

КОНСТРУКТИВНАЯ ЛОГИКА

Э. М. ПОГОСЯН, О. А. САРКИСЯН

ОБ ОДНОЙ ФОРМАЛИЗАЦИИ ИНДУКТИВНОГО ОБОБЩЕНИЯ

Введение

Индуктивным обобщением принято называть процесс получения описания исследуемого множества ситуаций по информации об отдельных элементах этого множества и, быть может, его дополнения до некоторого универсального множества.

Понятием называют произвольный алгоритм, распознающий какое-либо множество ситуаций из того же универсального множества.

В настоящей работе предлагается некоторая формализация процесса индуктивного обобщения в задаче формирования понятий, описывающих множества булевых векторов. В рамках этой формализации вводятся определенные критерии оценки эффективности работы алгоритмов индуктивного обобщения и относительно этих критериев производится оценка алгоритмов в условиях тех или иных ограничений на множества булевых векторов.

Работа состоит из трех параграфов.

В §1 определяются понятия индуктора—алгоритма индуктивного обобщения и сложности заданного множества булевых векторов относительно рассматриваемого класса индукторов. На основе этих понятий получается ряд общих свойств индукторов.

Для исследования практически интересных случаев процесса индуктивного обобщения в §2 приводится одна из интерпретаций этого процесса и в рамках этой интерпретации выделяются типы условий, при которых эффективность индуктивного обобщения может быть высокой.

В §3,4 исследуются возможности индукторов при некоторых типах условий, полученных в §2, в частности, когда индуктивное обобщение проводится для булевых функций, о которых заранее известно, что они принадлежат каким-либо заранее заданным классам функций (например, классу симметрических или монотонных функций).

В §5 показывается, что индукторы могут быть описаны посредством графов специального типа, и дается оценка числа абсолютизирующих индукторов.

Краткое изложение первых четырех параграфов работы опубликовано в [8].

Многие из понятий, используемых в настоящей работе, идейно близки понятиям, ранее введенным другими авторами. Так, понятие сложности множества булевых векторов относительно индуктора аналогично определению сложности числа относительно рекурсивной функции, введенное А. Н. Колмогоровым [1], понятие индуктора во многом сходно с алгоритмами индуктивного вывода Э. Ханта [2] и прогнозирующими стратегиями Я. М. Барздиня [7].

В данной работе мы стремились найти формальное описание процесса индуктивного обобщения, приемлемое с точки зрения содержательной трактовки задачи формирования понятий для множеств булевых векторов, и одновременно позволяющее использовать при решении этой задачи идеи и методы теории алгоритмов и дискретного анализа. Такое желание частично объясняется тем, что большинство исследований по формированию понятий в настоящее время проводятся экспериментальными методами, которые, как правило, обоснованы недостаточно убедительно.

Теоремы, доказанные в работе, в основном позволяют установить лишь первоначальные свойства рассматриваемого аппарата. Авторы предполагают, что на основе введенного аппарата возможны дальнейшие математические исследования, учитывающие условия, в которых протекают реальные процессы формирования понятий у человека или в иных биологических системах.

Авторы выражают глубокую признательность И. Д. Заславскому за редактирование работы.

§ 1. I-индукторы и их общие свойства

1. Обозначим через E_n множество всех n -мерных булевых векторов. Для произвольной упорядоченной пары непересекающихся подмножеств E_n (в том числе для пар вида $(\emptyset, M)$, $(M, \emptyset)$, где $M \subseteq E_n$), введем обозначение ПБМ (пара булевых множеств). Легко

видеть, что E_n содержит в точности $t_n = \sum_{k=0}^{2^n} 2^k C_{2^n}^k = 3^{2^n}$ различных ПБМ.

В дальнейшем изложении предполагается, что параметр n произвольный, но фиксированный.

Определение 1. Произвольную ПБМ (M_1, M_0) назовем *абсолютной* (абс.) если $M_1 = E_n/M_0$.

Определение 2. Будем говорить, что ПБМ (M_1, M_0) содержится в ПБМ (M_1^*, M_0^*) (а также, что (M_1^*, M_0^*) является *расширением* ПБМ (M_1, M_0)) и писать

$$(M_1, M_0) \subseteq (M_1^*, M_0^*),$$

если $M_1 \subseteq M_1^*$ и $M_0 \subseteq M_0^*$.

Определение 3. Для произвольного класса ПБМ A *разложением* A назовем множество $R(A)$ всех таких ПБМ, каждая из которых содержится хотя бы в одном элементе из A .

В дальнейшем фигурные скобки при обозначении одноэлементных множеств будут иногда опускаться.

Для удобства дальнейшего изложения перенумеруем все ПБМ номерами $1, 2, \dots, t_n$. Эта нумерация в дальнейшем предполагается фиксированной. Через x обозначим соответствующий нумерующий оператор, а через γ_1, γ_0 — декодирующие операторы, выделяющие по произвольному номеру t первую и вторую компоненты ПБМ с этим номером.

Таким образом, для произвольной ПБМ (M_1, M_0) с номером t имеем:

$$x(M_1, M_0) = t,$$

$$\gamma_1(t) = M_1,$$

$$\gamma_0(t) = M_0.$$

В дальнейшем изложении каждая ПБМ и ее номер отождествляются, что позволяет нам, например, от выражения $(M_1, M_0) \subseteq (M_1^*, M_0^*)$ перейти к выражению $c_1 \subseteq c_2$, где $c_1 = x(M_1, M_0)$, $c_2 = x(M_1^*, M_0^*)$.

2. Введем следующие обозначения:

N — множество всех натуральных чисел $0, 1, 2, \dots$,

L_n — множество всех абс. ПБМ, $T_n = \{1, 2, \dots, t_n\}$,

M — мощность множества M ,

ОРФ — обще-рекурсивная функция.

Определение 4. Произвольную одноместную ОРФ* f назовем 1-индуктором, при данном n , если выполнены условия:

$$1. \forall x (x \in T_n \rightarrow f(x) \in T_n),$$

$$2. \forall x (x \in T_n \rightarrow x \subseteq f(x)),$$

$$3. \forall xy (x, y \in T_n \& x \subseteq y \subseteq f(x) \rightarrow f(x) \subseteq f(y)),$$

$$4. \forall x (x \in N \setminus T_n \rightarrow f(x) = t_n + 1).$$

Определение 5. 1-индуктор f назовем абсолютизирующим (абс.), если выполнено условие:

$$1^1. \forall x (x \in T_n \rightarrow f(x) \in L_n).$$

Заметим, что в последнем случае условие 3 в определении 1-индуктора переходит в условие

$$3^1. \forall xy (x, y \in T_n \& x \subseteq y \subseteq f(x) \rightarrow f(x) = f(y)).$$

Множество всех 1-индукторов обозначим через E_n^1 , а множество всех абс. 1-индукторов — через Ω_n^1 . Как будет показано в § 5 имеет место следующая оценка мощности Ω_n^1 :

* Заметим, что 1-индуктор можно было бы определить как отображение одного конечного множества в другое. Использование аппарата ОРФ вызвано, в основном, техническими соображениями.

$$2^{2^{p+1}-1} \leq \overline{Q}_n^1 \leq 2^{3^{p-1}-2^{p+1}},$$

где $p = 2^n$.

