И. Л. ЗАСЛАВСКИЙ

О КОНСТРУКТИВНОЙ ИСТИННОСТИ СУЖДЕНИЙ И НЕКОТОРЫХ НЕТРАДИЦИОННЫХ СИСТЕМАХ КОНСТРУКТИВНОЙ ЛОГИКИ

§ 1. Введение

В настоящей статье вводится математический аппарат для описания конструктивной истинности суждений, основанный на рассмотрении операторов над рекурсивно-перечисленными множествами. На основе этого аппарата вводится понятие конструктивной $T\omega$-истинности арифметических формул, которое оказывается в определенном смысле эквивалентным традиционному понятию реализуемости по С. К. Клини ([1], [2], [3]; см. также [4], [5], [6]); рассматриваемый аппарат оказывается вместе с тем удобным средством для введения и исследования иных, нетрадиционных систем конструктивной логики. Основные понятия, связанные с указанным аппаратом, определяются в §§ 3, 4, 5. В частности, в § 5 определяются понятия G-числа N-го ранга и правильного натурального числа, играющие основную роль в дальнейшем изложении. В § 6 дается понятие $T\omega$-истинности арифметических формул, основанное на понятии G-числа N-го ранга и на понятии правильного натурального числа. В §7 доказывается конструктивная эквивалентность понятий реализуемости и $T\omega$-истинности арифметической формулы.

Понятие G-числа N-го ранга и понятие правильного натурального числа не подвергаются в пределах статьи дальнейшему систематическому анализу; лишь некоторые факты, относящиеся к этим понятиям, устанавливаются в § 8. Таким образом, указанное понятие конструктивной истинности в рамках этой статьи не разъясняется до конца, а сводится к некоторому другому понятию. В этом смысле возражения, выдвинутые против теории реализуемости ([5] стр. 234—236; [6], стр. 374—375; см. также [3]) сохраняют силу и в отношении построений настоящей статьи. (Понятие конструктивной истинности арифметических формул в каком бы то ни было нетривиальном смысле, по-видимому, безнадежно было бы пытаться конструктивно свести к чему-либо существенно более простому, например, к свойству или отношению, выразимому в арифметике;

поэтому указанные возражения следует вероятно, считать неизбежными для всякой достаточно богатой системы конструктивного истолкования суждений). Вместе с тем, форма введения понятия $T\omega$-истинности обладает, по мнению автора, рядом преимуществ по сравнению с формой введения понятия реализуемости. Во-первых, отношение «число e реализует формулу A» связывается непосредственно с истолковываемой формулой, в то время, как понятия G-числа N-го ранга и правильного натурального числа определяются вне зависимости от конкретного вида истолковываемой формулы (используется лишь ранг формулы— см § 5); поэтому, например, одно и то же G-число N-го ранга может употребляться для истолкования не одной, а многих формул. Во-вторых, сложность отношения «число e реализует формулу A» увеличивается при всяком усложнении формулы A, в то время, как сложность понятия G-числа N-го ранга, используемого при истолкованиях каждой данной формулы A (для каждой конкретной формулы достаточно использовать G-числа фиксированного ранга), увеличивается лишь при применении операций $\supset$, $\daleth$, $\forall$ и не изменяется при применении операций $\&$, $\vee$, $\exists$; в этом смысле понятие G-числа N-го ранга можно считать более „простым" по сравнению с отношением „число e реализует формулу A" (например, никакие „нагромождения" операций $\&$, $\vee$, $\exists$, не увеличивают сложность истолкования формулы с точки зрения $T\omega$-истинности, но они увеличивают эту сложность с точки зрения реализуемости). Рассмотрения этой статьи позволяют говорить, таким образом, о некоторой специфической роли операций $\supset$, $\daleth$, $\forall$ в конструктивной логике (отметим, что в несколько иных аспектах особая роль операций $\supset$, $\daleth$, $\forall$ в конструктивной логике были исследованы А. А. Марковым в работах по иерархиям языков конструктивной математики [8] и М. М. Кипнисом [9]; особая роль операций $\exists$ и $\vee$ была исследована Н. А. Шаниным в работе [5]). По мнению автора, в проводимых ниже построениях отчетливее, по сравнению с теорией реализуемости, выделена роль и структура того понятия, к которому сводятся рассматриваемые понятия конструктивной инстинности (при изложении теории реализуемости эти моменты приходится рассматривать на металогическом уровне; само же определение отношения «число e реализует формулу A» выглядит как «обычное», однозначно понимаемое математическое определение, что в данном случае, по-видимому, недостаточно четко выражает существо дела). Наконец, на основе вводимых далее понятий оказывается возможным дать обоснование ряда конструктивных логических исчислений (в частности, конструктивного исчисления высказываний и конструктивного исчисления предикатов) на более узкой и четко очерченной основе по сравнению с тем, как это обоснование удается провести при помощи теории реализуемости (см. § 8).

Аппарат, излагаемый в § 3 и 4, применим для определения ряда систем конструктивной логики, отличающихся от традиционных конструктивных логических систем. Так, например, на основе этого аппарата оказывается возможным дать семантическое описание симметрической конструктивной логики (см. § 9), основанной на равноправном рассмотрении конструктивной истинности и конструктивной ложности суждений (формальные системы этой логики рассмотрены в [10] и [11]). На основе того же аппарата оказывается возможным ввести непрерывную конструктивную логику (см. § 10), где вместо конструктивной истинности и ложности суждений рассматривается «истинность суждений с конструктивной достоверностью „r"», где r — рациональное число, $0 \leqslant r \leqslant 1$. Тем самым оказывается возможным установить связь между конструктивными логическими системами и системами многозначной и бесконечно-значной логики; в частности, методы рассуждений, характерные для традиционной конструктивной логики, оказываются применимыми также в некоторых логических системах указанных типов.

§ 2. Предварительные пояснения

В этом разделе мы дадим некоторые наводящие соображения для последующих рассмотрений. В классической логике с каждым предикатом связывается определенный математический объект — логическая функция, выдающая значения «истина» или «ложь»; эта функция с классической точки зрения полностью характеризует рассматриваемый предикат. В конструктивной логике мы не имеем математических объектов, полностью характеризующих рассматриваемые предикаты с конструктивной точки зрения (за исключением формул, характеризующих предикаты синтаксически). (Отметим, что в дальнейшем такие математические объекты будут построены; это будут некоторые операторы над рекурсивно-перечислимыми множествами). Поскольку функциям, рассматриваемым в классических теориях, обычно соответствуют в аналогичных конструктивных теориях те или иные алгорифмы, представляется естественным связывать с каждым n-местным арифметическим предикатом P некоторый алгорифм, выдающий по системам $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ символы «истина» или «ложь» (например, 0 или 1) в случаях, когда P соответственно имеет или не имеет места для данных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Поскольку существуют нерекурсивные предикаты, то, очевидно, не всегда можно построить подобный алгорифм так, чтобы он был всюду применим. Однако можно рассматривать не всюду применимые алгорифмы указанного рода; такие алгорифмы могут характеризовать ту информацию, которую мы накопили в отношении точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для которых предикат заведомо имеет или не имеет места. Алгорифмы подобного типа (мы будем их называть «уровнями познания») рассмотрены, например в [2], § 64; из содержания § 64 в [2] легко усматривается, что & и V могут быть определены как алгорифмические операторы над «уровнями познания». Легко видеть также, что если мы будем ограничиваться лишь рассмотрением «односторонних» «уровней познания», т. е. таких, которые никогда не выдают символа ложности, то квантор $\exists$ также может быть определен как алгорифмический оператор над «уровями познания» (по существу &, V, $\exists$ интерпретируются в этом случае как пересечение, сумма и проекция для рекурсивно-перечислимых множеств). Однако $\supset$ и $\forall$ не могут быть непосредственно интерпретированы как операторы аналогичного рода (легко видеть, в частности, что импликация, рассматриваемая в § 64 из [2], не может быть принята за основу в конструктивной логике; например, для этой импликации $P \supset P$ не всегда истинно).

В дальнейшем «односторонние» «уровни познания» будут рассматриваться при описании традиционной конструктивной логики; произвольные, в том числе «не односторонние» «уровни познания»—при описании симметрической конструктивной логики ([10], [11]). В § 2—6 мы ограничимся случаем «односторонних» «уровней познания», т. е. традиционной конструктивной логикой. В этом случае каждый «уровень познания» по существу представляет собой рекурсивно-перечислимое множество. В качестве «уровня познания» R для импликации $A \supset B$ естественно рассматривать всякое такое рекурсивно-перечислимое множество, которое в пересечении с любым «уровнем познания» для A дает какой-либо «уровень познания» для B. (Отрицание $\neg A$ в традиционной конструктивной логике мы будем понимать как $A \supset 1 = 0$). Точно так же «уровнем познания» для $\forall x_i A$ естественно считать всякое такое рекурсивно-перечислимое множество, что «цилиндр», восстановленный из него вдоль оси x_i есть «уровень познания» A. Однако для точного определения таких рекурсивно-перечислимых множеств, очевидно, недостаточно рассматривать какие-либо фиксированные «уровни познания» предикатов A и B; необходимо обладать каким-то общим описанием «уровней познания», чтобы понимать, что значит «любой» «уровень познания» данного предиката; это общее описание должно входить как составная часть в конструктивное описание «уровней познания» для $A \supset B$ и $\forall x_i A$. Это общее описание оказывается невозможным получить раз навсегда в законченном конструктивном виде; мы вынуждены будем ограничиваться рассмотрением лишь некоторых рекурсивно-перечислимых множеств, относительно которых мы знаем, что они действительно являются «уровнями познания» рассматриваемого предиката. Вследствие этого «уровня познания» естественно вводить уже не как рекурсивно-перечислимые множества, а как операторы, описывающие зависимость соответствующих рекурсивно-перечислимых множеств от информации указанного типа. Естественно попытаться, таким образом, связать с каждым предикатом некоторый оператор над рекурсивно-перечислимыми множествами, полностью характеризующий этот предикат. Это оказывается возможным на основе системы определений, вводимой в § 3, 4, 5.

§ 3. Основные определения и обозначения

Мы будем рассматривать лишь конструктивные объекты и пользоваться лишь конструктивными методами рассуждений; рассматривая в качестве объектов логические формулы со связками &, $\vee$, $\supset$, $\urcorner$, $\forall$, $\exists$, мы будем в метаязыке пользоваться суждениями с теми же связками. В метаязыке будем пользоваться правилами рассуждений конструктивного логико-арифметического исчисления ([4]; [2], § 19); таким образом, по существу мы используем в метаязыке определенный „рабочий вариант" понятия конструктивной истинности, рассматривая в роли этого понятия выводимость в конструктивном логико-арифметическом исчислении. Мы употребляем здесь такой же прием, как в [3] (см. также [6], стр. 374).

Понятия частично-рекурсивной функции (ЧРФ), общерекурсивной функции (ОРФ), примитивно-рекурсивной функции (ПРФ), а также основные понятия, связанные с ними, вводятся так же, как в [2]. В частности, геделевы номера (г. н.) ЧРФ определяются так же, как в [2], § 56; мы будем считать, что г.н. каждой ЧРФ содержит в себе также информацию о размерности этой ЧРФ.

Мы будем употреблять Λ-обозначения, вводимые в [2] на стр. 306—307, а именно: если φ — некоторая $(n+m)$ — местная ЧРФ, то посредством $\Lambda x_1 x_2 \ldots x_n \varphi (y_1 \ldots y_m, x_1, \ldots, x_n)$ будет обозначаться ПРФ, выдающая по каждой системе $(\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_m)$ некоторый г. н. функции $\varphi(\overline{y}, \ldots, \overline{y}_m, x_1, \ldots, x_n)$ с фиксированными $(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_m)$.

Посредством E будем обозначать некоторый фиксированный г. н. тождественной функции $f(x) = x$. Будем считать фиксированным некоторое конструктивное взаимно-однозначное соответствие между системами натуральных чисел (всевозможных длин) и натуральными числами (см., например, [12] § 4, п. 6). Натуральное число, соответствующее системе $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при указанном соответствии, будем называть гёделевым номером (г. н.) этой системы. Будем говорить, что система $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть продолжение системы $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ (а также, что система $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ есть начало системы $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$) если $n \geqslant m$, и $x_i = y_i$ при $1 \leqslant i \leqslant m$. Многомерные рекурсивно-перечислимые множества (МРПМ) вводятся посредством конструктивных определений, аналогичных определениям из [15], п.4.4. Натуральные числа мы будем отождествлять со словами в двухбуквенном алфавите (этот алфавит из технических соображений мы будем в дальнейшем вводить в виде $\{a, b\}$, а не $\{0, 1\}$, как это чаще всего делается), основываясь на обычно употребляемом в этой связи взаимно-однозначном соответствии ([16], стр. 131; [15], п. 11.1); понятие МРПМ оказывается, таким образом, эквивалентным понятию V-перечислимого множества в двухбуквенном алфавите ([17]). Гёделевым номером (г. н.) МРПМ будем называть г. н. всякой ЧРФ, такой, что ее область определения совпадает с этим МРПМ, и все значения ее суть нули. Мы будем употреблять некоторые операции над МРПМ, рассматриваемые в [17], а именно: $\times$ (декартово произведение), $\cap$ (пересечение), $\cup$ (сумма), $\downarrow_i$ (проекция вдоль i-й координаты), T_{ij} (перестановка i-й и j-й координат). Эти действия, так же, как и другие вводимые ниже операции над МРПМ, рассматриваются в дальнейшем в двух аспектах: (1) как действия над МРПМ; (2) как действия над гёделевыми номерами МРПМ; это различие мы не будем отражать в обозначениях. Через V и 0 будем обозначать соответственно некоторый фиксированный г.н. одномерного МРПМ, которому принадлежат все натуральные числа, и некоторый фиксированный г.н. пустого МРПМ; если A—некоторое МРПМ, то через A^n будем обозначать $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ раз}}$.

Через $((N))$ будем обозначать одномерное одноэлементное МРПМ, единственным элементом которого является натуральное число N. Отношения $A \subseteq B$ и $A = B$ между МРПМ определяются естественным образом; принадлежность системы натуральных чисел $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ МРПМ A обозначается, как обычно, посредством $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in A$.

Операции вида $\bigcup\limits_{\xi} A_\xi$ и $\bigcup\limits_{k=0}^{N} A_k$, где A — некоторая алгорифмическая последовательность МРПМ одинаковой размерности, определяются естественным образом (см., например, [15], стр. 79). Посредством $\uparrow_i$ мы будем обозначать операцию, определяемую следующим образом: если A есть г. н. МРПМ размерности k, то

$$\uparrow_i A = \begin{cases} A \times V^{i-k}, & \text{если } k < i, \\ T_{1i}(V \times \downarrow_1 (T_{1i} A)), & \text{если } k \geqslant i. \end{cases}$$

Операцию $\uparrow_i$ мы будем называть операцией генерализации; она будет в дальнейшем играть роль операции введения фиктивного аргумента для тех случаев, когда она применяется к МРПМ размерности, меньшей i; в других случаях ее роль будет аналогична роли операции проектирования. Условимся придавать смысл выражениям $x \cap y$ и $x \cup y$ также и в тех случаях, когда x и y суть г.н. МРПМ различной размерности; если, например, x и y суть г.н. МРПМ размерности, соответственно, k и l, причем $k < l$, то под обозначениями $x \cap y$ и $x \cup y$ мы будем понимать, соответственно $(\uparrow_l x) \cap y$ и $(\uparrow_l x) \cup y$.

Для дальнейшего нам потребуется наряду с МРПМ также и понятие бесконечномерного рекурсивно-перечислимого множества — БРПМ. Множества такого типа понимаются как множества систем натуральных чисел, однако, в отличие от МРПМ, данному БРПМ могут принадлежать системы различных длин. Каждое БРПМ задается некоторым г.н. некоторого одномерного МРПМ; мы считаем, что система $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принадлежит рассматриваемому БРПМ в том и только в том случае, когда ее гёделев номер принадлежит соответствующему одномерному МРПМ. Операции $\cup$, $\cap$, $\downarrow_i$, $\times$ над БРПМ, отношения $\subseteq$ и $=$ между БРПМ, а также отношение принадлежности $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$, где A есть БРПМ, определяются естественным образом. Операция $\uparrow_i$ над БРПМ определяется следующими соотношениями: если A есть БРПМ, то $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \uparrow_i A$ в том и только в том случае, когда $n = i$, и какой-нибудь из кортежей $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ при $k < i$ принадлежит A, или же когда $n \geqslant i$ и какой-либо из кортежей $(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, d, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ при некотором натуральном d принадлежит A.

Очевидно, что для всякого МРПМ A можно построить БРПМ B такое, что какова бы ни была система натуральных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, соотношение $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B$ равносильно $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$. БРПМ B с указанными свойствами будем называть бесконечномерным образом МРПМ A. Операциям $\cup$, $\cap$, $\downarrow_i$, $\times$, $\uparrow_i$ над МРПМ, очевидно, соответствуют такие же операции над их бесконечномерными образами; то же справедливо для отношений $\subseteq$ $=$ между МРПМ. Для БРПМ мы определим также отношения $\underset{m}{\subseteq}$ и $\underset{m}{=}$ следующим образом: если A и B — какие-либо БРПМ, m — натуральное число, то $A \underset{m}{\subseteq} B$ имеет место в том и только в том случае, когда для любой системы $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ оказывается: если $n \geqslant m$, и $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$, то $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B$; соотношение $A \underset{m}{=} B$ имеет место в том и только в том случае, когда $A \underset{m}{\subseteq} B$ и $B \underset{m}{\subseteq} A$. Будем говорить, что система $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *условно принадлежит* БРПМ A и писать $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \dot{\in} A$, если какое-либо продолжение этой системы принадлежит A. Будем говорить, что БРПМ A является ***замкнутым***, если вместе с любой системой натуральных чисел оно включает также все продолжения этой системы. ***Замыканием*** БРПМ A будем называть БРПМ B, такое, что $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B$ в том и только в том случае, когда хотя бы одна из систем $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ при $0 \leqslant k \leqslant n$ принадлежит A. Легко видеть, что замыкание A содержится во всяком замкнутом БРПМ, содержащем A.

