество в графе G. Очевидно, что между любыми V_i и V_j, где $i \neq j$, существует ребро. Следовательно, графу G можно сопоставить полный m-вершинный граф K_m, вершинами которого являются сжатые множества V_i. Нетрудно заметить, что $\psi(G, n) \leqslant \psi(K_m, n) =]\log_n m[$. С другой стороны, по лемме 1 $\psi(G, n) \geqslant \geqslant \log_n \chi(G) = \log_n m$. Так как ψ — целое число, то $\psi(G, n) \geqslant]\log_n m[$ и, следовательно, $\psi(G, n) =]\log_n m[$.

Следствие. Граф является m-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда его можно разложить на $]\log_n m[$ не пересекающихся по ребрам n-дольных графов, где $n \geqslant 2$.

Замечание. Пример графа $G=(V, X)$, где $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_9\}$, $X=\left\{\left(\bigcup\limits_{i=1}^{8}(v_i, v_{i+1})\right) \cup \left(\bigcup\limits_{i=1}^{7}(v_i, v_{i+2})\right) \cup \{(v_1, v_7); (v_3, v_9)\}\right\}$, показывает, что рассматриваемое в работе разбиение не является матроидом для графа и, следовательно, известный алгоритм Эдмондса [2] не применим.

ԻՆՋԵՅԱՆ Ս. Գ., ԿԱՐԵՅԱՆ Զ. Ա., ՆԻԿՈՂՈՍՅԱՆ Ժ. Գ.

m-ԽՐՈՄԱՏԻԿ ԳՐԱՖԸ n-ՆԵՐԿԵԼԻ ԳՐԱՖՆԵՐԻ ԿՈՂԱՅԻՆ ՏՐՈՀՄԱՆ ՄԻՆԻՄԱԼ ԹԻՎԸ

Ամփոփում

Հոդվածում ապացուցվում է, որ ցանկացած m-*խրոմատիկ գրաֆը ծածկող, կողերով չհատվող* n-*ներկելի ենթագրաֆների մինիմալ թիվը հավասար է* $]\log_n m[$-*ի* $(m, n \geqslant 2)$, *որտեղից ստացվում է այսպիսի հետևանք. որպես-*

դի G գրաֆը լինի m-ներկելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն տրոհվի $]\log_n m[$ թվով կողերով չհատվող n-ներկելի ենթագրաֆների։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ф. Харари.* Теория графов, «Мир», М., 1973.
2. *J. Edmonds.* Minimum Partition of a matroid into independent subsets, J. Res. NBS 69 B, No. 1 and 2. 67—72, 1965.