Укажем некоторые простые свойства 1-индукторов:

Свойство 1. $\forall z f(z \in T_n \& f \in \Xi_n^1 \rightarrow \forall x (f(x) = z \rightarrow x \in R(z)))$, так как из $f(x) = z$ следует, что $x \subseteq z$.

Свойство 2. $\forall z f(z \in L_n \& f \in \Omega_n^1 \rightarrow \exists x (x \in T_n \& f(x) = z))$, так как $f(r) = z$ при $z \in L_n$.

Свойство 3. $\forall x f(f \in \Xi_n^1 \& f(x(\emptyset, \emptyset)) = p \rightarrow \forall x \in R(p) (p \subseteq f(x)))$. Это свойство непосредственно следует из п. 3 определения 1-индукторов.

Свойство 4. $\forall x y (x, y \in T_n \rightarrow R(x) \cap R(y) \neq \emptyset)$, так как $(\emptyset, \emptyset) \in R(x) \cap R(y)$.

Свойство 5. $\forall z \neg \forall f (z \in T_n \& f \in \Xi_n^1 \rightarrow \forall x \in R(z) (f(x) = z))$, так как f — однозначная функция, а $(\emptyset, \emptyset) \in \bigcap_{x \in T_n} R(x)$.

Свойство 6. $\forall z f (z \in T_n \& f \in \Xi_n^1 \rightarrow \neg \forall x (x \in T_n \rightarrow f(x) = z))$, так как $\overline{L}_n = 2^{2^n} \geq 2$ и $\forall y (y \in L_n \rightarrow f(y) = y)$.

Свойство 7. $\overline{\forall x f (x \in T_n \& f \in \Xi_n^1 \& \nu_1(x) \cup \nu_0(x) = k \& f(x) = z \& x \neq z \rightarrow \exists y (y \in T_n \& \nu_1(y) \cup \nu_0(y) = k+1 \& z \subseteq f(y))}$.

Действительно, в множестве всех расширений x , полученных добавлением одного элемента к множествам $\nu_1(x)$, либо $\nu_0(x)$ найдется хотя бы одно y такое, что $x \subseteq y \subseteq z$, а потому, согласно п. 3 определения 1-индукторов, $z \subseteq f(y)$.

3. Рассмотрим общие ограничения на возможности индукторов. Предварительно введем критерии оценки этих возможностей.

Определение 6. Генератором последовательности номеров (ГПН) назовем произвольную ОРФ, значения которой принадлежат T_n .

Отметим, что определение ГПН соответствует интуитивному понятию „обучающей последовательности“ часто используемому в литературе по распознаванию образов.

В дальнейшем, при рассмотрении ГПН [наряду с n мы будем предполагать фиксированным некоторое натуральное число c , причем для каждого ГПН нас будут интересовать лишь значения $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, ..., $\varphi(c)$].

С точки зрения приложений представляют интерес случаи, когда $c \leq 2^n$, поскольку всякая ПБМ размерности n может быть описана посредством обучающей последовательности длины не более 2^n , перечисляющей все элементы этой ПБМ.

Определение 7. ГПН φ назовем расширяющимся (РГПН), если $\forall t (\varphi(t) \subseteq \varphi(t+1))$.

Определение 8. Будем говорить, что ГПН φ согласован с ПБМ (M_1, M_0) , если $\forall t (\varphi(t) \subseteq x(M_1, M_0))$.

Через $\Phi(v)$ будем обозначать множество всех ГПН, согласованных с ПБМ v .

Определение 9. Для произвольных $f \in \Xi_n^1$, $v \in T_n$ и $\varphi \in \Phi(v)$ (при заданных n и c), *временной сложностью* ПБМ v относительно (f, φ) назовем число

$$S_{\text{вр.}}(v, f, \varphi) = \begin{cases} \mu_{t \leq c}(f(\varphi(t)) \supseteq v), & \text{если такое } t \text{ существует,} \\ c + 1, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где μ — оператор минимизации.

Объемной сложностью v относительно (f, φ) назовем число

$$S_o.(v, f, \varphi) = \overline{v_1(\varphi(a))} + \overline{v_0(\varphi(a))},$$

где $a = S_{\text{вр.}}(v, f, \varphi)$.

Определение 10. Для произвольных $A \subseteq T_n$, $G \subseteq \Xi_n^1$ ($A \neq \emptyset$, $G \neq \emptyset$) *объемной сложностью* A относительно G назовем число

$$S_o.(A, G) = \min_{f \in G} \max_{v \in A} \min_{\varphi \in \Phi(v)} S_o.(v, f, \varphi).$$

Очевидна следующая теорема.

Теорема 1. $\forall f v (f \in \Xi_n^1 \& v \in T_n \rightarrow S_o.(v, f) = \min_{\substack{u \subseteq v, \\ f(u) \supseteq v}} (\overline{v_1(u)} + \overline{v_0(u)}).$

Теорема 2. $\forall u (u \in T_n \rightarrow \exists f (f \in \Xi_n^1 \& S_o.(u, f) = 0)).$

Доказательство. Пусть $u \in T_n$ и $z_1, z_2, \dots, z_{2^{2^n}}$ — все элементы L_n . Без ограничения общности можно считать, что $u \subseteq z_1$. 1-индуктор f строим следующим образом:

$$\forall x (x \subseteq u \rightarrow f(x) = u),$$

$$\forall i x (1 < i \leq 2^{2^n} \& x \in R(z_i) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} R(z_j) \rightarrow f(x) = z_i),$$

$$\forall x (x \in N \setminus T_n \rightarrow f(x) = t_n + 1).$$

Легко показать, что для построенного индуктора имеет место $S_o.(u, f) = 0$.

Следствие 1.2. $\forall u (u \in L_n \rightarrow \exists f (f \in \Xi_n^1 \& S_o.(u, f) = 0)).$

Следующие две теоремы способствуют выявлению природы ограничений на нижние оценки функции сложности класса заданных ПБМ относительно класса 1-индукторов.

Теорема 3. $\forall k A (1 \leq k \leq 2^n \& A \subseteq L_n \& \overline{A} > 2^{k-1} C_{2^n}^{k-1} \rightarrow S_o.(A, \Xi_n^1) \geq k).$

Доказательство. Допустим, что $S_o.(A, \Xi_n^1) < k$. Тогда можно указать индуктор f такой, что

$$(1) \quad \forall z (z \in A \rightarrow S_o.(z, f) < k)$$

Пусть

$$T^l = \{x \mid x \in T_n \& \bar{\gamma}_1(x) \cup \bar{\gamma}_0(x) = l\}, \text{ при } 0 \leq l \leq 2^n$$

Из (1) и свойства 7 1-индукторов следует, что

$$(2) \quad \forall z (z \in A \rightarrow \exists x (x \in T^{k-1} \& z \subseteq f(x)))$$

Так как $f(x) \in L_n$, то из (2) получаем

$$\forall z (z \in A \rightarrow \exists x (x \in T^{k-1} \& z = f(x))),$$

чего не может быть, так как по условию $\bar{T}^{k-1} = 2^{k-1} C_{2^n}^{k-1} < \bar{A}$.