Операторы заданного типа $(n_1, n_2, \ldots, n_k \to n_{k+1})$ над МРПМ определяются так же, как V-вычислимые операторы в [17], стр. 95, [12] (или, что равносильно, как эффективные операции из [13], или как эффективные операторы из [19]). В соответствии с теоремой 14 из [17] и теоремой Майхилла о представлении перечислимых множеств ([18]; см. также [15], стр. 150), такие операторы представимы в виде ПРФ, выдающих по всяким k-членным системам г.н. МРПМ размерностей $n_1, n_2, \ldots, n_k$ некоторый г.н. МРПМ размерности n_{k+1} и удовлетворяющих естественным условиям корректности; обратно, каждой ПРФ указанного типа соответствует некоторый V-вычислимый оператор в смысле соответствующего определения из [17]. В дальнейшем вместо „V-вычислимый оператор“ мы будем говорить „оператор над МРПМ“; гёделевы номера (г.н.) таких операторов вводятся естественным образом, например, как г.н. ПРФ (в гёделевской нумерации ЧРФ), определяющих соответствующие операторы над МРПМ.

Будем рассматривать конструктивную нумерацию ПРФ, вводимую с помощью двуместной ОРФ, универсальной для одноместных ПРФ; в роли двуместной ОРФ, универсальной для одноместных ПРФ, будем использовать функцию, построенную в [21], стр. 107—108 (мы могли бы взять в той же роли функцию, построенную в [15] п. 5.2); эту функцию мы будем обозначать в дальнейшем через F. Петер-Робинсоновым номером (п.-р. н.) одноместной ПРФ ψ мы будем называть всякое натуральное число e, такое, что $F(e, t) = \psi(t)$ при любом натуральном t. Посредством E' условимся обозначать некоторый (фиксированный) п.-р. н. тождественной функции $f(x) = x$. ЧРФ, имеющую г.н. x, будем обозначать через $\{x\}$; значение ее в точке $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, будем обозначать через $\{x\}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$; если x есть г.н. ЧРФ с размерностью, отличной от n, то будем считать, что значение выражения $\{x\}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ не определено. МРПМ, имеющее г.н. x, условимся обозначать через $\langle x \rangle$. Оператор над МРПМ, имеющий г.н. x, условимся обозначать через $[x]$; г.н. МРПМ, получающегося в результате применения оператора $[x]$ к МРПМ $\langle t \rangle$, условимся обозначать через $[x](t)$. Одноместную ПРФ, имеющую п.-р. н. x, будем обозначать через $\{\{x\}\}$; значение этой ПРФ в точке t будем обозначать посредством $\{\{x\}\}(t)$. Посредством $\langle\!\langle x \rangle\!\rangle$ условимся обозначать БРПМ, имеющее г.н. x.

Лемма 3.1* (аналог теоремы XXIII из [2], § 65, для п.-р. н.). *Для любой двуместной ПРФ υ можно построить одноместную ПРФ ε, такую, что для любых натуральных a и y*

$$\upsilon(a, y) = \{\{\varepsilon(a)\}\}(y).$$

Доказательство. Непосредственно из определения указанной выше ОРФ, универсальной для всех одноместных ПРФ, легко усматривается, что можно построить ПРФ θ и ρ такие, что при любых a, b, x

$$\{\{\theta(a, b)\}\}(x) = \{\{a\}\}(\{\{b\}\}(x));$$

$$\{\{\rho(a)\}\}(x) = 2 \cdot (\{\{a\}\}(x)) + 1.$$

Через σ и φ обозначим ПРФ, такие, что при любых x и y

$$\sigma(x, y) = 2^x \cdot (2y + 1) \dot{-} 1;$$

$$\upsilon(x, y) = \varphi(\sigma(x, y)).$$

Через e_0 и e_1 обозначим натуральные числа, такие, что при любом x

$$\{\{e_0\}\}(x) = \varphi(x),$$

$$\{\{e_1\}\}(x) = 2x.$$

Тогда при всяком фиксированном a и при любом y

$$\upsilon(a, y) = \varphi(\sigma(a, y)),$$

* Эта лемма известна (аналогичные утверждения указаны, например, в [33]), однако автор не нашел в литературе формулировки, удобной для ссылок.

а потому можно положить $\varepsilon(a) = \theta(e_0, \varepsilon^*(a))$, где $\varepsilon^*(a)$ определяется соотношениями

$$\varepsilon^*(0) = e_1;$$

$$\varepsilon^*(a+1) = \rho(\varepsilon^*(a)).$$

Лемма доказана.

Следствие. Для любой $(n+1)$-местной ПРФ ψ можно построить n-местную ПРФ ε, такую, что при любых натуральных $a_1, a_2, \ldots, a_n, t$

$$\psi(a_1, a_2, \ldots, a_n, t) = \|\varepsilon(a_1, a_2, \ldots, a_n)\|(t).$$

Доказательство этого утверждения легко получается из леммы 1 посредством рассмотрения примитивно-рекурсивной взаимно-однозначной нумерации n-членных систем натуральных чисел.

§ 4. Операторы и множества специальных типов

В этом параграфе мы определим некоторый язык* для задания операторов над МРПМ; этот язык будет удобен в дальнейшем для определения некоторых операторов и множеств специальных типов. Мы определим R-схемы как слова определенного вида в алфавите $\{a, b, 0, p, x, (,), , , f, \rightarrow, *\}$. Натуральные числа, в соответствии с ранее введенным соглашением, будем рассматривать как слова в алфавите $\{a, b\}$; вместе с тем мы будем употреблять и обычные обозначения $0, 1, 2, \ldots$. ***Функциональным кодом*** натурального числа N будем называть слово 0, если $N = 0$, и слово $\underbrace{f(f \ldots f}_{N \text{ раз}}(0)\ldots)$, если $N > 0$; функциональный код натурального числа N будем обозначать через $\overline{N}$. Отметим, что сами по себе натуральные числа, понимаемые как слова в алфавите $\{a, b\}$, будут фигурировать в R-схемах лишь в роли „индексов" предикатных и предметных переменных; в качестве обозначений натуральных чисел как объектов арифметического рассмотрения в R-схемах всегда будут употребляться функциональные коды натуральных чисел. Слова вида (pN) (соответственно, (xN)), где N—положительное натуральное число, т. е. непустое слово в алфавите $\{a, b\}$, будем именовать предикатными (соответственно предметными) переменными и сокращенно обозначать через p_N (соответственно x_N). Каждой предикатной переменной p_N будем приписывать размерность l, удовлетворяющую условию $\exists k (N = 2^l \cdot (2k+1))$. *Предметные термы* определяются следующими правилами: (1) предметные переменные и слово 0 суть предметные термы, (2) если T—предметный терм, то $f(T)$—также предметный терм. *Предикатные термы* определяются как слова вида $p_N(T_1, T_2, \ldots, T_k)$, где $T_1, T_2, \ldots, T_k$—произвольные предметные термы, p_N есть произвольная предикатная

* Этот язык аналогичен языку формальных систем, определенных в [35].

переменная размерности k; переменную p_N будем называть *главной переменной* терма $p_N(T_1, T_2, \dots, T_k)$. *Секвенция* определяется как произвольное слово вида $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m \to \Pi_{m+1}$, где $m \geqslant 0$, и $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{m+1}$ — произвольные предикатные термы; при этом слово $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m$ называется *антецедентом*, а слово Π_{m+1} — *сукцедентом* этой секвенции. *R-схема* определяется как произвольное слово вида $C_1 * C_2 * \cdots * C_n$, где $n \geqslant 1$, и $C_1, C_2, \dots, C_n$ — произвольные секвенции. Главную переменную последнего терма секвенции C_n будем называть *главной переменной* R-схемы $C_1 * C_2 * \cdots * C_n$. *Входной переменной* R-схемы $C_1 * C_2 * \cdots * C_n$ будем называть всякую предикатную переменную, входящую в антедецедент хотя бы одной из секвенций $C_1, C_2, \dots, C_n$ и не входящую ни в один из сукцедентов этих секвенций.

Введем основные правила вывода, при помощи которых из секвенций и систем секвенций могут выводиться новые секвенции.

Правило подстановки

Из секвенции C можно вывести всякую секвенцию, получающуюся из C посредством замены всех вхождений некоторой предметной переменной x_N функциональным кодом $\overline{m}$ произвольного натурального числа m.

Правило сечения

Из секвенций вида $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n \to \Omega_1$; $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n \to \Omega_2$; $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n \to \Omega_m$; $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m \to \psi$ можно вывести секвенцию $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n \to \psi$.

Правило утончения

Из секвенции $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n \to \Omega$ можно вывести любую секвенцию вида $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n, \Pi \to \Omega$.

Правило перестановки

Из секвенции $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_l, \Pi_{l+1}, \dots, \Pi_n \to \Omega$ можно вывести секвенцию $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{l+1}, \Pi_l, \dots, \Pi_n \to \Omega$.

Будем говорит, что секвенция C *выводима* из секвенций $C_1, C_2, \dots, C_n$, если можно построить конечную последовательность секвенций, в которой последний член есть C, и каждый член или совпадает с одной из секвенций $C_1, C_2, \dots, C_n$, или получается из предыдущих членов при помощи правила подстановки, сечения, утончения или перестановки.

С каждой R-схемой $C_1 * C_2 * \cdots * C_n$ мы будем связывать некоторое МРПМ и некоторый оператор над МРПМ, а именно: если p_N — главная переменная R-схемы $C_1 * C_2 * \cdots * C_n$ и $p_{l_1}, p_{l_2}, \dots, p_{l_r}$ — все различные входные переменные этой R-схемы, причем размерности переменных $p_N, p_{l_1}, p_{l_2}, \dots, p_{l_r}$ суть, соответственно, $k, k_1, k_2, \dots, k_r$, то, как легко видеть, можно построить оператор $[f]$ над МРПМ, типа $(k_1, k_2, \ldots, k_r \to k)$, такой, что, каковы бы ни были МРПМ $\langle x_1 \rangle$, $\langle x_2 \rangle, \ldots, \langle x_r \rangle$, если каждое МРПМ $\langle x_i \rangle$ является l_i-мерным при $1 \leqslant i \leqslant r$, то $[f](x_1, x_2, \ldots, x_r)$ есть г.н. k-мерного МРПМ, такого, что $(n_1, n_2, \ldots, n_k) \in \langle [f](x_1, x_2, \ldots, x_r) \rangle$ в том и только в том случае, когда секвенция $\to p_N(\overline{n}_1, \overline{n}_2, \ldots, \overline{n}_k)$ выводима из списка секвенций $C_1, C_2, \ldots, C_n$, дополненного некоторыми секвенциями вида $\to p_{l_i}(\overline{m}_1, \overline{m}_2, \ldots, \overline{m}_{k_i})$, где $1 \leqslant i \leqslant r$ и $(m_1, m_2, \ldots, m_{k_i}) \in \langle x_i \rangle$. Оператор $[f]$, определенный указанным образом, мы будем называть оператором, определенным R-схемой $C_1 * C_2 * \cdots * C_n$. Если $[f]$ — оператор, определенный R-схемой $C_1 * C_2 * \cdots * C_n$, то МРПМ $\langle [f](0, 0, \ldots, 0) \rangle$ мы будем называть МРПМ, определенным R-схемой $C_1 * C_2 * \cdots * C_n$.

Следующее утверждение легко получается на основании теоремы 15 из [17] (см. также [14], теорема 6, и [19]).

Для всякого оператора $[f]$ над МРПМ можно построить R-схему, такую, что оператор $[f]$ эквивалентен оператору, определенному этой R-схемой.

В частности, для всякого МРПМ $\langle x \rangle$ фиксированной размерности можно построить такую R-схему, что $\langle x \rangle$ равняется МРПМ, определенному этой R-схемой.

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь операторы некоторого специального вида, которые мы будем называть L-операторами. Введем понятие L-оператора ранга N, где N — любое натуральное число; L-операторами (без указания ранга) мы будем после этого именовать L-операторы любых натуральных рангов. L-оператором ранга 0 будем называть любое МРПМ. L-оператором ранга N, где $N > 0$, будем называть всякий оператор $[x]$ типа $(5 \to 2)$, такой, что для любого пятимерного МРПМ $\langle t \rangle$ имеют место соотношения $\langle [x](t) \rangle \subseteq ((N-1)) \times V^4$ и $\langle [x](t) \rangle = \langle [x](t \cap (((N-1)) \times V^4)) \rangle$ (иначе говоря, в МРПМ $\langle [x](t) \rangle$ первые компоненты всех элементов равны $N-1$, и это МРПМ зависит лишь от таких элементов МРПМ $\langle t \rangle$, в которых первые компоненты равны $N-1$). Поскольку в дальнейшем мы будем рассматривать лишь операторы, являющиеся L-операторами, условимся каждую R-схему рассматривать при каждом фиксированном натуральном N как изображение некоторого L-оператора ранга N, а именно: если рассматриваемая R-схема задает некоторый оператор $[x]$ типа $(n_1, n_2, \ldots, n_k \to n_{k+1})$ и $N = 0$, то будем считать, что эта R-схема изображает L-оператор $\langle [x](0, 0, \ldots, 0) \rangle$ ранга 0. Если $N > 0$ и тип оператора $[x]$ отличен от $(5 \to 2)$, то будем считать, что рассматриваемая R-схема изображает L-оператор ранга N, выдающий тождественно пустое множество. Если, наконец, $N > 0$, оператор $[x]$ есть оператор типа $(5 \to 2)$, p_k есть главная переменная рассматриваемой R-схемы, p_l есть входная переменная этой R-схемы, то тогда будем считать, что указанная R-схема изображает такой L-оператор, который задается новой R-схемой, получаемой из рассматриваемой R-схемы посредством следующих преобразований (где p_s и p_t суть различные предикатные переменные размерности 2, отличные от всех переменных рассматриваемой R-схемы): (1) в R-схему добавляются секвенции $\to p_t(0, 0)$; $p_t(x, y) \to p_t(f(x), f(y))$; (2) в R-схему добавляется секвенция $p_k(\overline{N-1}, x) \to p_s(\overline{N-1}, x)$, которая записывается на последнее место в схеме; (3) всякое вхождение элементарной формулы вида $p_l(T_1, T_2, T_3, T_4, T_5)$ заменяется на $p_t(\overline{N-1}, T_1)$, $p_l(\overline{N-1}, T_2, T_3, T_4, T_5)$. Легко проверить, что если рассматриваемая R-схема определяет какой-либо L-оператор ранга N, то новая R-схема определяет оператор, эквивалентный первоначальному, и что во всех случаях новая R-схема определяет некоторый L-оператор N-го ранга.

Построим теперь гёделеву нумерацию всевозможных R-схем (в точной аналогии с тем, как в [2], § 56, строится гёделева нумерация схем рекурсивных равенств). Эта нумерация, очевидно, может быть расширена так, чтобы каждое натуральное число было бы гёделевым номером некоторой R-схемы; впередь мы будем считать, что рассматриваемая нумерация расширена указанным образом. Посредством $[x]_N$ условимся обозначать L-оператор N-го ранга, изображаемый R-схемой с гёделевым номером x, в соответствии с введенными выше соглашениями.

Определим теперь некоторые понятия, связанные с L-операторами. Трехместную ЧРФ ρ, перерабатывающую всякую тройку натуральных чисел (N, x, t), где t есть г.н. какого-либо МРПМ размерности 5, в г.н. некоторого БРПМ, определим сдедующими соотношениями (в которых, как и в дальнейшем, через $R(N, x, t)$ обозначено БРПМ, имеющее г.н. $\rho(N, x, t)$):

$$R(0, x, t) = \ll x \gg;$$

$$R(N+1, x, t) = \bigcup_{(N, \xi) \in [x]_{N+1}(t)} R(N, \xi, t).$$

Легко видеть, что всегда, если $\langle t' \rangle \subseteq \langle t'' \rangle$, то $R(N, x, t') \subseteq \subseteq R(N, x, t'')$. В дальнейшем, $R(N, x, t)$ мы будем именовать раскрытием L-оператора $[x]_N$ относительно МРПМ $\langle t \rangle$ размерности 5.

Лемма 4.1. *Можно построить четырехместные ЧРФ ι и η, такие, что каковы бы ни были натуральные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y, x, t, если x есть г. н. системы $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, и $\langle t \rangle$ есть МРПМ размерности 5, то $!\iota(N, x, y, t)$ равносильно $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \in R(N, y, t)$, $!\eta(N, x, y, t)$ равносильно $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin R(N, y, t)$, и если $!\iota(N, x, y, t)$ (соответственно, $!\eta(N, x, y, t)$), то число $\iota(N, x, y, t)$ (соответственно $\eta(N, x, y, t)$) есть г. н. системы $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N)$, удовлетворяющей следующим условиям: $\xi_N = y$;*

$(i, \xi_i) \in [\xi_{i+1}]_{i+1}(t)$ *при* $0 \leqslant i < N$; $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R(i, \xi_i, t)$ *(соответственно,* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R(i, \xi_i, t))$ *при* $0 \leqslant i \leqslant N$.