Следствие 1.3. $\forall k A (1 \leq k \leq 2^n \& A \subseteq L_n \& S_0(A, \Omega_n^1) < k \rightarrow \bar{A} \leq 2^{k-1} C_{2^n}^{k-1})$.

Следствие 2.3. $S_0(L_n, \Omega_n^1) \geq k$, где

$$k = \nu_t(2^t C_{2^n}^t \geq 2^{2^n}).$$

Теорема 4. $\forall n \exists A (n > 0 \& A \subseteq L_n \& S_0(A, \Omega_n^1) < |lb \bar{A}|)$.

Доказательство. При $n = 1$ выбираем множество $A_1 = \{(\emptyset, \{0, 1\}), (\{1\}, \{0\}), (\{0, 1\}, \emptyset)\}$ и строим соответствующий абс. 1-индуктор f_1 :

$$f_1(x(\emptyset, \emptyset)) = f_1(x(\emptyset, \{1\})) = f_1(x(\{1\}, \emptyset)) = f_1(x(\{1, 0\}, \emptyset)),$$

$$f_1(x(\{0\}, \emptyset)) = f_1(x, \emptyset, \{0, 1\}),$$

$$f_1(x(\emptyset, \{0\})) = f_1(x\{1\}, \{0\}).$$

Легко видеть, что $S_0(A_1, f_1) = 1$, а потому $S_0(A_1, \Omega_n^1) < |lb \bar{A}_1| = 2$.

Пусть при $n = k$ ($k > 0$) теорема верна. Для построения множества A_{k+1} и соответствующего 1-индуктора f_{k+1} мы используем конструкции, описанные в § 5.

Рассмотрим γ_{2^k} -графы H_x, H_0, H_1 . Выделим в них γ_{2^k} -суграфы G_x, G_0, G_1 и множества вершин A_x, A_0, A_1 , соответствующие 1-индуктору f_k и множеству A_k соответственно. Тогда 1-индуктор f_k^1 задается $\gamma_{2^k}^1$ -суграфом G , который получится, если объединить графы G_x, G_0, G_1 и соединить ребрами соответствующие вершины G_x и G_0 (либо G_x и G_1). Положив $A_{k,1}^1 = A_0$ (либо $A_{k,1}^1 = A_1$), легко убедиться в справедливости доказываемого неравенства для множества $A_{k,1}^1$ и 1-индуктора $f_{k,1}^1$.

Проделав указанную последовательность операций 2^k раз, мы получим 1-индуктор $f_k^{2^k}$ и искомое множество $A_k^{2^k} = A_{k+1}$. Теорема доказана.

Основой для утверждения теоремы 4 служит то обстоятельство, что индукторы расшифровывают абс. ПБМ из A не просто по под-

множествам E_n , а по подмножествам E_n , разбитым на 2 класса ПБМ. В результате этого при фиксированной мощности k подмножеств из E_n мы имеем не $C_{2^n}^k$, а $2^k C_{2^n}^k$ различных объектов, которые могут служить кодами для элементов из A .

Покажем, что не существует оптимального абс. 1-индуктора.

Теорема 5. $\neg \exists f^* \forall z f(f^*, f \in \mathcal{Q}_n^1 \& z \in L_n \rightarrow S_0(z, f^*) \leq S_0(z, f))$

Доказательство. Допустим, что такое f^* возможно. Пусть

$$A = \{z \mid z \in L_n \& S_0(z, f^*) < k \& 2^{k-1} C_{2^n}^{k-1} < 2^{2^n}\}.$$

Согласно следствию 1.3. $\bar{A} \leq 2^{k-1} C_{2^n}^{k-1}$, а потому, $\bar{A} < 2^{2^n} = \bar{L}_n$. Пусть

$z_1 \in L_n/A$. Согласно следствию 1.1 $\exists f_1 (f_1 \in \mathcal{Q}_n^1 \& S_0(z_1, f_1) = 0)$. Так как $z_1 \notin A$, то $S_0(z_1, f^*) > k > 0$ и $S_0(z_1, f_1) < S_0(z_1, f^*)$, что противоречит нашему предположению.

В нижеследующей теореме 6 мы покажем, что для произвольного абс. 1-индуктора при довольно общих предположениях возможны достаточно неблагоприятные условия работы, при которых индуктор ошибается при каждом акте обобщения.

Теорема 6. Для произвольных абс. 1-индуктора $f(x)$ и строго возрастающей ОРФ $\psi(t)$ можно построить РГПН $\varphi(t)$ такой, что $\forall t (t \geq 1 \& \psi(t) \leq 2^n \rightarrow \overline{\varphi_1(\varphi(t)) \cup \varphi_2(\varphi(t))} = \psi(t) \& f(\varphi(t+1)) \neq f(\varphi(t)))$.

Доказательство. Построим РГПН, удовлетворяющий условиям теоремы. Построение индуктивное, по параметру t .

1. Если $\psi(0) > 2^n$, то $\varphi(0)$ полагаем равным произвольному $a \in L_n$.

Пусть $\psi(0) \leq 2^n$. Выбираем произвольным образом ПБМ (M_1^0, M_0^0) такую, чтобы $M_1^0 \cup M_0^0 = \psi(0)$ и полагаем $\varphi(0) = x(M_1^0, M_0^0)$.

2. Пусть $\varphi(t)$ уже определено. Тогда $\varphi(t+1)$ определяем следующим образом.

Если $\psi(t+1) > 2^n$, то полагаем $\varphi(t+1) = \varphi(t)$.

Пусть $\psi(t+1) \leq 2^n$. Находим множества $M_1^t = \varphi_1(\varphi(t))$, $M_0^t = \varphi_0(\varphi(t))$, $R_1^t = \varphi_1(f(\varphi(t)))$, $R_0^t = \varphi_0(f(\varphi(t)))$. Ясно, что $M_1^t \subseteq R_1^t$, $M_0^t \subseteq R_0^t$ и $R_1^t \cup R_0^t = E_n$. Из множеств R_1^t/M_1^t и R_0^t/M_0^t выделим подмножества P_1^t и P_0^t соответственно, таким образом, чтобы выполнялось равенство:

$$P_1^t \cup P_0^t = \psi(t+1) - \psi(t).$$

Так как $\psi(t+1) \leq 2^n$, то это возможно.

Мы полагаем $\varphi(t+1) = x(M_1^t \cup P_0^t, M_0^t \cup P_1^t)$. Так как $\psi(t+1) - \psi(t) > 0$, то $P_1^t \cup P_0^t \neq \emptyset$, а потому $M_1^t \cup P_0^t \not\subseteq R_1^t$ или $M_0^t \cup P_1^t \not\subseteq R_0^t$. Следовательно, $f(\varphi(t+1)) \neq f(\varphi(t))$. Теорема доказана.

Следствие 1.6. $\forall f \exists \varphi (f \in \mathcal{Q}_n^1 \rightarrow \forall v \in L_n \& \varphi \in \Phi(v) \& \varphi(t) \subset \varphi(t+1) \& \& S_{\text{пр}}(v, f, \varphi) = 2^n \& S_0(v, f, \varphi) = 2^n)$

Доказательство легко получить, если в условиях теоремы 6 выбрать $\psi(t)$ такое, что $\forall t \psi(t+1) - \psi(t) = 1$, а в определении временной сложности 1-индукторов считать $c \geq 2^n$.

Утверждение теоремы 6 и следствия 1.6 не являются неожиданными. Однако они позволяют нам точнее представить границы возможностей индуктивного обобщения и способствуют выявлению факторов, влияющих на эффективность этого процесса.

Для того, чтобы в дальнейшем исследовать практически интересные случаи индуктивного обобщения, предварительно мы приведем одну из интерпретаций этого процесса.

§ 2. Об условиях повышения эффективности индуктивного обобщения

Естественная интерпретация введенной системы определений заключается в следующем. В процессе накопления впечатлений и расширения информации об окружающем мире у каждого человека складываются общие понятия, позволяющие организовать эту информацию. Каждое такое понятие, скажем, «кошка», складывается на основе конечного числа впечатлений, получающих оценки типов: «это кошка» или «это не кошка». Применяя грубую, но в той или иной степени неизбежную абстракцию, мы можем считать, что в человеке заложен некоторый механизм, позволяющий по конечному набору данных типа «это кошка» и «это не кошка» сформировать общее понятие «кошка». Такому механизму соответствует введенное выше понятие 1-индуктора; при этом абс. 1-индукторам соответствуют механизмы, позволяющие по всякому набору данных указанного вида сформировать некоторое законченное понятие. ГПН соответствуют процессам накопления данных для формирования понятий; объемная и временная сложность описывают соответственно количество впечатлений и количество шагов, необходимые для формирования законченного понятия.

Разумеется, в общей форме введенные определения еще не дают возможности с исчерпывающей полнотой охарактеризовать процессы накопления информации об объектах и формирования понятий в реальных биологических системах, например, у человека. Мы рассмотрим некоторые соображения, относящиеся к введению возможных дополнительных ограничений и условий в систему определений. Систему, снабженную механизмом формирования понятий, будем называть «учеником»; источник внешних впечатлений, на основе которых формируются понятия — «учителем».

Пусть ученик пытается сформировать понятие о некотором фиксированном множестве ситуаций («задуманных» учителем) по отдельным элементам из этого множества и его окружения, которые он получает от учителя. Тогда, интерпретируя теорему 6, получаем, что каков бы ни был алгоритм формирования понятий ученика, основанный на методах

индуктивного обобщения, и какова бы ни была количественная закономерность предъявления отдельных ситуаций из объема этого понятия и его окружения, учитель может задать хотя бы одно множество ситуаций и информировать ученика об этом множестве таким образом, что ученик не сумеет сформировать понятие о нем и будет ошибаться до тех пор, пока ему не будут предъявлены все ситуации этого множества и его окружения.

Можно показать, что в указанной интерпретации для ученика найдется достаточно много таких «трудных» множеств.

Однако наблюдения за процессом формирования понятий у человека, когда внешнее его поведение проявляется в форме процесса индуктивного обобщения, убеждают нас в том, что имеются многочисленные случаи, когда этот процесс протекает у человека значительно результативнее предсказанного теоремой 6.

Нам представляется, что сравнительно быстрое формирование понятий у человека посредством методов индуктивного обобщения может быть связано со следующими обстоятельствами.

1 Ученик может располагать другими знаниями, прямо или косвенно связанными с задуманным учителем множеством. Эти знания значительно сужают область поиска нужного понятия и тем самым облегчают его выбор.

а) Это могут быть знания об общих ограничениях на ситуации окружающей человека среды и об общих законах, протекающих в природе процессов. Эти знания, накопленные человечеством на протяжении многих веков эволюции и развития познания, передаются ученику либо посредством механизма биологической наследственности и отражаются в его конструкции и наборе безусловных рефлексов, либо посредством непосредственной передачи этих знаний при обучении. При этом роль последних в процессе формирования понятий (посредством индуктивного обобщения) более важна.

С этой точкой зрения согласуется тот психологический факт, что человек начинает пользоваться индуктивным обобщением на сравнительно поздних стадиях своего развития.

б) Ученик и учитель могут обладать сходной структурой и вследствие этого иметь сходные познавательные возможности.

В частности, надо полагать, что если бы восприятие различных ситуаций учеником и учителем происходило посредством различных биологических механизмов, то их взаимопонимание сильно затруднилось бы. Например, классы ситуаций, которые учителю представлялись бы непересекающимися, ученик мог бы воспринять как пересекающиеся и т. д.

Напротив, сходство в восприятии ситуаций у ученика и учителя может значительно облегчить ученику синтез требуемых понятий.

в) Для взаимопонимания ученика и учителя очень важно, в каких языках происходит описание классов ситуаций у каждого из них, т. е. как записываются понятия.

Если языковые средства ученика и учителя сходны и полны (т. е. позволяют описывать произвольные классы ситуаций), то ученик, зная некоторые характеристики языковых выражений, которые учитель использует в качестве описаний множеств ситуаций (например, длины этих выражений), может облегчить свою задачу индуктивного обобщения, организовав поиск описания искомого множества ситуаций только в том классе языковых выражений, которые определяются этими известными ему ограничениями.

В другом крайнем случае, когда языки учителя и ученика различны и к тому же неполны, возможны случаи их полного непонимания друг друга. Например, пусть учитель пользуется для описания множеств булевых векторов следующими средствами:

а) элементарными описаниями являются предикаты вида: $x_i = p$, где x_i — булева переменная, $p = 0, 1$; $i = 1, \dots, n$;

б) если θ_i и θ_j — описания, то $\theta_i \vee \theta_j$ — также описания, при $i, j = 1, 2, \dots, n$;

в) других описаний нет.

Ученик, в свою очередь, использует описание следующего вида:

а) элементарные описания определяются аналогично (а);

б) если θ_i и θ_j — описания, то $\theta_i \& \theta_j$ — также описания, при $i, j = 1, 2, \dots, n$;

в) других описаний нет.

Тогда, если учитель задумал множество булевых векторов M , описываемых, например, выражением $\theta_{i_1} \vee \theta_{i_2} \vee \dots \vee \theta_{i_k}$, при $i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_k$, $k > 1$, то независимо от способов синтеза описаний, которыми пользуется ученик, и независимо от векторов, предъявленных учителем, ученик не имеет возможности построить описание всего множества M в своем языке, т. е. он не поймет учителя.

II. Ученик может иметь возможность определенным образом управлять последовательностью ситуаций, которые предъявляет ему учитель. Например, он может потребовать предъявить ему какие-то конкретные ситуации и сказать, к какому классу они относятся, задать определенные вопросы об этих ситуациях и т. д.

Такое индуктивное обобщение происходит в условиях так называемого зависимого выбора [2].

В последующем изложении мы рассмотрим возможности индуктивного обобщения при некоторых конкретных ограничениях вышеуказанного вида.