Доказательство этой леммы очевидным образом следует из определения $R(N, x, t)$ и из свойств суммы БРПМ.

Для любых натуральных x и N условимся посредством $[x]^{\bullet}_{N+1}$ обозначать г. н. L-оператора ранга $N+1$, определяемого R-схемой $\to p_4(\overline{N}, \overline{x})$; условимся также число $[\cdots[[x]^{\bullet}_{N+1}]^{\bullet}_{N+2}\cdots]^{\bullet}_{N+k}$ обозначать через $[x]^{\bullet k}_{N+k}$. Легко видеть, что всегда, если $\langle t \rangle$ есть МРПМ размерности 5, то $R(N+k, [x]^{\bullet k}_{N+k}, t) = R(N, x, t)$.

Мы определим при каждом фиксированном N некоторые действия над натуральными числами, рассматриваемыми как г.н. L-операторов N-го ранга, а именно: N-объединение $\overset{N}{\cup}$, N-пересечение $\overset{N}{\cap}$, N-генерализацию $\uparrow^N_i$. При $N=0$ эти действия совпадают с обычными действиями $\cup \cap \uparrow_i$ над г.н. БРПМ. Пусть уже определены операции $\overset{N}{\cup}, \overset{N}{\cap}, \uparrow^N_i$. Тогда операции $\overset{N+1}{\cup}, \overset{N+1}{\cap}, \uparrow^{N+1}_i$ определяются таким образом, что для любых x, y, t, u, v оказывается:

$$(u, v) \in \langle [x \overset{N+1}{\cup} y]_{N+1}(t) \rangle \text{ равносильно}$$

$$u = N \& \exists p \exists q (v = p \overset{N}{\cup} q \& (N, p) \in \langle [x]_{N+1}(t) \rangle \& (N, q) \in \langle [y]_{N+1}(t) \rangle);$$

$$(u, v) \in \langle [x \overset{N+1}{\cap} y]_{N+1}(t) \rangle \text{ равносильно}$$

$$u = N \& \exists p \exists q (v = p \overset{N}{\cap} q \& (N, p) \in \langle [x]_{N+1}(t) \rangle \& (N, q) \in \langle [y]_{N+1}(t) \rangle);$$

$$(u, v) \in \langle [\uparrow^{N+1}_i x]_{N+1}(t) \rangle \text{ равносильно}$$

$$u = N \& \exists p (v = \uparrow^N_i p \& (N, p) \in \langle [x]_{N+1}(t) \rangle).$$

Легко видеть, что указанные операции могут быть заданы таким образом, чтобы существовали четырехмерные МРПМ (являющиеся примитивно-рекурсивными множествами) Π, Σ, Γ, такие, что принадлежность четверки натуральных чисел (x, y, z, u) МРПМ Π, Σ, Γ равносильна соотношениям, соответственно, $(y \overset{x}{\cap} z = u)$, $(y \overset{x}{\cup} z = u)$, $(\uparrow^x_z y = u)$. Впредь мы будем предполагать, что операции $\overset{N}{\cap}$, $\overset{N}{\cup}$, $\uparrow^N_i$, определены указанным образом и через Π, Σ, Γ будем обозначать МРПМ, удовлетворяющие указанным условиям.

Лемма 4.2. *Пусть x, y, N таковы, что $N=0$ или для всякого пятимерного МРПМ $\langle t \rangle$ оба МРПМ $[x]_N(t)$ и $[y]_N(t)$ непусты. Тогда для всякого пятимерного МРПМ $\langle t \rangle$*

$$R(N, x \overset{N}{\cup} y, t) = R(N, x, t) \cup R(N, y, t);$$

$$R(N, x \overset{N}{\cap} y, t) = R(N, x, t) \cap R(N, y, t).$$

Лемма 4.3. *Для любых N, x и для всякого пятимерного МРПМ* $\langle t \rangle$

$$R(N, \uparrow_i^N x, t) = \uparrow_i R(N, x, t).$$

Доказательства обеих лемм легко получаются на основании определений операций $\overset{N}{\cup}$, $\overset{N}{\cap}$, $\uparrow_i^N$ и раскрытия R; условие непустоты МРПМ $[x]_N(t)$ и $[y]_N(t)$ требуется лишь при доказательстве соотношения $R(N, x, t) \cup R(N, y, t) \subseteq R(N, x \overset{N}{\cup} y, t)$.

§ 5. G-числа и правильные числа

В этом параграфе мы определим понятия F-числа N-го ранга, p-числа N-го ранга, G-числа N-го ранга, а также пятиместное отношение между натуральными числами; „y погружаем в z посредством u для размерности v на уровне ранга N"; кроме того, мы определим понятие правильного натурального числа. При этом всякое F-число (соответственно, G-число) t N-го ранга будет г. н. пятимерного МРПМ, такого, что всегда если $(x, y, z, u, v) \in \langle t \rangle$, то $x + 1 = N$ (соответственно, $x + 1 \leqslant N$); всякое p-число N-го ранга будет п.-р. н. одноместной ПРФ.

Определения указанных понятий и отношения мы введем при помощи индукции по N. При $N = 0$ положим:

(1) F-число 0-го ранга есть число 0^5 и только оно.

(2) G-число 0-го ранга есть число 0^5 и только оно.

(3) p-число 0-го ранга есть число E' и только оно.

(4) Число y погружаемо в число z посредство числа u для размерности v на уровне ранга 0, если $u = E'$ и $\langle\!\langle y \rangle\!\rangle \underset{v}{\subseteq} \langle\!\langle z \rangle\!\rangle$.

Допустим теперь, что мы уже определили указанные понятия и отношение для рангов $0, 1, 2, \ldots, N$; введем соответствующие определения для ранга $N + 1$.

(1) Натуральное число t будем называть F-числом $(N + 1)$-го ранга, если $\langle t \rangle$ есть пятимерное МРПМ, такое, что всегда если $(x, y, z, u, v) \in \langle t \rangle$, то $x = N$, и y погружаемо в z посредством u для размерности v на уровне ранга N.

(2) Натуральное число t будем называть G-числом $(N + 1)$-го ранга, если $\langle t \rangle$ есть пятимерное МРПМ, такое, что всегда если $(x, y, z, u, v) \in \langle t \rangle$, то $x \leqslant N$, и при всяком $k \leqslant N$ оказывается: $t \cap (((k)) \times V^4)$ есть F-число ранга $k + 1$.

(3) Натуральное число u будем называть p-числом $(N + 1)$-го ранга, если для всякого G-числа t $(N + 1)$-го ранга $\{\{u\}\}(t)$ также есть G-число $(N + 1)$-го ранга.

(4) Будем говорить, что y погружаемо в z посредством u для размерности v на уровне ранга $N + 1$, если u есть p-число $(N + 1)$-го

ранга, и для всякого G-числа t $(N+1)$-го ранга оказывается: $R(N+1, x, t) \underset{v}{\subseteq} R(N+1, y, \{\{u\}\}(t))$. Этим завершается определение указанных выше трех понятий и одного отношения.

Натуральное число t будем называть *правильным*, если $\langle t \rangle$ есть пятимерное МРПМ, и при всяком k оказывается: $t \cap (((k)) \times V^4)$ есть F-число $(k+1)$-го ранга. (Очевидно, что всякое G-число N-го ранга при любом N является правильным).

В дальнейшем среди введенных понятий и отношений основную роль будут играть: понятие правильного натурального числа и понятие G-числа N-го ранга. К этим понятиям будут сводиться (в определенном конструктивном смысле) некоторые понятия конструктивной истинности для произвольной арифметической формулы; при этом к понятию правильного натурального числа будет сводиться понятие истинности произвольной арифметической формулы, и для каждой конкретной арифметической формулы можно будет указать достаточно высокий ранг N, такой, что понятие истинности этой формулы сводится к понятию G-числа ранга N. Понятие правильного натурального числа, по-видимому, не может быть описано посредством формулы формальной арифметики, однако при каждом фиксированном N понятие G-числа ранга N может быть описано при помощи формулы указанного типа (соответствующие формулы будут приведены в § 8).

§ 6. $T\omega$-истинность арифметических формул

В этом параграфе мы определим понятие конструктивной $T\omega$-истинности арифметической формулы, основывающееся на понятиях, определенных в предыдущем параграфе; это понятие соответствует концепциям традиционной конструктивной логики. Как и ранее, рассматриваем формулы формальной арифметики ([2], § 19). *Ранг* формулы A определяется следующими условиями:

(1) ранг элементарной арифметической формулы есть 0;

(2) если A есть формула N-го ранга, B — формула M-го ранга, x_i — любая предметная переменная, то $A \& B$ и $A \vee B$ суть формулы ранга $\max(M, N)$, $A \supset B$ есть формула ранга $\max(M, N)+1$, $\neg A$ и $\forall x_i A$ суть формулы ранга $N+1$, $\exists x_i A$ есть формула ранга N.

Для каждой формулы A натуральное число ω_A определяется следующими правилами:

(1) Если A — элементарная формула, и n есть наибольший из индексов предметных переменных, входящих в A, то ω_A есть г. н. БРПМ, удовлетворяющего следующему условию: $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \in \langle\langle \omega_A \rangle\rangle$ только в том случае, когда $m \geqslant n$, и истинна формула, получающаяся из A посредством постановки термов $\overbrace{0'' \cdots '}^{x_1 \text{ раз}}, \overbrace{0'' \cdots '}^{x_2 \text{ раз}}, \dots, \overbrace{0'' \cdots '}^{x_n \text{ раз}}$

в формулу A на места ее соответствующих переменных (мы предполагаем фиксированным некоторый стандартный способ построения подобного числа по заданной формуле A и через ω_A обозначаем число, удовлетворяющее указанным условиям и построенное фиксированным стандартным способом).

(2) Если A есть формула N-го ранга, B есть формула M-го ранга, k есть $\max(M, N)$, n есть максимальный индекс свободных и связанных предметных переменных, встречающихся в формулах A и B, то тогда $\omega_{A\&B}$ есть $[\omega_A]_k^{*(k-N)} \overset{k}{\cap} [\omega_B]_k^{*(k-M)}$; $\omega_{A\vee B}$ есть $[\omega_A]_k^{*(k-N)} \overset{k}{\cup} [\omega_B]_k^{*(k-M)}$; $\omega_{\urcorner A}$ совпадает с $\omega_{A\supset(1=0)}$; $\omega_{A\supset B}$ есть г. н. R-схемы, на последнем месте которой стоит секвенция $\rightarrow p_4(\overline{k}, \overline{0})$, на предпоследнем месте — секвенция $p_{16}\ (\overline{k}, \overline{[\omega_A]_k^{*(k-N)}}, x_1, x_2)$, $p_{32}(\overline{k}, x_2, \overline{[\omega_B]_k^{*(k-M)}}, x_3, \overline{n}) \rightarrow p_4(\overline{k}, x_1)$ и на остальных местах расположена группа секвенций, определяющих МРПМ П, не содержащих p_{32} и p_4, содержащих p_{16} в качестве главной переменной внутри этой группы и не содержащих каких-либо входных переменных.

(3) Если A есть формула N-го ранга, n есть максимум индексов ее свободных и связанных предметных переменных, то $\omega_{\exists x_i A}$ есть $\uparrow_i^N \omega_A$, и $\omega_{\forall x_i A}$ есть г. н. R-схемы, на последнем месте которой стоит секвенция $\rightarrow p_4(\overline{N}, \overline{0})$, на предпоследнем месте — секвенция $p_{16}(\overline{N}, \overline{i}, x_1, x_2)$, $p_{32}(\overline{N}, x_2, \overline{\omega}_A, x_3, \overline{n}) \rightarrow p_4(\overline{N}, x_1)$, и на остальных местах расположена группа секвенций, определяющих МРПМ Г, не содержащих p_{32} и p_4, содержащих p_{16} в качестве главной переменной внутри этой группы, и не содержащих каких-либо входных переменных.

Приведенные условия определяют число ω_A для каждой арифметической формулы A. Теперь пусть A есть формула N-го ранга, и пусть ω_A — соответствующее ей натуральное число; пусть n — максимальный индекс свободных и связанных переменных, встречающихся в A. Будем говорить, что правильное натуральное число t или же G-число t какого-либо ранга является сильным (соответственно, квалифицированно сильным) для A в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Subset R(N, \omega_A, t)$ (соответственно $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R(N, \omega_A, t)$). Если t является сильным для A в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то будем также говорить, что формула A $T\omega$-истинна в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ относительно t. Понятие $T\omega$-истинности относительно t определяет тот вариант понятия истинности в традиционной конструктивной логике, о котором шла речь в начале этой статьи. Каждое конкретное правильное натуральное число t определяет некоторый частный вид $T\omega$-истинности. При этом, как легко убедиться, если мы имеем конструктивно перечислимое множество правильных натуральных чисел, т. е. имеем одноместную ОРФ θ, каждое значение которой есть правильное натуральное число, то г. н. объединения МРПМ $\langle \theta(n) \rangle$, т. е. число $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \theta(n)$ также есть правильное натуральное число, и если формула A $T\omega$-истинна в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ относительно какого-либо из чисел $\theta(m)$, то A $T\omega$-истинна в той же точке относительно $\bigcup\limits_{m=0}^{\infty} \theta(m)$. Как будет видно из содержания следующего параграфа, информация о правильном натуральном числе, сильном относительно A в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равносильна информации о реализации $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в смысле соответствующего определения С. К. Клини [2], § 81; однако понятие реализации всегда связывается с одной конкретной формулой, в то время как правильное натуральное число может быть сильным одновременно для многих формул (например, для всех формул, выводимых в конструктивной формальной арифметике или иной конструктивной формальной системе).

§ 7. Соотношения между $T\omega$-истинностью и реализуемостью формул

В этом параграфе мы установим конструктивную эквивалентность введенного в предыдущем параграфе определения $T\omega$-истинности арифметических формул и определения конструктивной истинности арифметических формул в соответствии с понятием реализуемости по С. К. Клини. Мы будем употреблять понятие реализуемости в том виде, как оно определено в [2], § 81. Посредством $(a)_i$, как и в [2], будем при $a \neq 0$ обозначать показатель, с которым i-ое простое число p_i входит в разложение a на простые множители (где $p_0 = 2$, $p_1 = 3$ и т. д.); полагаем, кроме того $(0)_i = 0$.

Пусть A — арифметическая формула, и пусть n — наибольший индекс свободных и связанных предметных переменных, встречающихся в A. n-местную ЧРФ φ будем называть *клиниевским уровнем познания* (или, сокращенно, *клинуром*) формулы A, если φ перерабатывает всякую систему натуральных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для которой она определена, в реализацию формулы, получающейся из A подстановкой натуральных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вместо ее соответствующих свободных переменных. (В частности, нигде не определенная функция от n переменных всегда является клинуром для предиката A указанного вида). Будем говорить, что клинур φ является *сильным* в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если он определен в этой точке.

Теорема 7.1. *Пусть A есть арифметическая формула N-го ранга, и n есть наибольший индекс свободных и связанных предметных переменных, встречающихся в A. Тогда можно построить $(n+1)$-местные ЧРФ Ω и θ, удовлетворяющие следующим условиям:*

(1) *Для любого G-числа N-го ранга t и для любых натуральных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ значение $\theta(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определено, и оно есть г. н. клинура для A.*

(2) *Для г. н. z любого клинура формулы A число $\Omega(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определено, и оно есть G-число N-го ранга.*

(3) *Если t есть G-число N-го ранга, сильное для A в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то $\theta(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть г. н. клинура, сильного для A в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

(4) *Если z есть г. н. клинура, сильного для A в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то $\Omega(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть G-число N-го ранга, квалифицированно сильное для A в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

Таким образом, согласно этой теореме, информация о клиниевской реализуемости формулы и информация о $T\omega$-истинности этой формулы конструктивно эквивалентны: исходя из каждой из них, можно получить другую посредством ЧРФ Ω и Θ. Отметим еще, что из теоремы 1 следует утверждение, которое получается посредством замены в формулировке этой теоремы слов „G-число N-го ранга" словами „правильное натуральное число". В самом деле, всякое G-число N-го ранга является правильным натуральным числом, и если t есть правильное натуральное число, то при всяком $N>0$ число $t \cap \left(\bigcup_{k=0}^{N-1}(((k)) \times V^4)\right)$ есть G-число N-го ранга, удовлетворяющее для любого x условию $R(N, x, t) = R\left(N, x, t \cap \left(\bigcup_{k=0}^{N-1}(((k)) \times V^4)\right)\right)$; поэтому при получении указанного утверждения из основной формулировки теоремы 1 мы можем в роли новой функции Ω взять ту же функцию Ω, которая была получена при доказательстве теоремы 1 в ее основной формулировке, а новую функцию Θ мы можем построить так, чтобы было

$$\Theta(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} \Theta'\left(t \cap \left(\bigcup_{k=0}^{N-1}(((k)) \times V^4)\right), x_1, x_2, \ldots, x_n\right) & \\ & \text{в случае } N>0; \\ \Theta'(0, x_1, x_2, \ldots, x_n) & \text{в случае } N=0, \end{cases}$$

где Θ' — функция, полученная в роли Θ при доказательстве основной формулировки теоремы 7.1.