§ 3. Индуктивное обобщение в ограниченных средах

В нижеследующих теоремах 7,8 рассмотрены возможности 1-индукторов при ограничениях типа I (а) § 2 на множества абс. ПБМ.

1. Обозначим через A_s множество всех симметрических функций (абс. ПБМ).

Следующая теорема получена на основе теоремы Шеннона о рабочих числах симметрических функций [4].

Теорема 7. $\exists I_s (I_s \in \Omega_n^1 \& S_0(A_s, I_s) = n + 1)$.

Доказательство. Известно [3, 4], что для однозначного определения произвольной симметрической функции от n -переменных, достаточно знать ее значение на множестве $G = \{z_0, z_1, \dots, z_n\}$ булевых векторов таких, что $|z_i| = i$, где $0 \leq i \leq n$ и $|z|$ — есть число единиц в z . Используя этот факт, абс. 1-индуктор I_s определим следующим образом:

$$\forall x (x \in T_n \rightarrow I_s(x) = z \& v_1(z) = v_1(x) \cup \{z/z \in E_n \setminus v_0(x) \& \exists \beta (\beta \in v_1(x) \& |z| = |\beta|)\} \& v_0(z) = E_n \setminus v_1(z))$$

и

$$\forall x (x \in N \setminus T_n \rightarrow I_s(x) = t_n + 1).$$

Ясно, что

$$\forall x (x \in R(A_s) \rightarrow I(x) \in A_s).$$

Убедимся в том, что $I_s \in \Omega_n^1$. Действительно, непосредственно из определения I_s следует, что

$$\forall x (x \in T_n \rightarrow I_s(x) \in L_n \& x \subseteq I_s(x)).$$

Пусть

$$x, y \in T_n \text{ и } x \subseteq y \subseteq I_s(x).$$

Согласно определению I_s имеем:

$$v_1(I_s(x)) = v_1(x) \cup \{z/z \in E_n \setminus v_0(x) \& \exists \beta (\beta \in v_1(x) \& |z| = |\beta|)\},$$

$$v_1(I_s(y)) = v_1(y) \cup \{z/z \in E_n \setminus v_0(y) \& \exists \beta (\beta \in v_1(y) \& |z| = |\beta|)\}$$

Покажем, что $v_1(I_s(x)) \subseteq v_1(I_s(y))$. Пусть $\tilde{\alpha} \in v_1(I_s(x))$. Если $\tilde{\alpha} \in v_1(x)$, то $\tilde{\alpha} \in v_1(y)$, так как $v_1(x) \subseteq v_1(y)$. Пусть $\tilde{\alpha} \notin v_1(x)$. Тогда $\tilde{\alpha} \in E_n \setminus v_0(x)$ и $\exists \tilde{\beta} (\tilde{\beta} \in v_1(x) \& |\tilde{\alpha}| = |\tilde{\beta}|)$. Ясно, что $\tilde{\beta} \in v_1(y)$, а потому $\tilde{\alpha} \in E_n \setminus v_0(y)$. Действительно, так как $\tilde{\alpha} \in E_n \setminus v_0(I_s(x))$, то тем более $\tilde{\alpha} \in E_n \setminus v_0(y)$, так как по предположению $v_0(y) \subseteq v_0(I_s(x))$.

Докажем справедливость обратного включения:

$$v_1(I_s(y)) \subseteq v_1(I_s(x)).$$

Пусть $\tilde{\alpha} \in v_1(I_s(y))$. Возможны два случая:

$$1. \tilde{\alpha} \in v_1(y).$$

$$2. \tilde{\alpha} \notin v_1(y).$$

В первом случае принадлежность $\tilde{\alpha}$ к $v_1(I_s(x))$ немедленно следует из включения $v_1(y) \subseteq v_1(I_s(x))$.

Во втором случае $\tilde{\alpha} \in E_n \setminus v_0(y)$ и $\exists \tilde{\beta} (\tilde{\beta} \in v_1(y) \& |\tilde{\beta}| = |\tilde{\alpha}|)$. Так как $v_0(x) \subseteq v_0(y)$, то $\tilde{\alpha} \in E_n \setminus v_0(x)$. Если $\tilde{\beta} \in v_1(x)$, то $\tilde{\alpha} \in v_1(I_s(x))$. Если же

$\tilde{\beta} \in \nu_1(y)/\nu_1(x)$, то из $\nu_1(y) \subseteq \nu_1(I_s(x))$ следует $\tilde{\beta} \in \nu_1(I_s(x)) \setminus \nu_1(x)$, а потому $\exists \beta' (\beta' \in \nu_1(x) \& |\beta'| = |\tilde{\beta}|)$. Но тогда $\tilde{\alpha} \in \nu_1(I_s(x))$, так как $\exists \beta' (\beta' \in \nu_1(x) \& |\beta'| = |\tilde{\beta}| = |\tilde{\alpha}|)$

Итак, $\nu_1(I_s(x)) = \nu_1(I_s(y))$, а потому $I_s(x) = I_s(y)$ и $I_s \in \Omega_n^1$.
Для завершения доказательства теоремы отметим, что

$$S_0((E_n, \emptyset), I_s) = n + 1.$$

Следствие 1.7. $k_s \leq S_0(A_s, \Omega_n^1) \leq n + 1$,

где $k_s = \nu_1(2^t C_{2^n}^t \geq 2^{n+1})$.

2. В нижеследующих утверждениях существенно используются определения и результаты, приведенные в [3].

Обозначим через A_m множество всех монотонных функций (абс ПБМ). Для произвольных $\alpha, \beta \in E_n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, будем говорить, что α больше (строго больше) β и записывать это утверждение в виде $\alpha \geq \beta$ ($\alpha > \beta$), если $\alpha_i \geq \beta_i$ ($\alpha_i > \beta_i$) при $1 \leq i \leq n$.

Определим ОРФ $I_m(x)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \forall x (x \in T_n \rightarrow I_m(x) = z \& \nu_1(z) = \nu_1(x) \cup \{a | a \in E_n \setminus \nu_0(x) \& \exists \beta (\beta \in \nu_1(x) \& \\ \& \alpha > \beta)\} \& \nu_0(z) = E_n \setminus \nu_1(z)), \\ \forall x (x \in E_n | T_n \rightarrow I_m(x) = t_n + 1). \end{aligned}$$

Ясно, что $\forall x (x \in R(A_m) \rightarrow I_m(x) \in A_m)$. Нетрудно показать, что I_m есть абс. 1-индуктор. Для этого достаточно повторить рассуждения, использованные при доказательстве $I_s \in \Omega_n^1$, в которых отношение $|\alpha| = |\beta|$ везде заменено на отношение $\alpha > \beta$.