Доказательство теоремы 7.1. Воспользуемся индукцией по построению формулы A.

Для случая элементарной формулы A требуемое утверждение очевидно, поскольку мы можем положить: $\Omega(z, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, $\Theta(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv l$, где l есть г. н. „максимального клинура" формулы A, т. е. г. н. n-местной ЧРФ, выдающей 0 в точках, где формула A истинна, и неопределенной в остальных точках.

Допустим теперь, что теорема доказана для формул A_1 и A_2, и докажем ее для формул $A_1 \& A_2$, $A_1 \vee A_2$, $A_1 \supset A_2$, $\neg A_1$, $\forall x_i A_1$, $\exists x_i A_1$. Во всей дальнейшей части доказательства через N, N_1 и N_2 мы будем обозначать ранги формул соответственно A, A_1 и A_2; через Ω_1, Θ_1, Ω_2, Θ_2 будем обозначать ЧРФ, удовлетворяющие условиям теоремы для формул соответственно A_1 и A_2 и построенные по предположению индукции. Через n, n_1 и n_2 будем обозначать максимумы индексов свободных и связанных предметных переменных, встречающихся в A, A_1 и A_2; ясно, что если A есть $A_1 \vee A_2$, $A_1 \& A_2$ или $A_1 \supset A_2$, то $n = \max(n_1, n_2)$, если же A есть $\exists x_i A_1$ или $\forall x_i A_1$, то $n = \max(n_1, i)$. В случаях, когда A имеет вид $A_1 \vee A_2$, $A_1 \& A_2$ или $A_1 \supset A_2$, через ω'_{A_1} и ω'_{A_2} будем обозначать соответственно числа $[\omega_{A_1}]_N^{*(N-N_1)}$ и $[\omega_{A_2}]_N^{*(N-N_2)}$. Вначале мы установим следующее вспомогательное утверждение: в условиях теоремы для построения ЧРФ Θ, удовлетворяющей требованиям этой теоремы, достаточно построить $(n+1)$-местную ЧРФ Θ^*, такую, что (1) если t есть G-число N-го ранга, и ЧРФ Θ^* определена в точке $(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то $\Theta^*(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть реализация формулы, получающейся из A подстановкой чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на места ее свободных переменных; (2) если t есть G-число N-го ранга, сильное для A в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то Θ^* определена в точке $(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Действительно, предположим, что построена ЧРФ Θ^*, удовлетворяющая только что указанным условиям. Тогда мы можем построить $(2n+1)$-местную ЧРФ ρ, такую, что при любых $t, x_1, x_2, \ldots, x_n, w_1, w_2, \ldots, w_n$ будет: $\rho(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, w_1, w_2, \ldots, w_n) = \Theta^*(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при $\sum_{i=1}^{n} |x_i - w_i| = 0$, и $\rho(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, w_1, w_2, \ldots, w_n)$ не определена в противном случае. Легко видеть, что ПРФ $\Lambda(w_1, w_2, \ldots, w_n) \cdot \rho(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, w_1, w_2, \ldots, w_n)$ будет удовлетворять всем условиям, указанным в формулировке теоремы 7.1 для функции Θ. Тем самым требуемое вспомогательное утверждение доказано.

Пусть формула A имеет вид $A_1 \vee A_2$. Тогда $N = \max(N_1, N_2)$.

В роли Θ^* возьмем ЧРФ такую, что в случае, когда значение $\Theta^*(t, x_1, \ldots, x_n)$ определено, оно равно всегда или

$$2^0 \cdot 3^{\left\{\Theta_1\left(t \cap \left(\bigcup_{k=0}^{N_1}(((k)) \times V^4)\right),\ x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}\right)\right\}(x_1, \ldots, x_{n_1})},$$

или

$$2^1 \cdot 3^{\left\{\Theta_2\left(t \cap \left(\bigcup_{k=0}^{N_2}(((k)) \times V^4)\right),\ x_1, x_2, \ldots, x_{n_2}\right)\right\}(x_1, x_2, \ldots, x_{n_2})};$$

первое или второе значение выбираются смотря по тому, какое из соотношений $(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}) \in R(N_1, \omega_{A_1}, t)$ или $(x_1, x_2, \ldots, x_{n_2}) \in R(N_2, \omega_{A_2}, t)$ обнаруживается ранее при перечислении соответствующих БРПМ.

Для построения ЧРФ Ω вначале строим $(n+1)$-местные ПРФ δ_1 и δ_2, такие, что при $1 \leqslant i \leqslant 2$ и при любых $z, x_1, \ldots, x_n$ число $\delta_i(z, x_1, \ldots, x_n)$ есть г. н. n_i-местной ЧРФ, определенной разве лишь в точке $(x_1, \ldots, x_{n_i})$ и удовлетворяющей условию:

$$\{\delta_l(z, x_1, \dots, x_n)\}(x_1, \dots, x_{n_l}) = (\{z\}(x_1, \dots, x_{n_l}))_1;$$

после этого функция Ω строится таким образом, что всегда

$$\Omega(z, x_1, x_2, \dots, x_n) \simeq \Omega_1(\delta_1(z, x_1, x_2, \dots, x_n), x_1, x_2, \dots, x_{n_1}),$$

если $(\{z\}(x_1, x_2, \dots, x_n))_0 = 0$;

$$\Omega(z, x_1, \dots, x_n) \simeq \Omega_2(\delta_2(z, x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_{n_2}),$$

если $(\{z\}(x_1, \dots, x_n))_0 \neq 0$, и $\Omega(z, x_1, \dots, x_n)$ не определено, если $\{z\}(x_1, \dots, x_n)$ не определено.

На основании леммы 4.2 легко доказывается, что ЧРФ Ω и Θ^* удовлетворяют всем требуемым условиям.

Пусть A имеет вид $A_1 \& A_2$; тогда $N = \max(N_1, N_2)$. Полагаем

$$\Theta^*(t, x_1, \dots, x_n) = 2^{\left\{\Theta_1\left(t \cap \bigcup\limits_{k=0}^{N_1}(((k)) \times V^4), x_1, \dots, x_{n_1}\right)\right\}(x_1, \dots, x_{n_1})} \cdot 3^{\left\{\Theta_2\left(t \cap \bigcup\limits_{k=0}^{N_2}(((k)) \times V^4), x_1, \dots, x_{n_2}\right)\right\}(x_1, \dots, x_{n_2})}.$$

Для построения Ω вначале строим $(n+1)$-местные ПРФ δ_1 и δ_2, такие, что при любых $z, x_1, \dots, x_n$, и при любом l, где $1 \leqslant l \leqslant 2$ число $\delta_l(z, x_1, \dots, x_n)$ есть г. н. n_l-местной ЧРФ, определенной разве лишь в точке $(x_1, \dots, x_{n_l})$ и удовлетворяющей условию:

$$\{\delta_l(z, x_1, \dots, x_n)\}(x_1, \dots, x_{n_l}) = (\{z\}(x_1, \dots, x_n))_{l-1};$$

после этого полагаем

$$\Omega(z, x_1, \dots, x_n) = \Omega_1(\delta_1(z, x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_{n_1}) \cup$$

$$\cup\, \Omega_2(\delta_2(z, x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_{n_2}).$$

Снова на основании леммы 4.2 легко устанавливается, что ЧРФ Ω и Θ^* — требуемые.

Рассмотрим теперь случай, когда A есть $A_1 \supset A_2$; в этом случае имеем: $N = \max(N_1, N_2) + 1$. Будем строить ЧРФ Θ^*. Вначале, пользуясь леммой 4.1 и определением числа $\omega_{A_1 \supset A_2}$, построим $(n+1)$-местные ЧРФ δ и γ, такие, что для всякой точки $(x_1, \dots, x_n)$ и для всякого G-числа N-го ранга t оказывается:

(1) $!\,\delta(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $!\,\gamma(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ равносильны $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R(N, \omega_{A_1 \supset A_2}, t)$;

(2) если $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R(N, \omega_{A_1 \supset A_2}, t)$, то $\delta(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ есть P-число $(N-1)$-го ранга, $(N-1, \gamma(t, x_1, x_2, \dots, x_n)) \in [\omega_{A_1 \supset A_2}]_{N+1}(t)$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R(N-1, \gamma(t, x_1, \dots, x_n), t)$, и для всякого G-числа $(N-1)$-го ранга τ оказывается:

$$R(N-1, \omega'_{A_1} \overset{N}{\cap} \gamma(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \tau) \underset{n}{\subseteq} R(N-1, \omega'_{A_2},$$

$$\{\{\delta(t, x_1, x_2, \dots, x_n)\}\}(\tau))$$

(из последнего условия, в силу леммы 4.2, получаем: $R(N-1, \omega'_{A_1}, \tau) \cap$ $\cap R(N-1, \gamma(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \tau) \underset{n}{\subseteq} R(N-1, \omega'_{A_2}, \{\{\delta(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)\}\}(\tau))$.

Далее, построим (n_1+1)-местную ПРФ ψ, такую, что при всяком a и при всяких $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ число $\psi(a, x_1, x_2, \ldots, x_{n_1})$ есть некоторый г. н. ЧРФ, определенной только в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1})$ и принимающей там значение a. Тогда если a есть реализация формулы, получающейся из A_1 посредством подстановки чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ на места ее соответствующих свободных переменных, то $t \cup \Omega_1(\psi(a, x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}), x_1, x_2, \ldots, x_{n_1})$ есть G-число N_1-го ранга (а значит, и $(N-1)$-го), сильное для A_1 в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1})$; беря это число в приведенных выше соотношениях, получаем:

$$R(N-1, \omega'_{A_1}, t \cup \Omega_1(\psi(a, x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}), x_1, x_2, \ldots, x_{n_1})) \cap$$
$$\cap R(N-1, \gamma(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), t \cup \Omega_1(\psi(a, x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}),$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_{n_1})) \underset{n}{\subseteq} R(N-1, \omega'_{A_2}, \{\{\delta(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)\}\}(t \cup$$
$$\cup \Omega_1(\psi(a, x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}), x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}))).$$

Таким образом, если t есть G-число N-го ранга, сильное для $A_1 \supset A_2$ в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, и a есть реализация формулы, получающейся из A_1 посредством указанной выше подстановки, то

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R(N-1, \omega'_{A_2}, \{\{\delta(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)\}\}(t \cup$$
$$\cup \Omega_1(\psi(a, x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}), x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}))),$$

следовательно,

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R(N_2, \omega_{A_2}, \bigcap_{k=0}^{N_2}(((k)) \times V^4) \cap$$
$$\cap \{\{\delta(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)\}\}(t \cup \Omega_1(\psi(a, x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}), x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}))),$$

а потому число t_2, равное:

$$\bigcup_{k=0}^{N_2}(((k)) \times V^4) \cap \{\{\delta(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)\}\}(t \cup$$
$$\cup \Omega_1(\psi(a, x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}), x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}))$$

есть G-число ранга N_2, сильное для A_2 в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, следовательно, $\{\Theta_2(t_2, x_1, x_2, \ldots, x_n)\}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть реализация формулы, получающейся из A_2 при подстановке чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на места ее соответствующих свободных переменных; поэтому в роли Θ^* может быть взята ПРФ

$$\Lambda a \cdot \left\{\Theta_2\left(\bigcup_{k=0}^{N_2}(((k)) \times V^4) \cap \{\{\delta(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)\}\}(t \cup \Omega_1(\psi(a, x_1, x_2, \ldots,\right.\right.$$
$$\left.\left. \ldots, x_{n_1}), x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}))\right)\right\}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Теперь будем строить ЧРФ $\mathfrak{Q}$. Построим $(n+2)$-местную ПРФ ζ, такую, что всегда если t есть G-число ранга $(N-1)$, z есть г. н. какого-либо клинура для $A_1 \supset A_2$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — любые натуральные числа, то $\zeta(z, t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть г. н. ЧРФ от n_2 переменных, определенной разве лишь в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_{n_2})$ и удовлетворяющей условию

$$\{\zeta(z, t, x_1, x_2, \ldots, x_n)\}(x_1, x_2, \ldots, x_{n_2}) \simeq \{\{z\}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}\left(\left\{\Theta_1\left(t \cap \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\cap \left(\bigcup_{k=0}^{N_1}(((k)) \times V^4)\right), x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}\right)\right\}(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1})\right).$$

Тогда если z есть г. н. клинура, сильного для $A_1 \supset A_2$ в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, и $t \cap \left(\bigcup_{k=0}^{N_1}(((k)) \times V^4)\right)$ есть G-число N_1-го ранга, сильное для A_1 в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1})$, то, как легко видеть, число $\mathfrak{Q}_2(\zeta(z, t, x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_{n_2})$ есть G-число ранга N_2 (следовательно, и ранга $(N-1)$), квалифицированно сильное для A_2 в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_{n_2})$. Пользуясь теоремой о представлении предикатов ([15]; см. также [12], стр. 150—151), построим ПРФ υ, такую, что для любых $z, t, x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеет место соотношение

$$\langle \upsilon(z, x_1, \ldots, x_n, t) \rangle = \langle \mathfrak{Q}_2(\zeta(z, t, x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_{n_2}) \rangle,$$

Тогда, как легко видеть, для всякого фиксированного г. н. клинура формулы $A_1 \supset A_2$ и для любых фиксированных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ п.-р. н. одноместной ПРФ χ, определяемой равенством $\chi(t) = \upsilon(z, x_1, \ldots, x_n, t)$ является P-числом $(N-1)$-го ранга. Согласно следствию леммы 3.1, можно построить $(n+1)$-местную ПРФ ε, такую, что при любых $z, x_1, x_2, \ldots, x_n, t$ $\upsilon(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = \{\{(\varepsilon(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)\}\}(t)$ (т. е. $\varepsilon(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть п.-р. н. функции, обозначенной нами через χ).

Пусть теперь x есть г. н. МРПМ, состоящего только из одной точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тогда если z_0 есть г. н. клинура, сильного для $A_1 \supset A_2$ в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то $\omega'_{A_1} \overset{N-1}{\cap} [x]^{*(N-1)}_{(N-1)}$ погружаемо в ω'_{A_2} посредством $\varepsilon(z_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для размерности n на уровне ранга $N-1$. В самом деле, в указанных условиях для любого G-числа $(N-1)$-го ранга t оказывается: какова бы ни была система $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_m)$, где $m \geqslant n$, если $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_m) \in R(N-1, \omega'_{A_1} \overset{N-1}{\cap} [x]^{*(N-1)}_{(N-1)}, t)$, то, в силу леммы 4.2, будет:

$$(x'_1, x'_2, \ldots, x'_m) \in R(N-1, [x]^{*(N-1)}_{N-1}, t)$$

и

$$(x'_1, x'_2, \ldots, x'_m) \in R(N-1, \omega'_{A_1}, t);$$

в соответствии с первым из этих соотношений и в соответствии с определением $[x]^{*(N-1)}_{N-1}$, получаем:

$$x'_1 = x_1, \ x'_2 = x_2, \ldots, x'_n = x_n;$$

из второго соотношения, на основании легко проверяемого равенства

$$R(N-1,\ \omega'_{A_1},\ t)=R(N_1,\ \omega_{A_1},\ t)=R\left(N_1,\ \omega_{A_1},\ t\cup\left(\bigcap_{k=0}^{N_1}(((k))\times V^4)\right)\right),$$

мы получаем, что

$$(x'_1,\ x'_2,\ \dots,\ x'_m)\in R\left(N_1,\ \omega_{A_1},\ t\cap\left(\bigcup_{k=0}^{N_1}(((k))\times V^4)\right)\right),$$

поэтому $t\cap\left(\bigcup_{k=0}^{N_1}(((k))\times V^4)\right)$ есть G-число N_1-го ранга, сильное для A_1 в точке $(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_{n_1})$, а тогда $\upsilon(z_0,\ x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ t)$, так же, как и $\Omega_2(\zeta(z,\ t,\ x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n),\ x_1,\ \dots,\ x_{n_2})$, есть G-число ранга N_2, квалифицированно сильное для A_2 в точке $(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_{n_2})$, и мы имеем:

$$(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_{n_2})\in R(N-1,\ \omega'_{A_2},\ \upsilon(z_0,\ x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ t))=$$
$$=R(N-1,\ \omega'_{A_2},\ \{\{\varepsilon(z_0,\ x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)\}\}(t)),$$

следовательно, ввиду замкнутости БРПМ $R(N-1,\ \omega'_{A_2},\ \{\{\varepsilon(z_0,\ x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)\}\}(t))$, получаем:

$$(x'_1,\ x'_2,\ \dots,\ x'_m)\in R(N-1,\ \omega'_{A_2},\ \{\{\varepsilon(z_0,\ x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)\}\}(t)),$$

что и требовалось. Но тогда г. н. пятимерного МРПМ, состоящего из одной точки $(N-1,\ \omega'_{A_1}\bigcap^{N-1}[x]^{*(N-1)}_{N-1},\ \omega'_{A_2},\ \varepsilon(z_0,\ x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n),\ n)$ является F-числом N-го ранга. Легко проверить, что

$$(N-1,\ [x]^{*(N-1)}_{N-1})\in[\omega_{A_1\supset A_2}]_N(\tau_0),$$

а потому

$$(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)\in R(N,\ \omega_{A_1\supset A_2},\ \tau_0).$$

Теперь в качестве Ω мы можем взять ЧРФ (или ПРФ), перерабатывающую каждую систему $(z,\ x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$ в г. н. пятимерного МРПМ, пустого в случае, когда значение $\{z\}(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$ не определено, и состоящего из одной точки $(N-1,\ \omega'_{A_1}\cap[x]^{*(N-1)}_{N-1},\ \omega'_{A_2},\ \varepsilon(z,\ x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n),\ n)$ (где x есть г. н. МРПМ, состоящего из одной точки $(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$) в случае, когда значение $\{z\}(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$ определено. Тем самым для случая, когда A есть $A_1\supset A_2$, требуемое утверждение полностью доказано.

Пусть формула A имеет вид $\exists x_l A_1$; тогда $N=N_1$ и $n=\max(n_1,\ l)$. Для построения ЧРФ Θ^* вначале отметим, что если t есть G-число N-го ранга, сильное для $\exists x_l A_1$ в точке $(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$, то $(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)\in R(N,\ \omega_{\exists x_l A_1},\ t)$ откуда, согласно лемме 4,

$$(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)\in\uparrow_l R(N,\ \omega_{A_1},\ t),$$

а это означает, что можно построить такое натуральное d, что

$$(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_{l-1},\ d,\ x_{l+1},\ \dots,\ x_n)\in R(N,\ \omega_{A_1},\ t).$$

Следовательно, можно построить такую $(n+1)$-местную ЧРФ ρ, не зависящую от $(l+1)$-го аргумента, что функция ρ определена в точке $(t, x_1, \ldots, x_n)$ только в том случае, когда $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R(N, \omega_{\exists x_i A_1}, t)$, и, если значение $\rho(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определено, то

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, \rho(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), x_{i+1}, \ldots, x_n) \in R(N, \omega_{A_1}, t).$$

Теперь функция Θ^* строится таким образом, что при любых $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$ в случае $i \geqslant n_1$ будет

$$\Theta^*(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 2^{\rho(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)} \cdot 3^{\{\Theta_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, \rho(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), x_{i+1}, \ldots, x_{n_1})\}(x_1, \ldots, x_{i-1}, \rho(t, x_1, \ldots, x_n), x_{i+1}, \ldots, x_{n_1})}$$

и в случае $i > n_1$ будет

$$\Theta^*(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 2^{\rho(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)} \cdot 3^{\{\Theta_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_{n_1})\}(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1})}.$$

Для построения ЧРФ Ω вначале построим $(n+1)$-местную ПРФ δ, такую, что для любых $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$ число $\delta(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть г. н. (n_1+1)-местной ЧРФ, такой, что:

(1) если значение $\{z\}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не определено, то ЧРФ $\{\delta(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$ нигде не определена;

(2) если значение $\{z\}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определено, и $i \leqslant n_1$, то ЧРФ $\{\delta(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$ определена только в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, (\{z\}(x_1, x_2, \ldots, x_n))_0, x_{i+1}, \ldots, x_{n_1})$ и удовлетворяет условию

$$\{\delta(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)\}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, (\{z\}(x_1, x_2, \ldots, x_n))_0, x_{i+1}, \ldots, x_{n_1}) = (\{z\}(x_1, x_2, \ldots, x_n))_1;$$

(3) если значение $\{z\}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определено, и $i > n_1$, то ЧРФ $\{\delta(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$ определена только в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1})$ и удовлетворяет условию

$$\{(\delta(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)\}(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}) = (\{z\}(x_1, x_2, \ldots, x_n))_1$$

(Возможность построения такой ПРФ δ легко устанавливается на основании теоремы XXIII, § 65 из [2]). Теперь ЧРФ Ω при $i \leqslant n_1$ определяется равенством

$$\Omega(z, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Omega_1(\delta(z, x_1, x_2, \ldots, x_n), x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, (\{z\}(x_1, x_2, \ldots, x_n))_0, x_{i+1}, \ldots, x_{n_1}),$$

а при $i > n_1$ — равенством

$$\Omega(z, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Omega_1(\delta(z, x_1, x_2, \ldots, x_n), x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}).$$

Пользуясь леммой 4.3 и определением числа $\omega_{\exists x_i A_1}$, легко показать, что Θ^* и Ω, построенные указанным образом, удовлетворяют всем требуемым условиям.

Остается рассмотреть тот случай, когда A имеет вид $\forall x_i A_1$; тогда $N = N_1 + 1$, и $n = \max(n_1, i)$.

Будем строить ЧРФ Θ^*. Вначале, пользуясь леммой 4.1 и определением числа $\omega_{\forall x_i A_1}$, построим $(n+1)$-местные ЧРФ δ и γ, такие, что для всякой точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и для всякого G-числа N-го ранга t оказывается:

(1) $!\delta(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $!\gamma(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равносильны

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \dot{\in} R(N, \omega_{\forall x_i A_1}, t);$$

(2) если $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \dot{\in} R(N, \omega_{\forall x_i A_1}, t)$, то $\delta(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть P-число N-го ранга, $(N-1, \gamma(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)) \in [\omega_{\forall x_i A_1}](t)$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \dot{\in} R(N-1, \gamma(t, x_1, \ldots, x_n), t)$, и для всякого G-числа $(N-1)$-го ранга τ оказывается:
$R(N-1, \uparrow_i^{N-1}\gamma(t, x_1, \ldots, x_n), \tau) \underset{n}{\subseteq} R(N-1, \omega_{A_1}, \{\{\delta(t, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}\}(\tau))$.
Из последнего условия, в силу леммы 4.3, получаем:
$\uparrow_i R(N-1, \gamma(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \tau) \underset{n}{\subseteq} R(N-1, \omega_{A_1}, \{\{\delta(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)\}\}(\tau))$.
Поскольку последнее соотношение выполняется для всякого G-числа $(N-1)$-го ранга τ, оно, в частности, выполняется при

$$\tau = t \cap \left(\bigcup_{k=0}^{N-1}(((k)) \times V^4)\right);$$

в дальнейшем мы предполагаем, что τ выбрано указанным образом; через t_1 будем обозначать число

$$\{\{\delta(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)\}\}\left(t \cap \left(\bigcup_{k=0}^{N-1}(((k)) \times V^4)\right)\right).$$

Теперь, предположим, что

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \dot{\in} R(N, \omega_{\forall x_i A}, t);$$

тогда

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \dot{\in} R(N-1, \gamma(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), t),$$

откуда

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \dot{\in} R\left(N-1, \gamma(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), t \cap \left(\bigcup_{k=0}^{N-1}(((k)) \times V^4)\right)\right);$$

следовательно, при любом a

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n) \dot{\in}$$

$$\dot{\in} \uparrow_i R\left(N-1, \gamma(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), t \cap \left(\bigcup_{k=0}^{N-1}(((k)) \times V^4)\right)\right),$$

откуда

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n) \dot{\in} R(N-1, \omega_{A_1}, t_1).$$

Если $i \leqslant n_1$, то $n_1 = n$, а потому последнее соотношение равносильно

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_{n_1}) \dot{\in} R(N-1, \omega_{A_1}, t_1).$$

Если же $i > n_1$, то из этого соотношения следует, что

$$(x_1, x_2, \dots, x_{n_1}) \in R(N-1, \omega_{A_1}, t_1).$$

Отсюда вытекает, что при $i \leqslant n_1$ для любого a число

$$\{\Theta_1(t_1, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_{n_1})\}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_{n_1})$$

является реализацией формулы, получающейся из A_1 посредством подстановки чисел $x_1, x_2, \dots, x_{n_1}$ на места соответствующих свободных переменных; при $i > n_1$ тем же свойством при каждом a обладает число (одно и то же для всех a)

$$\{\Theta_1(t_1, x_1, x_2, \dots, x_{n_1})\}(x_1, x_2, \dots, x_{n_1}).$$

Следовательно, в роли Θ^* при $i \leqslant n_1$ может быть взята ПРФ

$$\Lambda a \cdot \left\{\Theta_1\left(\{\{\delta(t, x_1, x_2, \dots, x_n)\}\}\left(t \cap \left(\bigcup_{k=0}^{N-1}(((k)) \times V^4)\right), x_1, x_2, \dots, x_{i-1},\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. a, x_{i+1}, \dots, x_{n_1}\right)\right)\right\}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_{n_1});$$

если же $i > n_1$, то в роли Θ^* может быть взята ПРФ

$$\Lambda a \cdot \left\{\Theta_1\left(\{\{\delta(t, x_1, x_2, \dots, x_n)\}\}\left(t \cap \left(\bigcup_{k=0}^{N-1}(((k)) \times V^4)\right),\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. x_1, x_2, \dots, x_{n_1}\right)\right)\right\}(x_1, x_2, \dots, x_{n_1}).$$

Теперь построим ЧРФ Ω. Для этого построим прежде всего $(n+1)$-местную ПРФ ζ, такую, что если z есть г. н. какого-либо клинура для $\forall x_i A_1$ и $x_1, x_2, \dots, x_n$ — какие-либо натуральные числа, то $\zeta(z, x_1, x_2, \dots, x_n)$ есть г. н. ЧРФ от n_1 переменных, не определенной ни в какой точке, отличной от $(x_1, x_2, \dots, x_{n_1})$, и удовлетворяющей условию

$$\{\zeta(z, x_1, x_2, \dots, x_n)\}(x_1, x_2, \dots, x_{n_1}) \simeq \{\{z\}(x_1, x_2, \dots, x_n)\}(x_i).$$

Тогда, если z есть г. н. клинура, сильного для $\forall x_n A_1$ в точке $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то $\Omega_1(\zeta(z, x_1, x_2, \dots, x_n), x_1, x_2, \dots, x_{n_1})$ есть G-число N-го ранга, квалифицированно сильное для A_1 в точке $(x_1, x_2, \dots, x_{n_1})$; следовательно, при $i \leqslant n_1$, число $\bigcup_a \Omega_1(\zeta(z, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_n), x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_{n_1})$ является G-числом $(N-1)$-го ранга, квалифицированно сильным для A_1 в любой точке вида $(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_{n_1})$; при $i > n_1$ число $\bigcup_a \Omega_1(\zeta(z, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, a), x_1, x_2, \dots, x_{n_1})$ является G-числом $(N-1)$-го ранга, квалифицированно сильным для A в точке $(x_1, x_2, \dots, x_{n_1})$. Как и ранее, пользуясь теоремой о представлении предикатов, строим $(n+2)$-местную ПРФ υ, такую, что при любых $z, x_1, x_2, \dots, x_n, t$ в случае

$i \leqslant n_1$ имеет место $\langle \upsilon(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \rangle = \langle \bigcup_a \Omega_1 (\zeta(z, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n), x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_{n_1}) \rangle$, а в случае $i > n_1$ имеет место $\langle \upsilon(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \rangle = \langle \bigcup_a \Omega_1 (\zeta(z, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, a), x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}) \rangle$; пользуясь следствием леммы 3.1 построим $(n+1)$-местную ПРФ ε, такую, что всегда $F(\varepsilon(z, x_1, x_2, \ldots, x_n), t) = \upsilon(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$. Пусть теперь x есть г. н. МРПМ $((x_1)) \times ((x_2)) \times \cdots \times ((x_{i-1})) \times V \times \times ((x_{i+1})) \times \cdots \times ((x_n))$. Тогда, если z_0 есть г. н. клинура, сильного для $\forall x_i A_1$ в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то число $[x]^{*(N-1)}_{N-1}$ погружаемо в ω_{A_1} посредством $\varepsilon(z_0, x_1, x_2, \ldots x_n)$ для размерности n на уровне ранга $N-1$. В самом деле, если $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_m) \in R(N-1, x, t)$, где t есть некоторое G-число $(N-1)$-го ранга, $m \geqslant n$, то

$$x'_1 = x_1, \ x'_1 = x_2, \ldots, x'_{i-1} = x_{i-1}, \ x'_{i+1} = x_{i+1}, \ldots, x'_n = x_n;$$

с другой стороны, число

$$\{|\varepsilon(z_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)|\}(t) = \upsilon(z_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$$

есть G-число $(N-1)$-го ранга, квалифицированно сильное для A_1 в точке $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n_1})$ (это легко проверяется как в случае $i \leqslant n_1$, так и в случае $i > n_1$); следовательно,

$$(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n_1}) \in R(N-1, \omega_{A_1}, \{|\varepsilon(z_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)|\}(t)),$$

а потому, ввиду замкнутости этого последнего БРПМ, имеем:

$$(x'_1, x'_2, \ldots, x'_m) \in R(N-1, \omega_{A_1}, \{|\varepsilon(z_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)|\}(t),$$

что и требовалось. Но тогда г. н. τ_0 пятимерного МРПМ, состоящего из одной точки $(N-1, \omega_{A_1}, [x]^{*(N-1)}_{N-1}, \varepsilon(z_0, x_1, x_2, \ldots, x_n), n)$ является F-числом N-го ранга. Легко проверить, что

$$(N-1, [x]^{*(N-1)}_{N-1}) \in [\omega_{\forall x_i A}]_N(\tau_0),$$

а потому всякое число вида $(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, принадлежит $R(N, \forall x_i A_1, \tau_0)$, в частности,

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in R(N, \forall x_i A_1, \tau_0).$$

Теперь в качестве Ω мы можем взять ЧРФ (или ПРФ), перерабатывающую каждую систему $(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в г. н. пятимерного МРПМ, пустого в случае, когда значение $\{z\}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не определено, и состоящего из одной точки $(N-1, \omega_{A_1}, [x]^{*(N-1)}_{N-1}, \varepsilon(z, x_1, x_2, \ldots, x_n), n)$ (где x есть г. н. МРПМ $((x_1)) \times ((x_2)) \times \cdots \times ((x_{i-1})) \times V \times ((x_{i+1})) \times \times \cdots \times ((x_n))$) в случае, когда значение $\{z\}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определено. Теорема доказана.

§ 8. О возможных уточнениях понятий правильного числа и G-числа

В предыдущих разделах было дано сведение понятия конструктивной $T\omega$-истинности арифметической формулы (эквивалентного понятию реализуемости арифметической формулы) к понятию G-числа соответствующего ранга или к понятию правильного натурального числа. В рамках настоящей статьи дальнейшее сведение к каким-либо более простым понятиям не производится; в этом параграфе мы сделаем лишь несколько замечаний по поводу возможности дальнейшего уточнения понятий G-числа N-го ранга и правильного числа.

Прежде всего, всякое «естественное» семантическое понятие конструктивной истинности арифметической формулы должно, по-видимому, включать в себя как частный случай понятие «классической» истинности арифметической формулы, принятой в классической математике (нет никаких оснований отвергать на семантическом уровне те методы сведения «классической» истинности к конструктивной, которые разработаны на уровне формальных исчислений ([21], [4])). Поэтому безнадежно было бы пытаться сводить понятие конструктивной истинности арифметических формул к какому-либо существенно более простому понятию (например, выразимому посредством арифметической формулы); при всякой попытке такого рода неизбежно сложным оказался бы сам метод сведения. Достаточно убедительный эвристический материал для такой точки зрения дает классическое доказательство известной теоремы А. Тарского ([23]; см. также [15], п. 13. 3).

С другой стороны, те понятия, к которым сводится понятие конструктивной истинности, должны быть достаточно определенно охарактеризованы, так, чтобы, при зафиксированном конструктивном понимании их, по крайней мере, не возникало бы неопределенностей и сомнений в отношении того, охватываются какие-либо конструктивные объекты этими понятиями или нет.

Рассмотрим с этой точки зрения понятие G-числа N-го ранга.

При каждом фиксированном N понятие G-числа N-го ранга выразимо с помощью арифметической формулы, а именно: формула $G(0, t)$, выражающая суждение „t есть G-число ранга 0“ записывается в виде $t = 0^5$; формула $G(N+1, t)$, выражающая суждение „t есть G-число ранга $N+1$, как легко видеть, может быть записана, исходя из аналогичной формулы $G(N, t)$ в соответствии со структурой следующего выражения (где через $\rho(t, n)$ обозначен примитивно-рекурсивный предикат „t есть г. н. МРПМ размерности n“):

$$\rho(t, 5)\,\&\,G\left(N,\ t\cap\left(\bigcup_{k=0}^{N-1}(((k))\,V^4)\right)\right)\&\left(\langle t\rangle=\left\langle t\cap\left(\bigcup_{k=0}^{N}(((k))\times V^4)\right)\right\rangle\right)\&$$

$$\&\,\forall yzuv\,((N,\ y,\ z,\ u,\ v)\in\langle t\rangle\supset\forall\tau\,(G(N,\ \tau)\supset(G(N,\ \{\{u\}\}(\tau))\,\&$$

$$\&\,R(N,\ y,\ \tau)\underset{v}{\subseteq}R(N,\ z,\ \{\{u\}\}(\tau)))))$$

$\left(\text{при } N=0 \text{ конъюктивный член } G\left(N, t \cap \left(\bigcap_{k=0}^{N-1} (((k)) \times V^4)\right)\right) \text{ опускается}\right)$.