Определение 11. Для произвольной заданной ПБМ $z \in A_m$ *нижней единицей* z назовем произвольный вектор α такой, что

$$(\alpha \in \nu_1(z)) \& \forall \beta (\beta \in E_n \& \beta < \alpha \rightarrow \beta \in \nu_0(z)).$$

Лемма 1. Для произвольной ПБМ $z \in A_m$, если C_z есть множество всех нижних единиц z , то

$$\forall x (x \in R(z) \rightarrow (I_m(x) = z \leftrightarrow C_z \subseteq \nu_1(x))).$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $z \in A_m$, $x \in R(z)$, $C_z \subseteq \nu_1(x)$ и $I_m(x) = z'$. Из определения I_m и монотонности z следует, что

$$(1) \quad \nu_1(z') \subseteq \nu_1(z).$$

Покажем, что

$$(2) \quad \nu_1(z) \subseteq \nu_1(z')$$

Допустим, что (2) неверно и $\beta_0 \in \nu_1(z) | \nu_1(z') \neq \emptyset$. Так как $\beta_0 \notin C_z$, то существует цепь $\beta_0 > \beta_1 > \dots > \beta_n$ векторов $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ таких, что

$$(3) \quad \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \nu_1(z) \& \forall \gamma (\gamma \in E_n^1 \& \gamma < \beta_n \rightarrow \gamma \notin \nu_1(z)).$$

Из (3) следует, что $\beta_n \in C_z$ и потому $\beta_n \in \gamma_1(x)$. В силу определения I_m и из $\beta_n \in \gamma_1(x)$ следует, что $\beta_0 \in \gamma_1(z')$. Полученное противоречие доказывает (2).

Необходимость. Пусть $I_m(x) = z$. Допустим, что

$$\exists \alpha' (\alpha' \in C_z \& \alpha' \notin \gamma_1(x))$$

Но тогда $\alpha' \in \gamma_1(z)$, т. к. из $\alpha' \notin \gamma_1(x)$ и $\alpha' \in \gamma_1'(z)$ следовало бы, что существует $\alpha_1 \in \gamma_1(x)$ такой, что можно построить цепь $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n = \alpha'$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in E_n | \gamma_0(x)$. А это противоречит тому, что α' — есть нижняя единица. Лемма доказана.

Следствие 1. $\forall z (z \in A_m \rightarrow S_0(z, I_m) = \overline{C}_z)$

Теорема 8. $k_m \leq S_0(A_m, \Omega_n^1) \leq C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, где $k_m = \mu_t(2^t C_{2^n}^t > d)$,

$d = 2^{C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$ — нижняя оценка числа монотонных булевых функций [6].

Доказательство. Из следствия леммы 1 получаем, что

$$S_0(A_m, \Omega_n^1) \leq S_0(z^*, I_m) = C_{z^*},$$

где $\overline{C}_{z^*} = \max_{z \in A_m} \overline{C}_z$.

Легко видеть, что множество C_{z^*} совпадает с множеством попарно несравнимых векторов максимальной мощности. В работе [5]

доказано, что мощность такого множества равна $C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Следовательно, $S_0(A_m, I_m) = C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, а потому $S_0(A_m, \Omega_n^1) \leq C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

§ 4. Индуктивное обобщение с зависимым выбором

В теоремах 9 и 10 рассмотрены возможности 1-индукторов в условиях ограничений типа II § 2 на процесс индуктивного обобщения.

1. Определение 12. Произвольную ОРФ $q(t, x, y)$ назовем *регулятором*, если

$$\forall txy ((t, x, y) \in N \times T_n \times T_n \rightarrow q(t, x, y) \in T_n \& \gamma_0(q(t, x, y)) = \emptyset).$$

Множество всех регуляторов обозначим через Q_n .

Определение 13. Для произвольных $I \in \Xi_n$, $q \in Q_n$, ГПН $\varphi(x)$ назовем *порожденным* $(I, q)_c$, если

$$1. \gamma_1(\varphi(0)) \cup \gamma_0(\varphi(0)) = \{(0, 0, \dots, 0)\},$$

$$2. \forall t (t > 0 \rightarrow \gamma_1(\varphi(t+1)) \cup \gamma_0(\varphi(t+1)) = \gamma_1(q(t, \varphi(t), I(\varphi(t))))).$$

Легко видеть, что для произвольных $I \in \Xi_n$, $v \in L_n$, $q \in Q_n$ можно построить единственный ГПН, порожденный $(I, q)_c$ и согласованный с v .

Определение 14. Для произвольных $I \in \Xi'_n$, $v \in L_n$, $q \in Q_n$, временной (объемной) сложностью v относительно $(I, q)_e$ назовем числа

$$S_b(v, (I, q)) = S_{bp}(v, I, \varphi_v),$$

$$S_0(v, (I, q)) = S_0(v, I, \varphi_v),$$

где φ_v — ГПН, порожденный $(I, q)_e$ и согласованный с v .

2. Теорема 9. Для класса симметрических ПБМ A_s можно построить абс. 1-индуктор I_s и регулятор q_s такие, что

$$0 \leq S_b(A_s, (I_s, q_s)) \leq n + 1,$$

$$1 \leq S_0(A_s, (I_s, q_s)) \leq n + 1.$$

Доказательство. Утверждение теоремы мы получим, если абс. 1-индуктор определим так же, как и в теореме 7, а регулятор q_s выберем так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$q(t, x, y) = x \left(\bigcup_{k=0}^{t+1} \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \dots, \beta_n)\}, \emptyset \right),$$

где $\alpha_i = 1$, $\beta_j = 0$, при $1 \leq i, j \leq n$, $t \leq n + 1$ и $q(t, x, y) = x(E_n, \emptyset)$, при $t > n + 1$.

3. Утверждение нижеследующей теоремы основано на аналогичной теореме 5 работы [3]. По существу мы интерпретируем приведенные в [3] рассуждения во введенной нами более общей системе понятий.

Теорема 10. Для класса монотонных ПБМ A_m можно построить 1-индуктор I и регулятор q такие, что

$$S_b(A_m, (I, q)) \leq p,$$

$$S_b(A_m, (I, q)) \leq \prod_{i=1}^p \sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{4}\right]} C_{k_i}^{4j} 2^{n-a_p} + \sum_{i=1}^p 2C_{k_i}^{\left[\frac{k_i}{2}\right]} 2^{n-a_i} \prod_{j=1}^{i-1} \sum_{l=0}^{\left[\frac{k_j}{4}\right]} C_{k_j}^{4l},$$

где p — число, удовлетворяющее условиям

$$(p+1)(\sqrt[3]{16})^{p+1} \geq n > p(\sqrt[3]{16})^p; \quad k_i = \left\lceil \frac{\sqrt[3]{16}-1}{(\sqrt[3]{16})^i} n \right\rceil, \quad 1 \leq i \leq p;$$

$$a_r = \sum_{i=1}^r k_i, \quad 1 \leq r \leq p.$$

Доказательство. Определим 1-индуктор $I(x)$ и регулятор $q(t, x, y)$ следующим образом:

1. $I(x) = \chi(\{z | z \in E_n \setminus v_0(x) \& \exists \beta(\beta \in v_1(x) \& z \geq \beta)\}, \{z | z \in E_n \setminus v_1(x) \& \exists \beta(\beta \in v_0(x) \& z \leq \beta)\})$, при $x \in T_n$ и $I(x) = t^* + 1$, при $x \in N \setminus T_n$.

Используя рассуждения, аналогичные приведенным в доказательстве теоремы 7, нетрудно показать, что $I \in \Xi_n^1$.