Формула, выражающая $G(N+1, t)$ исходя из $G(N, t)$ является, таким образом, конъюкцией четырех членов, из которых первый член выражает примитивно-рекурсивный предикат, второй член есть результат подстановки некоторой примитивно-рекурсивной функции в $G(N, t)$, третий — выражает равенство некоторых МРПМ. Следовательно, „возрастание сложности" $G(N+1, t)$ по сравнению с $G(N, t)$ при достаточно больших N в основном происходит за счет четвертого члена конъюкции, выражающей $G(N+1, t)$. Этот член конъюкции накладывает ограничение на пятерки натуральных чисел, принадлежащие МРПМ $\langle t \rangle$, а именно; для каждой такой пятерки (N, y, z, u, v) конструктивное множество чисел τ, удовлетворяющее условию $G(N, \tau)$, должно содержаться в конструктивном множестве чисел τ, удовлетворяющих условию

$$G(N, \{\{u\}\}(\tau)) \,\&\, R(N, y, \tau) \underset{v}{\subseteq} R(N, z, \{\{u\}\}(\tau)).$$

Истолкование такого условия требует истолкования отношения „данное конструктивное множество содержится в другом данном конструктивном множестве"; при этом, как легко видеть, рассмотрение формулы $G(1, t)$ требует истолкования лишь отношения „данное рекурсивно-перечислимое множество содержится в другом данном рекурсивно-перечислимом множестве"; рассмотрение формулы $G(N+1, t)$ при каждом N требует истолкования отношения содержания между конструктивными множествами, в определении которых входит условие $G(N, t)$ (отметим, что условие $R(N, y, \tau) \underset{v}{\subseteq} R(N, z, \{\{u\}\}(\tau))$ сводится к тому, что некоторое рекурсивно-перечислимое множество содержится в другом рекурсивно-перечислимом множестве, а потому истолкование суждения $G(N+1, t)$ заключается, в основном, в выяснении соотношений между $G(N, \tau)$ и $G(N, \{\{u\}\}(\tau))$.

Отметим, что отношение «данное конструктивное множество содержится в другом данном конструктивном множестве» аналогично отношениям допустимости правил в исчислениях, вводимым в работах П. Лоренцена [24] и А. А. Маркова [8]; в этом смысле понятие $T\omega$-истинности сближается с понятиями конструктивной истинности, рассматриваемыми в работах П. Лоренцена и А. А. Маркова.

Поскольку понятие G-числа N-го ранга задается некоторой арифметической формулой, может создаться впечатление, что это понятие фактически однозначно определено, и трудность заключается лишь в его удовлетворительном конструктивном описании. По мнению автора, трудности, связанные с уточнением понятий такого рода, носят более глубокий характер, и, быть может, возможны по существу различные конструктивные толкования таких понятий.

Чтобы пояснить указанные трудности, рассмотрим некоторые примеры. Пусть A есть одномерное МРПМ, в которое входят геделевы номера всевозможных предикатных формул, и только они; пусть B есть одномерное МРПМ, в которое входят геделевы номера предикатных формул, выводимых в классическом исчислении предикатов из формул, являющихся аксиомами системы Цермело-Френкеля ([25]); пусть α есть г. н. A, и β есть г. н. B. Пусть, далее, требуется решить вопрос, является ли G-числом 1-го ранга гёделев номер t_0 пятимерного одноэлементного МРПМ, в которое входит лишь пятерка $(0, \alpha, \beta, E', 0)$. Легко проверить, что этот вопрос равносилен вопросу о том, имеет ли место соотношение $A \subseteq B$, иначе говоря, является ли система Цермело-Френкеля противоречивой. Допустим, что некто «провозгласил» t_0 G-числом 1-го ранга. Опровержение такого заявления могло бы последовать лишь в том случае, если бы кто-либо доказал непротиворечивость системы Цермело-Френкеля; весьма правдоподобно, что это невозможно сделать средствами современной математики. Таким образом, хотя система конструктивного истолкования суждений, включающая t_0 в качестве G-числа 1-го ранга, может показаться и неестественной, однако непосредственно «уличить» такую систему в каких-либо заведомо неверных или противоречащих друг другу суждениях, быть может, окажется невозможным.

Ситуация, аналогичная только что описанной, возникает в связи с вопросом о принятии или непринятии принципа конструктивного подбора ([7], [26]). Представителям интуиционистской школы этот принцип кажется конструктивно неправдоподобным (или, как они говорят, «интуитивно неясным»), поэтому они предпочитают не пользоваться им в своих рассуждениях, однако они не могут «уличить» его в каких-либо заведомо неверных или противоречащих друг другу следствиях (за исключением, правда, некоторых примеров, относящихся к интуиционистской семантике и к свободно становящимся последовательностям ([20]; [31]), но эти примеры заведомо не имеют силы в собственно конструктивной математике, поскольку, например, свободно становящиеся последовательности не могут рассматриваться как конструктивные объекты в обычном смысле этого слова). Что касается вопроса о том, является ли принцип конструктивного подбора «подлинно» конструктивным, или он выводит за рамки «подлинно» конструктивной математики, то в настоящее время однозначного ответа на этот вопрос мы не имеем. Приходится сделать тот вывод, что имеют право на существование как конструктивная математика, опирающаяся на принцип конструктивного подбора, так и конструктивная математика, не опирающаяся на этот принцип; но в этих двух теориях отношение «данное рекурсивно-перечислимое множество содержится в другом данном рекурсивно-перечислимом множестве» трактуется различным образом; следовательно, различной будет и трактовка понятия G-числа 1-го ранга. (В самом деле: пусть, например, α и β суть г. н. одномерных МРПМ, относительно которых доказано, что невозможно натуральное число, не входящее ни в одно из них; пусть γ есть г. н. одномерного МРПМ, которому принадлежат все натуральные числа; пусть t_1 есть г. н. пятимерного одноэлементного МРПМ, состоящего лишь из пятерки $(0, \gamma, \alpha \cup \beta, E', 0)$. Тогда, если мы принимаем принцип конструктивного подбора, то должны считать, что $\langle \gamma \rangle \subseteq \langle \alpha \rangle \cup \cup \langle \beta \rangle$, и что t_1 есть G-число 1-го ранга; если же мы не принимаем этого принципа, то должны воздержаться от подобного заключения, пока не будет конструктивно доказано, что всякое натуральное число принадлежит $\langle \alpha \rangle$ или принадлежит $\langle \beta \rangle$).

Таким образом, предикат «t есть G-число N-го ранга» заведомо нуждается в уточнении. Как мы видели ранее, подобное уточнение связывается с установлением соотношения типа «данное конструктивное множество содержится в другом данном конструктивном множестве». «Физическое» понимание таких соотношений на основе «идеализированных физических экспериментов» оказывается явно недостаточным («идеализированный физический эксперимент» может дать нам информацию, например, о принадлежности числа рекурсивно-перечислимому множеству, но в рамках конструктивной трактовки эксперимента никогда не может дать информацию о непринадлежности числа рекурсивно-перечислимому множеству).

Один из способов преодоления указанных трудностей заключается в уточнении рассматриваемых понятий на основе тех или иных методов доказательства (ведь поскольку мы не можем установить непринадлежность натурального числа рекурсивно-перечислимому множеству посредством «идеализированного физического эксперимента», естественно устанавливать подобные факты посредством доказательства того или иного типа). В соответствии с этим один из путей к уточнению понятия G-числа N-го ранга заключается в следующем: фиксируется некоторая конструктивная логическая формальная система и в качестве G-чисел N-го ранга рассматриваются те числа t_0, для которых формула, выражающая суждение «t_0 есть G-число N-го ранга» доказуема в зафиксированной системе. В качестве таких систем могут рассматриваться, например, формальная конструктивная арифметика и ее расширения; конструктивную формальную арифметику по-видимому можно считать одной из наиболее надежных конструктивных формальных систем*.

Другой подход к указанной проблеме заключается в выделении различных классов натуральных чисел, относительно которых можно с той или иной достаточно большой степенью надежности принимать, что они являются правильными натуральными числами или G-числами того или

---

* Методы рассуждений, содержащиеся в конструктивной арифметике обычно принимаются во всех традиционных конструктивных рассмотрениях. Обоснованием для такого принятия можно считать опыт математических рассуждений, проводимых с помощью упомянутых методов; такие рассуждения никогда еще не приводили к утверждениям, сомнительным в конструктивном смысле («Математизированное» обоснование конструктивной арифметики, проводимое, например, с помощью теоремы Д. Нельсона ([27]; [2], § 82, теорема 62) вряд ли можно считать обоснованием в собственном смысле этого слова, поскольку при доказательстве теоремы. Д. Нельсона в метаязыке используются методы рассуждений той же конструктивной арифметики).

иного ранга. Мы рассмотрим некоторые примеры таких классов, и в связи с ними вопросы семантического обоснования некоторых конструктивных логических исчислений.

Обозначим через $0'$ пустое БРПМ. Через $1'$ обозначим БРПМ, которому принадлежат все системы натуральных чисел (всевозможных длин). Через Impl обозначим четырехместную ПРФ, такую, что для любых натуральных чисел N, x, y, n число $\mathrm{Impl}(N, x, y, n)$ есть г. н. R-схемы, на последнем месте которой стоит секвенция $\to p_4(\overline{N}, \overline{0})$, на предпоследнем месте — секвенция $p_{16}(\overline{N}, \overline{x}, x_1, x_2), p_{32}(\overline{N}, x_2, \overline{y}, x_3, \overline{n}) \to p_4(N, x_1)$, и на остальных местах расположена группа секвенций, определяющих МРПМ II, не содержащих p_{32} и p_4, содержащих p_{16} в качестве главной переменной внутри этой группы и не содержащих каких-либо входных переменных (таким образом, Impl, в частности, является операцией, при помощи которой $\omega_{A \supset B}$ строится исходя из ω_A и ω_B). Через Gen обозначим четырехместую ПРФ, такую, что для любых натуральных чисел N, i, x, n число $\mathrm{Gen}(N, i, x, n)$ есть г. н. R-схемы, на последнем месте которой стоит секвенция $\to p_4(\overline{N}, \overline{0})$, на предпоследнем — секвенция $p_{16}(\overline{N}, \overline{i}, x_1, x_2), \; p_{32}(\overline{N}, x_2, \overline{x}, x_3, \overline{n}) \to p_4(\overline{N}, x_1)$, и на остальных местах расположена группа секвенций, определяющих МРПМ Г, не содержащих p_{32} и p_4, содержащих p_{16} в качестве главной переменной внутри этой группы и не содержащих каких-либо входных переменных (Gen, в частности, является операцией, при помощи которой $\omega_{\forall x_i A}$ строится исходя из ω_A).

Определим обычным образом нумерацию термов формальной арифметики; в соответствии с этой нумерацией каждому терму T, составленному из предметных переменных $x_1, x_2, \ldots$ при помощи функциональных символов $+$, $\cdot$, $'$, конструктивно сопоставляется некоторое натуральное число, которое мы будем называть гёделевым номером (г. н.) терма T. Через Sub обозначим трехместную ПРФ, такую, что каковы бы ни были x, i, q, если $i > 0$ и q есть г. н. некоторого арифметического терма T, в который входят переменные $J_1, J_2, \ldots, J_s$, то $\mathrm{Sub}(x, i, q)$ есть г. н. БРПМ, такого, что $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \ll \mathrm{Sub}(x, i, q) \gg$ в том и только в том случае, когда $m \geqslant \max(j_1, j_2, \ldots, j_s)$ и $(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, T(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_s}), x_{i+1}, \ldots, x_m) \in$ $\in \ll x \gg$. Через Subst обозначим четырехместную ПРФ, такую, что всегда $\mathrm{Subst}(0, x, i, q) = \mathrm{Sub}(x, i, q)$, и значение $\mathrm{Subst}(N+1, x, i, q)$ удовлетворяет следующему условию: при любых p и t соотношение $(N, p) \in [\mathrm{Subst}(N+1, x, i, q)]_{N+1}(t)$ имеет место в том и только в том случае, когда $\exists r((N, r) \in [x]_{N+1}(t) \,\&\, \mathrm{Subst}(N, r, i, q) = p)$ (таким образом, операция Subst как бы „осуществляет подстановку терма вместо переменной“ в БРПМ и L-операторах). Через Str обозначим двуместную ПРФ, такую, что для любых x и i, где i есть г. н. системы $(j_1, j_2, \ldots, j_s)$ с положительными членами, оказывается: $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \ll \mathrm{Str}(x, i) \gg$ в том и только в том случае, когда

$m \geqslant \max(j_1, j_2, \ldots, j_s)$ и существует система $(x_1', x_2', \ldots, x_m')$, такая, что $(x_1', x_2', \ldots, x_m') \in \langle\!\langle x \rangle\!\rangle$, и $x_{j_1} = x_{j_1}'$, $x_{j_2} = x_{j_2}', \ldots, x_{j_s} = x_{j_s}'$. Через Stress обозначим трехместную ПРФ, такую, что всегда $\mathrm{Stress}(0, x, i) = \mathrm{Str}(x, i)$, и значение $\mathrm{Stress}(N+1, x, i)$ удовлетворяет условию: при любых p и t соотношение $(N, p) \in [\mathrm{Stress}(N+1, x, i)]_{N+1}(t)$ имеет место в том и только в том случае, когда $\exists r((N, r) \in \in [x]_{N+1}(t) \;\&\; \mathrm{Stress}(N, x, i) = p)$. (Таким образом, операция Stress „расширяет" БРПМ или L-оператор, оставляя в качестве нефиктивных переменных лишь те, номера которых содержатся в заданной системе).

Посредством Unit обозначим двуместную ПРФ, такую, что если i и j суть г. н. систем $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ и $(j_1, j_2, \ldots, j_q)$, то $\mathrm{Unit}(i, j)$ есть номер системы, получающейся из системы $(i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q)$ посредством устранения повторений членов и расположения оставшихся членов в порядке возрастания. Посредством Minus обозначим двуместную ПРФ, такую, что если i и j суть г. н. систем, соответственно, $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ и $(j_1, j_2, \ldots, j_q)$, то $\mathrm{Minus}(i, j)$ есть г. н. системы, состоящей из всевозможных различных чисел (расположенных в порядке возрастания), входящих в систему $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ и не входящих в систему $(j_1, j_2, \ldots, j_q)$. Посредством One обозначим одноместную ПРФ, выдающую по всякому i г. н. одноэлементной системы, единственным элементом которой является i.

Все указанные функции кроме функции Minus вводятся так, чтобы они были строго монотонны по всем своим аргументам.

Введем теперь в рассмотрение правильные натуральные числа t_0 и t_1. Число t_0 определяется как г. н. минимального пятимерного МРПМ, удовлетворяющего следующим условиям (напомним, что через E' обозначается п.-р. н. тождественной функции):

1) Любая пятерка, представляемая в одной из указанных ниже форм, принадлежит $\langle t_0 \rangle$:

$$(N, x, x, E'\, n),\ (N, [0']_N^{*N}, x, E', n),$$

$$(N, x, [1']_N^{*N}, E', n),\ (N, x \overset{N}{\cap} y, x, E', n),$$

$$(N, x \overset{N}{\cap} y, y, E', n),\ (N, x, x \overset{N}{\cup} y, E', n),\ (N, y, x \overset{N}{\cup} y, E', n),$$

$$(N+1, \mathrm{Impl}(N, x, y, n) \overset{N+1}{\cap} [x]_{N+1}^{*}, y, E', n).$$

2) $\langle t_0 \rangle$ инвариантно относительно указанных ниже правил перехода в том смысле, что если пятерки, указанные в одном из этих правил над чертой, принадлежат $\langle t_0 \rangle$, то пятерка, указанная в том же правиле под чертой, также должна принадлежать $\langle t_0 \rangle$:

$$\frac{(N, x, y, E', n)\,(N, y, z, E', n)}{(N, x, z, E', n)} \qquad \frac{(N, x, y, E', n)}{(N, x, y, E', n+k)}$$

$$\frac{(N,\ x\overset{N}{\cap}y,\ z,\ E',\ n)\,(N,\ x\overset{N}{\cap}v,\ z,\ E',\ n)}{(N,\ x\overset{N}{\cap}(y\overset{N}{\cup}v),\ z,\ E',\ n)}$$

$$\frac{(N,\ z,\ x\overset{N}{\cup}y,\ E',\ n)(N,\ z,\ x\overset{N}{\cup}v,\ E',\ n)}{(N,\ z,\ x\overset{N}{\cup}(y\overset{N}{\cap}v),\ E',\ n)}$$

$$\frac{(N,\ x\overset{N}{\cap}y,\ z,\ E',\ n)}{(N,\ [x]^{*}_{N+1},\ \mathrm{Impl}\,(N,\ y,\ z,\ k),\ E',\ \max(n,\ k))}.$$

Число t_1 определяется как г. н. минимального пятимерного МРПМ, удовлетворяющего всем условиям, указанным выше для t_0, и, кроме того, следующим условиям:

3) Любая пятерка, представимая в одной из указанных ниже форм, принадлежат $\langle t_1 \rangle$:

$$(N,\ x,\ \uparrow^N_i x,\ E',\ n),$$

где $n \geqslant i$;

$$(N+1,\ \mathrm{Gen}\,(N,\ x,\ i,\ k),\ [x]^{*}_{N+1},\ E',\ n),$$

где $n \geqslant \max\,(i,\ k)$;

$$(0,\ \mathrm{Subst}\,(0,\ \omega_A,\ i,\ q),\ \omega_{[A]^{x_i}_T},\ E',\ n),$$

где A есть произвольная элементарная арифметическая формула, q есть г. н. арифметического терма T, $[A]^{x_i}_T$ есть результат подстановки T вместо x_i в A, число $n \geqslant i$ не меньше индексов всех предметных переменных, входящих в T и A;

$$(0,\ \omega_{[A]^{x_i}_T},\ \mathrm{Subst}\,(0,\ \omega_A,\ i,\ q),\ E',\ n)$$

при тех же условиях, как и для предыдущей пятерки;

$$(N,\ \mathrm{Subst}\,(N,\ x\overset{N}{\cap}y,\ i,\ q),\ \mathrm{Subst}\,(N,\ x,\ i,\ q)\overset{N}{\cap}\mathrm{Subst}\,(N,\ y,\ i,\ q),\ E'\ n),$$

где q есть г. н. некоторого арифметического терма, а число $n \geqslant i$ не меньше индексов всех предметных переменных, входящих в этот терм;

$$(N,\ \mathrm{Subst}\,(N,\ x,\ i,\ q)\overset{N}{\cap}\mathrm{Subst}\,(N,\ y,\ i,\ q),\ \mathrm{Subst}\,(N,\ x\overset{N}{\cap}y,\ i,\ q),\ E',\ n),$$

при тех же условиях, как и для предыдущей пятерки;

$$(N,\ \mathrm{Subst}(N,\ x\overset{N}{\cup}y,\ i,\ q),\ \mathrm{Subst}\,(N,\ x,\ i,\ q)\overset{N}{\cup}\mathrm{Subst}\,(N,\ y,\ i,\ q),\ E',\ n)$$

при тех же условиях;

$$(N,\ \mathrm{Subst}(N,\ x,\ i,\ q)\overset{N}{\cup}\mathrm{Subst}\,(N,\ y,\ i,\ q),\ \mathrm{Subst}\,(N,\ x\overset{N}{\cup}y,\ i,\ q),\ E',\ n)$$

при тех же условиях;

$$(N+1,\ \mathrm{Subst}(N+1,\ \mathrm{Impl}\,(N,\ x,\ y,\ k),\ i,\ q),\ \mathrm{Impl}\,(N,\ \mathrm{Subst}\,(N,\ x,\ i,\ q),\ \mathrm{Subst}\,(N,\ y,\ i,\ q),\ \max\,(k,\ 1)),\ E',\ n)$$

при тех же условиях, с дополнительными ограничениями $n \geqslant k$; l есть максимум индексов переменных, входящих в терм с гёделевым номером q;

$$(N+1, \mathrm{Impl}(N, \mathrm{Subst}(N, x, i, q), \mathrm{Subst}(N, y, i, q), \max(k, l)),$$

$$\mathrm{Subst}(N+1, \mathrm{Impl}(N, x, y, k), i, q), E', n)$$

при тех же условиях, что и для предыдущей пятерки;

$$(N, \mathrm{Subst}(N, \uparrow_j^N x, i, q), \uparrow_j^N \mathrm{Subst}(N, x, i, q), E', n),$$

где $i \neq j$, q есть г. н. некоторого арифметического терма, а число $n \geqslant \max(i, j)$ не меньше индексов всех предметных переменных, входящих в этот терм;

$$(N, \uparrow_j^N \mathrm{Subst}(N, x, i, q), \mathrm{Subst}(N, \uparrow_j^N x, i, q), E', n),$$

при тех же условиях;

$$(N+1, \mathrm{Subst}(N+1, \mathrm{Gen}(N, x, i, k), j, q),$$

$$\mathrm{Gen}(N, \mathrm{Subst}(N, x, j, q), i, \max(k, l)), E', n),$$

где $i \neq j$, q есть г. н. некоторого арифметического терма, l есть максимум индексов предметных переменных, входящих в этот терм,

$$n \geqslant \max(i, j, k, l); \ (N+1, \mathrm{Gen}(N, \mathrm{Subst}(N, x, j, q), i, \max(k, l)),$$

$$\mathrm{Subst}(N+1, \mathrm{Gen}(N, x, i, k), j, q), E', n)$$

при тех же условиях, что и для предыдущей пятерки;

$$(0, \omega_A, \mathrm{Stress}(0, \omega_A, i), E', n),$$

где A есть произвольная элементарная арифметическая формула, i есть система, состоящая из индексов всех предметных переменных, входящих в A, число n не меньше всех членов системы с г. н. i и не меньше всех индексов предметных переменных, входящих в A;

$$(0, \mathrm{Stress}(0, \omega_A, i), \omega_A, E', n)$$

при тех же условиях, что и для предыдущей пятерки;

$$(N, \mathrm{Stress}(N, x, i) \overset{N}{\cap} \mathrm{Stress}(N, y, j), \mathrm{Stress}(N, \mathrm{Stress}(N, x, i) \overset{N}{\cap}$$

$$\mathrm{Stress}(N, y, j), \mathrm{Unit}(i, j)), E', n),$$

где n не меньше всех членов систем с г. н. i и j;

$$(N, \mathrm{Stress}(N, \mathrm{Stress}(N, x, i) \overset{N}{\cap} \mathrm{Stress}(N, y, j), \mathrm{Unit}(i, j)),$$

$$\mathrm{Stress}(N, x, i) \overset{N}{\cap} \mathrm{Stress}(N, y, j), E', n),$$

при тех же условиях, что и для предыдущей пятерки;

$$(N,\ \mathrm{Stress}\,(N,\ x,\ i) \overset{N}{\cup} \mathrm{Stress}\,(N,\ y,\ j),$$

$$\mathrm{Stress}\,(N,\ \mathrm{Stress}\,(N,\ x,\ i) \overset{N}{\cup} \mathrm{Stress}\,(N,\ y,\ j),\ \mathrm{Unit}\,(i,\ j)),\ E',\ n)$$

при тех же условиях;

$$(N,\ \mathrm{Stress}\,(N,\ \mathrm{Stress}\,(N,\ x,\ i) \overset{N}{\cup} \mathrm{Stress}\,(N,\ y,\ j),\ \mathrm{Unit}\,(i,\ j)),$$

$$\mathrm{Stress}\,(N,\ x,\ i) \overset{N}{\cup} \mathrm{Stress}\,(N,\ y,\ j),\ E',\ n)$$

при тех же условиях;

$$(N+1,\ \mathrm{Impl}\,(N,\ \mathrm{Stress}\,(N,\ x,\ i),\ \mathrm{Stress}\,(N,\ y,\ j),\ k),\ \mathrm{Stress}\,(N+1,$$

$$\mathrm{Impl}\,(N,\ \mathrm{Stress}\,(N,\ x,\ i),\ \mathrm{Stress}\ (N,\ y,\ j),\ k),\ \mathrm{Unit}\,(i,\ j)),\ E',\ n)$$

при тех же условиях, с дополнительным требованием $k \geqslant n$;

$$(N+1,\ \mathrm{Stress}\,(N+1,\ \mathrm{Impl}\,(N,\ \mathrm{Stress}\,(N,\ x,\ i),\ \mathrm{Stress}\,(N,\ y,\ j),\ k),$$

$$\mathrm{Unit}\,(i,\ j)),\ \mathrm{Impl}\,(N,\ \mathrm{Stress}\,(N,\ x,\ i),\ \mathrm{Stress}\,(N,\ y,\ j),\ k),\ E',\ n)$$

при тех же условиях, что и для предыдущей пятерки;

$$(N,\ \uparrow_j^N \mathrm{Stress}\,(N,\ x,\ i),\ \mathrm{Stress}\,(N,\ \uparrow_j^N x,\ \mathrm{Minus}\,(i,\ \mathrm{One}\,(j))),\ E',\ n),$$

где $n \geqslant j$, и n не меньше всех членов системы с г. н. i;

$$(N,\ \mathrm{Stress}\,(N,\ \uparrow_j^N x,\ \mathrm{Minus}\,(i,\ \mathrm{One}\,(j)),\ \uparrow_j^N,\ \mathrm{Stress}\,(N,\ x,\ i),\ E',\ n)$$

при тех же условиях, что и для предыдущей пятерки;

$$(N+1,\ \mathrm{Gen}\,(N,\ \mathrm{Stress}\,(N,\ x,\ i),\ j,\ k),\ \mathrm{Stress}\,(N+1,\ \mathrm{Gen}\,(N,\ x,\ j,\ k),$$

$$\mathrm{Minus}\,(i,\ \mathrm{One}\,(j))),\ E',\ n)$$

при тех же условиях, что и для предыдущей пятерки, с дополнительным требованием $n \geqslant k$;

$$(N+1,\ \mathrm{Stress}\,(N+1,\ \mathrm{Gen}\,(N,\ x,\ j,\ k),\ \mathrm{Minus}\,(i,\ \mathrm{One}\,(j))),$$

$$\mathrm{Gen}\,(N,\ \mathrm{Stress}\,(N,\ x,\ i),\ j,\ k),\ E',\ n)$$

при тех же условиях, что и для предыдущей пятерки;

$$(N,\ \uparrow_j^N \mathrm{Stress}\,(N,\ x,\ i),\ \mathrm{Stress}\,(N,\ x,\ i),\ E'\ n),$$

где $n \geqslant \max\,(i,\ j)$, и j не является членом системы с г. н. i;

$$(N+1,\ [\mathrm{Stress}\,(N,\ x,\ i)]^{*}_{N+1},\ \mathrm{Gen}\,(N,\ \mathrm{Stress}\,(N,\ x,\ i),\ j,\ k),\ E',\ n),$$

где $n \geqslant \max\,(i,\ j,\ k)$, и j не является членом системы с г. н. i.

4) $\langle t_1 \rangle$ инвариантно относительно указанных ниже правил перехода в том же смысле, как это было указано выше для правил перехода, относящихся к $\langle t_0 \rangle$:

$$\frac{(N,\ x,\ y,\ E',\ n)}{(N,\ \mathrm{Subst}\,(N,\ x,\ i,\ q),\ \mathrm{Subst}\,(N,\ y,\ i,\ q),\ E',\ m)},$$

где q есть г. н. арифметического терма, $m \geqslant \max(n, i)$, и m не меньше всех индексов предметных переменных, входящих в q;

$$\frac{(N, (\uparrow_i^N z) \cap x, y, E', n)}{(N, (\uparrow_i^N z) \cap \uparrow_i^N x, \uparrow_i^N y, E', \max(n, i))};$$

$$\frac{(N, x, y, E', n)}{(N+1, \mathrm{Gen}(N, x, i, k), \mathrm{Gen}(N, y, i, l), E', \max(n, i, k, l))}.$$

То, что $\langle t_0 \rangle$ и $\langle t_1 \rangle$ являются правильными натуральными числами, нетрудно установить, например, в рамках конструктивной формальной арифметики, а именно: при каждом N в конструктивной арифметике можно вывести формулы, утверждающие, что

$$\langle t_0 \rangle \cap \bigcup_{k=0}^{N-1} (((k)) \times V^4) \quad \text{и} \quad \langle t_1 \rangle \cap \bigcup_{k=0}^{N-1} (((k)) \times V^4)$$

суть G-числа N-го ранга. Несмотря на внешнюю громоздкость определений $\langle t_0 \rangle$ и $\langle t_1 \rangle$, мы можем сказать, что они формализуют достаточно „простые", „обозримые", „непосредственно ясные" и т. д. свойства рекурсивно-перечислимых множеств; за то, что рекурсивно-перечислимые множества „на самом деле" обладают этими свойствами, мы можем ручаться, по-видимому, с большой достоверностью, чем за „правильность" формальной арифметики в целом. Каждому пункту определений $\langle t_0 \rangle$ и $\langle t_1 \rangle$ можно дать с этой точки зрения соответствующее „истолкование" и „обоснование". Например, включение в $\langle t_0 \rangle$ и $\langle t_1 \rangle$ пятерок вида $(N, x, x \overset{N}{\cup} y, E', n)$ и $(N, y, x \overset{N}{\cup} y, E', n)$ естественно рассматривать как формализацию правила „сумма двух рекурсивно-перечислимых множеств содержит в себе каждое слагаемое", включение в $\langle t_1 \rangle$ пятерок вида

$$(N, \mathrm{Subst}(N, x \overset{N}{\cap} y, i, q), \mathrm{Subst}(N, x, i, q) \overset{N}{\cap} \mathrm{Subst}(N, y, i, q), E', n)$$

и

$$(N, \mathrm{Subst}(N, x, i, q) \overset{N}{\cap} \mathrm{Subst}(N, y, i, q), \mathrm{Subst}(N, x \overset{N}{\cap} y, i, q), E', n)$$

естественно рассматривать как формализацию следующего правила: „для того, чтобы подставить арифметический терм вместо переменной в выражение для пересечения двух БРПМ, достаточно совершить такую же подстановку в выражение для каждого из этих БРПМ и составить пересечение получившихся БРПМ"; включение в $\langle t_1 \rangle$ пятерок вида

$$(N, \mathrm{Stress}(N, x, i) \overset{N}{\cup} \mathrm{Stress}(N, y, j), \mathrm{Stress}(N, \mathrm{Stress}(N, x, i) \overset{N}{\cup} \overset{N}{\cup} \mathrm{Stress}(N, y, j), \mathrm{Unit}(i, j)), E', n)$$

и

$$(N, \mathrm{Stress}(N, \mathrm{Stress}(N, x, i) \overset{N}{\cup} \mathrm{Stress}(N, y, j), \mathrm{Unit}(i, j)), \mathrm{Stress}(N, x, i) \overset{N}{\cup} \mathrm{Stress}(N, y, j), E', n)$$

естественно рассматривать как формализацию следующего правила: „если два БРПМ существенно зависят лишь от координат с индексами, соответственно, $(i_1, i_2, \dots, i_t)$ и $(j_1, j_2, \dots, j_s)$, то их сумма зависит разве лишь от координат с индексами $(i_1, i_2, \dots, i_t, j_1, j_2, \dots, j_s)$“ и т. д. Достоверность такого рода правил не должна вызывать слишком больших сомнений; разумеется, это отнюдь не означает, что мы должны непременно принимать такие правила во всех вопросах рассматриваемых нами.

Теорема 8.1. *Всякая арифметическая формула, выводимая в конструктивном исчислении высказываний, $T\omega$-истинна во всякой точке относительно* $\langle t_0 \rangle$; *всякая арифметическая формула, выводимая в конструктивном исчислении предикатов, $T\omega$-истинна во всякой точке относительно* $\langle t_1 \rangle$.

Доказательство. Построим следующее вспомогательное исчисление. Выводимыми объектами в нем являются формульные неравенства, т. е. выражения вида $F \leqslant G$, где F и G — предикатные формулы с функциональными переменными; при этом понятие предикатной формулы расширяется по сравнению с обычным, а именно: к числу элементарных формул добавляются символы 0 и 1. Отрицание $\neg A$ рассматривается как сокращенная запись формулы $A \supset 0$. Схемы аксиом указанного исчисления определяются следующим образом:

$$F \leqslant F;\quad F \& G \leqslant F;\quad F \& G \leqslant G;\quad F \leqslant F \vee G;\quad G \leqslant F \vee G;\quad 0 \leqslant F;$$

$$F \leqslant 1;\quad \forall x_l F \leqslant F;\quad F \leqslant \exists x_l F;\quad W \leqslant \forall x_l W;\quad \exists x_l W \leqslant W,$$

где F, G, W — любые формулы; x_l — любая предметная переменная; в двух последних схемах аксиом предполагается, что x_l не входит свободно в W. Правила вывода рассматриваемого исчисления определяются следующим образом:

$$\frac{F \leqslant G \quad G \leqslant H}{F \leqslant H};\qquad \frac{F \leqslant G}{[F]_T^{x_l} \leqslant [G]_T^{x_l}};\qquad \frac{F \leqslant G \quad F \leqslant J}{F \leqslant G \& J};$$

$$\frac{G \& H \leqslant F \quad J \& H \leqslant F}{(G \vee J) \& H \leqslant F};\qquad \frac{H \leqslant F \quad H \leqslant F \supset G}{H \leqslant G};\qquad \frac{F \& G \leqslant H}{F \leqslant G \supset H};$$

$$\frac{F \leqslant G}{\forall x_l F \leqslant \forall x_l G};\qquad \frac{W \& F \leqslant G}{W \& \exists x_l F \leqslant \exists x_l G};$$

где F, G, H, J — любые формулы, x_l — любая предметная переменная не входящая свободно в W; в правиле, содержащем $[F]_T^{x_l}$ и $[G]_T^{x_l}$, предполагается, что подстановка терма T вместо переменной x_l в формулы F и G допустима.

Легко установить, что построенное исчисление эквивалентно конструктивному исчислению предикатов; по существу это исчисление представляет собой модификацию секвенциальной формы конструктивного исчисления предикатов ([32]; [2], § 77), причем $\leqslant$ употребляется в такой же роли как $\rightarrow$ в секвенциальных исчислениях.

Совершенно таким же образом определяется арифметическая разновидность указанного вспомогательного исчисления: все определения остаются такими же, как ранее, но в роли формул рассматриваются арифметические формулы, а в роли термов—арифметические термы. Это последнее исчисление мы обозначим через $Я_1$; через $Я_0$ обозначим исчисление, получающееся из $Я_1$ посредством удаления четырех схем аксиом, в формулировках которых содержатся кванторы, и трех правил вывода, содержащих в своих формулировках обозначение операции подстановки и кванторы. По существу $Я_0$ есть арифметическая разновидность конструктивного исчисления высказываний.