2. Обозначим через $\varphi_v(t)$ ГПН, порожденный (I, q) и согласованный с некоторой ПБМ $v \in A_m$. Тогда $q(t, x, y)$ определяется следующим образом:

а) $q(0, \varphi_v(0), I(\varphi_v(0))) = \chi(C_0, \emptyset)$, где C_0 — множество всех элементов из E_n , достаточных для задания всех „правильных“ функций p -го ранга [3].

б) $q(t, \varphi_v(t), I(\varphi_v(t))) = \chi(v_1(\varphi_v(t)) \cup v_0(\varphi_v(t)) \cup C_t, \emptyset)$, где C_t есть множество всех элементов из E_n , достаточных для перехода от „правильных“ функций $(p - t + 1)$ -ранга ко всем „правильным“ функциям $(p - t)$ -ранга [3], при $t = 1, 2, \dots, p$.

в) $q(t, x, y) = \chi(E_n, \emptyset)$, при $t > p$.

Дальнейшее доказательство теоремы почти полностью повторяет доказательство теоремы 5 из [3], и потому мы его не приводим.

§ 5. Оценка числа абсолютизирующих 1-индукторов

В настоящем параграфе дается оценка числа абсолютизирующих 1-индукторов и рассматриваются некоторые свойства 1-индукторов, связанные с представлением их в виде графов.

Пусть M — множество векторов длины m , с компонентами 0,1 или x , а M^1 — множество булевых векторов длины m . Определим на M частичный порядок (который будем обозначать через $\leq$):

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \leq (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m),$$

если $\alpha_i = \beta_i$ или $\alpha_i = x$ для $i = 1, 2, \dots, m$.

Если $A \leq B$, то B будем называть продолжением A . Вектор C из M будем называть суммой векторов A и B (и обозначать $A \cup B$), если C является продолжением A и B и всякое другое общее продолжение A и B является продолжением C . (Ясно, что если существует общее продолжение A и B , то существует и $A \cup B$).

Абсолютизирующим 1-индуктором в этом параграфе мы будем называть отображение $f: M \rightarrow M^1$, удовлетворяющее следующим условиям:

а) $f(x) \geq x$;

б) если $x \leq y \leq f(x)$, то $f(x) = f(y)$.

Ясно, что это определение эквивалентно ранее введенному при $m = 2^n$.

Теорема 11. $2^{2^{m+1}} - 1 \leq \overline{\Omega}_n^1 \leq 2^{3^{m+1}} - 2^{m+1}$, где $m = 2^n$.

Доказательство теоремы опирается на нижеследующие вспомогательные утверждения.

Свойство 1. Покажем, что абс. 1-индукторы обладают следующим свойством:

$$b') \text{ из } \left. \begin{array}{l} x \leq f(y) \\ y \leq f(x) \end{array} \right\} \text{ следует } f(x) = f(y).$$

Доказательство. Пусть f — абс. 1-индуктор, $x \leq f(y)$ и $y \leq f(x)$. Так как $f(y)$ (или $f(x)$) является общим продолжением x и y , существует $x \cup y$. Тогда, по определению $x \cup y$,

$$y \leq x \cup y \leq f(y).$$

Из б) имеем:

$$f(y) = f(x \cup y).$$

Аналогично, $f(x) = f(x \cup y)$, следовательно, $f(x) = f(y)$.

Докажем теперь, что отображение $f: M \rightarrow M'$, удовлетворяющее условиям а) и б'), является абс. 1-индуктором.

В самом деле, пусть f удовлетворяет а) и б'), и пусть

$$x \leq y \leq f(x).$$

Из а) имеем:

$$x \leq y \leq f(y).$$

Из $y \leq f(x)$ и $x \leq f(y)$ следует $f(x) = f(y)$.

Определение γ_m -графа. γ_m -граф — это ориентированный граф с одной выделенной вершиной — корнем, определяемый однозначно, с точностью до изоморфизма, следующим образом:

γ_0 -граф — это граф, состоящий из одного корня.

γ_m -граф. Пусть имеются непересекающиеся γ_{m-1} -графы G_0, G_1 и G_x . Соединим все вершины G_x с соответственными вершинами G_0 и G_1 и в качестве корня полученного графа возьмем корень графа G_x . Построенный таким образом граф будет γ_m -графом. Вершину γ_m -графа будем называть r -вершиной, если длина наименьшего пути из корня в эту вершину равна r . Множество всех r -вершин назовем r -ярусом.

Определение γ'_m -суграфа. γ'_m -суграф γ_m -графа — это суграф, удовлетворяющий следующим условиям:

1) из каждой вершины имеются пути ровно в одну вершину последнего яруса (m -яруса);

2) если хотя бы один путь из вершины a в вершину b принадлежит γ'_m -суграфу, то все пути из a в b также принадлежат γ'_m -суграфу.

Свойство 2. Можно установить взаимно-однозначное соответствие μ между множеством вершин γ_m -графа и M , удовлетворяющее следующим условиям:

1) если существует путь из вершины a в вершину b , то $\mu(b) \geq \mu(a)$;

2) если $\mu(b) \geq \mu(a)$, то существует путь из a в b .

Доказательство. Для γ_0 -графа свойство 2 тривиально. Пусть для γ_{m-1} -графов G_0 , G_1 и G_X построены соответствия μ'_0 , μ'_1 , μ'_X между множеством вершин каждого из γ_{m-1} -графов и множеством всех векторов длины $m-1$ с компонентами 0, 1, x .

Поставим в соответствие каждой вершине a из M следующий вектор $\mu(a)$: если $a \in G_i$ ($i = 0, 1, x$), то

$$\mu(a) = (i, (\mu'_i(a))_1, (\mu'_i(a))_2, \dots, (\mu'_i(a))_{m-1}),$$

где $(\mu'_i(a))_k$ — k -тая компонента $\mu'_i(a)$.

Покажем, что это соответствие удовлетворяет условиям 1) и 2).

1) Пусть имеется путь из вершины a в вершину b . Если a и b принадлежат одному и тому же G_i , то $\mu'_i(a) \leq \mu'_i(b)$ и, следовательно, $\mu(a) \leq \mu(b)$. Если a и b принадлежат разным подграфам G_i , то a должно принадлежать G_X . Пусть для определенности $b \in G_0$, и пусть путь из a в b проходит через вершины

$$a = a_1, a_2, \dots, a_k = b.$$

Тогда существует такое j , что $a_1, \dots, a_j \in G_X$, $a_{j+1}, \dots, a_k \in G_0$. Тогда $\mu(a_i) \leq \mu(a_{i+1})$ при $i \neq j$, по доказанному, $\mu(a_j) \leq \mu(a_{j+1})$, так как они отличаются только первой компонентой, причем у $\mu(a_j)$ она равна x .

2) Пусть $\mu(a) \leq \mu(b)$. Покажем, что имеется путь из a в b . Если a и b принадлежат одному и тому же G_i , то $\mu'_i(a) \leq \mu'_i(b)$ и такой путь в G_i существует.

Если $a \in G_X$, а $b \in G_0$ (или G_1), то рассмотрим вершину c , у которой $\mu(c)$ отличается от $\mu(b)$ только первой компонентой, равной x . Ясно, что $c \in G_X$ и $\mu(a) \leq \mu(c)$, следовательно, $\mu'_i(a) \leq \mu'_i(c)$. Значит, существует путь из a в c . Путь же из c в b (состоящий из одного ребра) существует по построению γ_m -графа.

Итак, требуемое соответствие построено. Легко убедиться в том, что в векторе, соответствующем r -вершине, $m-r$ компонент равны x (далее будут отождествляться a и $\mu(a)$).

Определим теперь изображение абс. 1-индуктора посредством γ'_m -суграфа.

По всякому γ'_m -суграфу H можно однозначно построить отображение $f: M \rightarrow M'$ такое, что для всех векторов x из M $f(x)$ равно той вершине m -яруса, в которую существует путь из x , принадлежащий H . Будем называть H изображением построенного таким образом отображения f .

Свойство 3. (1) Если γ'_m -суграф H есть изображение отображения f , то f есть абс. 1-индуктор.

(2) Для всякого абс. 1-индуктора существует γ'_m -суграф, являющийся его изображением.

Доказательство. (1) Пусть γ'_m -суграф есть изображение отображения f . Пусть $x \leq y \leq f(x)$. Это означает, что существует путь из x в $f(x)$, проходящий через y . Значит $f(x) = f(y)$, т. е. f — абс. 1-индуктор.

(2) Пусть задан абс. 1-индуктор f . Рассмотрим суграф H , содержащий все пути, соединяющие x с $f(x)$ для всех x . Если это γ'_m -суграф, то он является изображением f . Докажем, что H — γ'_m -суграф. Достаточно показать, что всякая вершина x соединена только с одной m -вершиной ($f(x)$).

а) Если путь из x в $f(x)$ пересекает путь из y в $f(y)$, то существует путь из x в $f(y)$ и из y в $f(x)$, т. е. $x \leq f(y)$ и $y \leq f(x)$. Тогда $f(x) = f(y)$, так как f — абс. 1-индуктор.

б) Пусть в построенном подграфе H есть путь из x в n -вершину, отличную от $f(x)$. Пусть этот путь проходит через вершины $a_1 = x, a_2, \dots, a_k \neq f(x)$. Каждое из ребер из a_i в a_{i+1} принадлежит некоторому пути из x_i в $f(x_i)$. Так как путь из x_1 в $f(x_1)$ пересекает путь из x в $f(x)$, то

$$f(x) = f(x_1).$$

Так как, для всех $i = 1, 2, \dots, k-1$, $x_i \leq a_i \leq a_{i+1} \leq f(x_i)$, то

$$f(a_i) = f(a_{i+1}) = f(x_i).$$

Итак

$$f(a_k) = f(a_{k-1}) = \dots = f(a_1) = f(x_1) = f(x).$$

Но $f(a_k) = a_k$. Полученное противоречие показывает, что H есть γ'_m -суграф. Свойство 3 позволяет свести оценку числа абс. 1-индукторов к оценке числа γ'_m -суграфов.

Оценим, наконец, число γ'_m -суграфов.

Ясно, что если рассмотреть ту часть γ'_m -суграфа H , которая содержится в G_i , то это тоже γ'_m -суграф.

Пусть существует A_m γ'_m -суграфов. Всякий γ'_{m+1} -суграф можно построить следующим образом: построить γ'_m -суграф в G_x и дополнить его до γ'_{m+1} -суграфа. Ясно, что, как бы мы ни выбрали γ'_m -суграф H в G_x , и как бы мы ни выбрали ребра из m -яруса G_x в $(m+1)$ -ярус, достроить полученный суграф до γ'_{m+1} -суграфа можно (например, если в G_0 и G_1 повторить H). Это дает нижнюю оценку:

$$A_{m+1} \geq A_m \cdot 2^{2^m}.$$

С другой стороны, γ'_{m+1} -суграф вполне определяется заданием тех его подграфов, которые входят в G_0, G_1 и G_x и ребер, соединяющих m -вершины G_x с $(m+1)$ -ярусом (так как при этом каждая вершина уже соединена с некоторой $(m+1)$ -вершиной). Это дает верхнюю оценку:

$$A_{m+1} \leq A_m^3 \cdot 2^{2^m}.$$

Итак, получим

$$A_m \cdot 2^{2^m} \leq A_{m+1} \leq A_m^3 \cdot 2^{2^m}$$

$$2^{2^m+2^{m-1}+\dots+2+1} \leq A_{m+1} \leq 2^{2^m+3 \cdot 2^{m-1}+\dots+3^{m-1} \cdot 2+3^m},$$

$$2^{2^{m+1}-1} \leq A_{m+1} \leq 2^{3^{m+1}-2^{m+1}}.$$

Тем самым теорема 11 полностью доказана.

Է. Մ. ՊՈՂՈՍՅԱՆ, Օ. Ա. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ԻՆԴՈՒԿՏԻՎ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՄԱՆ ՈՐՈՇ ԶԵՎԱԿԱՆԱՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո մ

Ինդուկտիվ ընդհանրացում կանխանք հետադոտվող առարկաների բազմության նկարագրություն ստանալու պրոցեսը, ելնելով որոշ առարկաների այդ բազմությանը պատկանելու կամ չպատկանելու իմացությունից: Առաջարկվում է ինդուկտիվ ընդհանրացման ձևականացում այն դեպքի համար, երբ տվյալ չափականություն ունեցող բուլյան վեկտորներ օգտագործվում են հիմնական առարկաների դերում: Այդ ձևականացման սահմաններում մտցրվում են ցուցանիշներ՝ ինդուկտիվ ընդհանրացման ալգորիթմների էֆֆեկտիվությունը գնահատելու համար և ըստ այդ ցուցանիշների կատարվում են ներշնչված ալգորիթմների աշխատանքի որոշ գնահատումներ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Колмогоров А. Н. Три подхода к определению понятия количество информации, Сб. «Проблемы передачи информации», т. 1, вып. 1, 1965.
2. Хант Э., Марин Дж., Стоун Ф. Моделирование процесса формирования понятий на вычислительной машине, изд. «Мир», М., 1970.
3. Коробков В. К. О монотонных функциях алгебры логики, Проблемы кибернетики, вып. 13, М., 1965.
4. Шеннон К., Символический анализ релейных и переключательных схем, сб. Шеннон К. «Работы по теории информации и кибернетике», ИЛ, 1963.
5. Михеев В. М., О множествах, содержащих наибольшее число попарно несравнимых булевых векторов, сб. «Проблемы кибернетики», вып. 2, 1959.
6. Гильберт Э. Н. Теоретико-структурные свойства замыкающих переключательных функций, Кибернетический сборник, вып. 1, 1960.
7. Барздин Я. М. О прогнозировании общерекурсивных функций, ДАН СССР, т. 206, № 3, 1972.
8. Погосян Э. М. 1-индукторы и некоторые их свойства. ДАН АН Арм. ССР, т. LVIII, 1, 1974.