Теперь при помощи индукции по выводу в $Я_0$ и $Я_1$ легко доказывается следующее утверждение: если арифметическая формула A ранга N выводима в $Я_0$ (соответственно, в $Я_1$), то при некотором n пятерка $(N, [1']_N^{*N}, \omega_A, E', n)$ принадлежит $\langle t_0 \rangle$ (соответственно, принадлежит $\langle t_1 \rangle$). В самом деле, правила, введенные при построении $\langle t_0 \rangle$ и $\langle t_1 \rangle$, относящиеся к $\overset{N}{\cap}$, $\overset{N}{\cup}$, Impl, $\uparrow_i^N$, Gen, соответствуют правилам исчислений $Я_0$ и $Я_1$, относящимся к &, $\vee$, $\supset$, $\exists$, $\forall$; правила, относящиеся к Subst и Sress, обеспечивают выполнение ограничений, связанных с подстановкой термов вместо переменных и с невхождением свободных переменных в формулы.

Доказательство теоремы теперь завершается очевидным образом, исходя из доказанного вспомогательного утверждения.

Таким образом, исходя из построенного аппарата мы можем провести обоснование конструктивных логических исчислений на несколько более четкой и ограниченной основе по сравнению с тем, как это делается в традиционной теории реализуемости ([27]; [2], § 81).

Разумеется, приведенное обоснование не дает никаких оснований считать обязательным принятие этих исчислений. Никакая логическая система и никакое логическое обоснование не может претендовать на абсолютную достоверность (за исключением, быть может, «пустого» логического исчисления, в котором вообще ничего не выводимо).

§ 9. Симметрическая конструктивная логика и $S\omega$-истинность арифметических формул

Мы рассмотрим теперь иное понимание истинности арифметических формул, находящееся в таком же соотношении с понятием $T\omega$-истинности, в каком односторонние „уровни познания“ (см. § 1) находятся с любыми, не обязательно односторонними „уровнями познания“. Соответствующая система конструктивной логики — симметрическая конструктивная логика — была описана в терминах логических и логико-арифметических исчислений в [10] и [11].

Симметрический ранг или, кратко, S-ранг арифметической формулы определяется следующими условиями: (1) S-ранг элементарной арифметической формулы есть 0; (2) если S-ранг формулы A есть N, и S-ранг формулы B есть B, то S-ранг формул $A \& B$ и $A \vee B$ есть $\max(M, N)$; S-ранг формулы $\neg A$ есть N; S-ранг формулы $A \supset B$ есть $\max(M, N)+1$; S-ранг формул $\forall x_i A$ и $\exists x_i A$ есть $N+1$.

Для каждой формулы A натуральные числа ω_A^+ и ω_A^- определяются следующими правилами: (1) Если A — элементарная формула, и n есть наибольший из индексов предметных переменных, входящих в A, то ω_A^+ и ω_A^- суть г. н. МРПМ размерности n, удовлетворяющих условиям: $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \langle \omega_A^+ \rangle$ (соответственно, $(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n) \in \langle \omega_A^- \rangle$) в том и только в том случае, когда истинна (соответственно, ложна) формула, получающаяся из A посредством подстановки чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на места ее свободных переменных (предполагается фиксированным стандартный способ построения чисел с указанными свойствами, и через ω_A^+ и ω_A^- обозначаются числа, удовлетворяющие указанным условиям и построенные фиксированным стандартным способом). (2) Если S-ранг формулы A есть N, S-ранг формулы B есть M, число k есть $\max(N, M)$, число n есть максимальный индекс свободных и связанных предметных переменных, встречающихся в формулах A и B, то тогда

$$\omega^+_{A\&B} \text{ есть } [\omega_A^+]_k^{*(k-N)} \overset{k}{\cap} [\omega_B^+]_k^{*(k-M)};$$

$$\omega^-_{A\&B} \text{ есть } [\omega_A^-]_k^{*(k-N)} \overset{k}{\cup} [\omega_B^-]_k^{*(k-M)};$$

$$\omega^+_{A\vee B} \text{ есть } [\omega_A^+]_k^{*(k-N)} \overset{k}{\cup} [\omega_B^+]_k^{*(k-M)};$$

$$\omega^-_{A\vee B} \text{ есть } [\omega_A^-]_k^{*(k-N)} \overset{k}{\cap} [\omega_B^-]_k^{*(k-M)};$$

$$\omega^+_{\neg A} \text{ есть } \omega_A^-; \qquad \omega^-_{\neg A} \text{ есть } \omega_A^+;$$

$$\omega^-_{A\supset B} \text{ есть } [\omega_A^+]_k^{*(k-N)} \overset{k}{\cap} [\omega_B^-]_k^{*(k-M)};$$

$\omega^+_{A\supset B}$ есть г. н. R-схемы, на последнем месте которой стоит секвенция $\to p_4(\bar{k}, \bar{0})$, а на предпоследнем месте — секвенция

$$p_{16}(\bar{k}, [\omega_A^+]_k^{*(k-N)}, x_1, x_2), p_{16}(\bar{k}, [\omega_B^-]_k^{*(k-M)}, x_1, x_3),$$

$$p_{32}(\bar{k}, x_2, [\omega_B^+]_k^{*(k-M)}, x_4, \bar{n}), p_{32}(\bar{k}, x_3, [\omega_A^-]_k^{*(k-N)}, x_5, \bar{n}) \to p_4(\bar{k}, x_1),$$

на остальных местах расположена группа секвенций, определяющих МРПМ II, не содержащих p_{32} и p_4, содержащих p_{16} в качестве главной переменной внутри этой группы и не содержащих входных переменных. (3) Если S-ранг формулы A есть N, число n есть максимум индексов ее свободных и связанных предметных переменных, то

$\omega^{+}_{\exists x_l A}$ есть $\uparrow_l \omega^{+}_{A}$; $\omega^{-}_{\forall x_l A}$ есть $\uparrow_l \omega^{-}_{A}$; $\omega^{+}_{\forall x_l A}$ (соответственно $\omega^{-}_{\exists x_l A}$)

есть г. н. R-схемы, на последнем месте которой стоит секвенция $\to p_4(\overline{k}, \overline{0})$, на предпоследнем — секвенция

$$p_{16}(\overline{N}, \overline{l}, x_1\ x_2), p_{32}(\overline{N}, x_2, \overline{\omega^{+}_{A}}, x_3, \overline{n}) \to p_4(\overline{N}, x_1)$$

(соответственно, секвенция $p_{16}(\overline{N}, \overline{l}, x_1, x_2), p_{32}(\overline{N}, x_2, \overline{\omega^{-}_{A}}, x_3, \overline{n}) \to$ $\to p_4(\overline{N}, x_1)$), и на остальных местах расположена группа секвенций, определяющих МРПМ Г, не содержащих p_{32} и p_4, содержащих p_{16} в качестве главной переменной внутри этой группы и не содержащих входных переменных.

Приведенные условия определяют числа ω^{+}_{A} и ω^{-}_{A} для каждой арифметической формулы A. Пусть A есть некоторая арифметическая формула, N есть S-ранг A, n-максимальный индекс свободных и связанных предметных переменных, встречающихся в A. Будем говорить, что, G-число t какого-либо ранга или же правильное натуральное число t является $+$-сильным (соответственно $-$-сильным) для A в точке $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если $(x_1, x_2, \dots, x_n) \underset{\cdot}{\in} R(N, \omega^{+}_{A}, t)$ (соответственно, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \underset{\cdot}{\in} R(N, \omega^{-}_{A}, t)$). Определения квалифицированно $+$-сильного и квалифицированно $-$-сильного числа t для A в точке $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ получаются из предыдущих определений посредством замены $\underset{\cdot}{\in}$ на $\in$. Если t является $+$-сильным (соответственно $-$-сильным) для A в точке $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то будем говорить также, что формула A $S\omega$-истинна (соответственно, $S\omega$-ложна) в точке $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ относительно t.

Для сравнения введем соответствующее определение в терминах реализуемости; оно аналогично определению P-реализуемости и N-реализуемости из [28]. А именно, индукцией по построению формулы мы введем понятия $+$-реализации и $-$-реализации арифметической формулы; эти понятия определяются следующими правилами:

1. Число e является $+$-реализацией (соответственно $-$-реализацией) элементарной арифметической формулы A, не содержащей свободных переменных, в том и только в том случае, когда A истинна, и $e = 0$ (соответственно A ложна, и $e = 1$).

2. Число e является $+$-реализацией (соответственно $-$-реализацией) формулы $A \& B$ (соответственно $A \vee B$), если e имеет вид $2^a \cdot 3^b$, где a есть $+$-реализация (соответственно $-$-реализация) формулы A, и b есть $+$-реализация (соответственно $-$-реализация) формулы B.

3. Число e является $+$-реализацией (соответственно $-$-реализацией) формулы $A \vee B$ (соответственно $A \& B$), если e имеет вид $2^0 \cdot 3^b$, где b есть $+$-реализация (соответственно, $-$-реализация) формулы B или же e имеет вид $2^1 \cdot 3^a$, где а есть $+$-реализация (соответственно, $-$-реализация) формулы A.

4. Число e является $+$-реализацией (соответственно $-$-реализацией) формулы $\urcorner A$, если e является $-$-реализацией (соответственно $+$-реализацией) формулы A.

5. Число e является $+$-реализацией формулы $A \supset B$, если e имеет вид $2^{e_1} \cdot 3^{e_2}$, где e_1 есть гёделевский номер ЧРФ, переводящей всякую $+$-реализацию формулы A в некоторую $+$-реализацию формулы B, и e_2 есть гёделевский номер ЧРФ, переводящей всякую $-$-реализацию формулы B в некоторую $-$-реализацию формулы A.

6. Число e является $-$-реализацией формулы $A \supset B$, если e имеет вид $2^d \cdot 3^b$, где d есть $+$-реализация формулы A и b есть $-$-реализация формулы B.

7. Число e является $+$-реализацией (соответственно $-$-реализацией) формулы $\forall xA$ (соответственно $\exists xA$), если e есть гёделев номер ОРФ, переводящей всякое натуральное z в $+$-реализацию (соответственно, $-$-реализацию) формулы, получающейся из A посредством подстановки $0^{\overbrace{||\cdots|}^{z\text{ раз}}}$ на места всех свободных вхождений x.

8. Число e является $+$-реализацией (соответственно, $-$-реализацией) формулы $\exists xA$ (соответственно, $\forall xA$), если e имеет вид $2^z \cdot 3^a$, где a есть $+$-реализация (соответственно $-$-реализация) формулы, получающейся из A посредством подстановки $0^{\overbrace{||\cdots|}^{z\text{ раз}}}$ на места всех свободных вхождений x.

Приведенное определение повторяет (с точностью до технических деталей) пункты определений P-реализуемости и N-реализуемости, данных Д. Нельсоном [28], за исключением лишь частей, относящихся к импликации (понятие импликации в симметрической логике иное, чем у Д. Нельсона, а именно: рассматриваемая здесь импликация выражается через нельсоновскую в виде $(A \supset B) \& (\urcorner B \supset \urcorner A)$; нельсоновская же импликация через симметрическую в виде $A \supset (A \supset B)$ (ср. [11]).

Если A — арифметическая формула и n — наибольший индекс свободных и связанных предметных переменных, встречающихся в A, то тогда n-местную ЧРФ φ будем называть симметрическим уровнем познания (или, сокращенно, симмуром) формулы A, если φ перерабатывает всякую систему натуральных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для которой она определена, в $+$-реализацию или $-$-реализацию формулы, получающейся из A подстановкой термов $0^{\overbrace{||\cdots|}^{x_1\text{ раз}}}, 0^{\overbrace{||\cdots|}^{x_2\text{ раз}}}, \ldots, 0^{\overbrace{||\cdots|}^{x_n\text{ раз}}}$ вместо ее соответствующих предметных переменных. Будем говорить, что симмур φ является $+$-сильным (соответственно $-$-сильным) в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если он определен в этой точке и $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть $+$-реализация (соответственно $-$-реализация) формулы получающейся из A только что указанной подстановкой.

Теорема 9.1. *Пусть A есть арифметическая формула, имеющая S-ранг N, и пусть n есть наибольший индекс свободных и связанных предметных переменных, встречающихся в A. Тогда можно построить $(n+1)$-местные ЧРФ Ω и Θ, удовлетворяющие следующим условиям:*

(1) *Для любого G-числа N-го ранга t и для любых натуральных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ значение $\Theta(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определено, и оно есть г. н. симмура для A.*

(2) *Для г. н. z любого симмура формулы A число $\Omega(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определено, и оно есть G-число N-го ранга.*

(3) *Если t есть G-число N-го ранга, +-сильное или —-сильное для A в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_x)$, то $\Theta(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть г. н. симмура, соответственно +-сильного или —-сильного для A в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

(4) *Если z есть г. н. симмура, +-сильного или —-сильного для A в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то $\Omega(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть G-число N-го ранга, соответственно, квалифицированно +-сильное или квалифицированно —-сильное для A в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

Доказательство этой теоремы как в идейном, так и в техническом отношении аналогично доказательству теоремы 7.1, поэтому мы его здесь не приводим.

$S\omega$-истинность формул, выводимых в логических исчислениях симметрической логики, может быть получена по отношению к некоторым правильным натуральным числам t_0^* и t_1^*, которые строятся аналогично ранее рассмотренным числам t_0 и t_1. Для определения чисел t_0^* и t_1^* введем в рассмотрение шестиместную примитивно-рекурсивную функцию Impsym, такую, что для любых натуральных чисел N, x, y, u, v, k число $\mathrm{Impsym}(N, x, y, u, v, k)$ есть г. н. R-схемы, на последнем месте которой стоит секвенция $\rightarrow p_4(\overline{N}, \overline{0})$, на предпоследнем месте — секвенция $p_{16}(\overline{N}, \overline{x}, x_1, x_2), p_{16}(\overline{N}, v, x_1, x_3), p_{32}(\overline{N}, x_2, u, x_4, \overline{k}), p_{32}(\overline{N}, x_3, y, x_5, \overline{k}) \rightarrow p_4(\overline{N}, x_1)$, и на остальных местах расположена группа секвенций, определяющих МРПМ П, не содержащих p_{32} и p_4, содержащих p_{16} в качестве главной переменной внутри этой группы и не содержащих входных переменных. Определения t_0^* и t_1^* теперь даются в точности таким же образом, как и определения t_0 и t_1, со следующими отличиями: (1) все разделы определений t_0 и t_1, относящиеся к Impl, исключаются из определений t_0^* и t_1^*; (2) в определении t_0^* дополнительно требуется: если

$$(N, x \overset{N}{\cap} y, z, E', k) \in \langle t_0^* \rangle, \ (N, x \overset{N}{\cap} u, v, E', l) \in \langle t_0^* \rangle,$$

$$(N, y \overset{N}{\cap} v, [0]_N^{*N}, E', p) \in \langle t_0^* \rangle, \ (N, u \overset{N}{\cap} z, [0]_N^{*N}, E', q) \in \langle t_0^* \rangle,$$

то

$$(N+1, [x]_{N+1}^*, \mathrm{Impsym}(N, y, v, u, z, \max(k, l, p, q)), E', \max(k, l, p, q)) \in \langle t_0^* \rangle;$$

если

$$(N,\ w,\ x,\ E',\ k) \in \langle t_0^* \rangle,\ (N+1,\ [w]^*_{N+1},\ \mathrm{Impsym}\,(N,\ x,\ y,\ u,\ v,\ l),$$

$$E',\ m) \in \langle t_0^* \rangle\,(N,\ x \overset{N}{\cap} y,\ [0]^{*N}_N,\ E',\ p) \in \langle t_0^* \rangle,$$

$$(N,\ u \overset{N}{\cap} v,\ [0]^{*N}_N,\ E',\ q) \in \langle t_0^* \rangle,$$

то

$$(N,\ w,\ u,\ E',\ \max(k,\ l,\ m,\ p,\ q)) \in \langle t_0^* \rangle;$$

если

$$(N,\ w,\ v,\ E',\ k) \in \langle t_0^* \rangle,\ (N+1,\ [w]^*_{N+1},\ \mathrm{Impsym}\,(N,\ x,\ y,\ u,\ v,\ l),$$

$$E',\ m) \in \langle t_0^* \rangle,\ (N,\ x \overset{N}{\cap} y,\ [0]^{*N}_N,\ E',\ p) \in \langle t_0^* \rangle,$$

$$(N,\ u \overset{N}{\cap} v,\ [0]^{*N}_N,\ E',\ q) \in \langle t_0^* \rangle,$$

то

$$(N,\ w,\ u,\ E',\ \max(k,\ l,\ m,\ p,\ q)) \in \langle t_0^* \rangle;\ (0,\ \omega^+_A \cap \omega^-_A,\ 0,\ E',\ n) \in \langle t_0^* \rangle$$

для всякой элементарной арифметической формулы A, такой, что все индексы входящих в нее переменных не превосходят n; (3) в определение t_1^* дополнительно вводятся все условия, указанные в предыдущем пункте по отношению к $\langle t_0^* \rangle$ и, кроме того, следующие условия: если q есть г. н. некоторого арифметического терма, l есть максимум индексов предметных переменных, входящих в этот терм, и

$$n \geqslant \max(k,\ l,\ i),$$

то

$$(N+1,\ \mathrm{Subst}\,(N+1,\ \mathrm{Impsym}\,(N,\ x,\ y,\ u,\ v,\ k),\ i,\ q),$$

$$\mathrm{Impsym}\,(N,\ \mathrm{Subst}\,(N,\ x,\ i,\ q),\ \mathrm{Subst}\,(N,\ y,\ i,\ q),\ \mathrm{Subst}\,(N,\ u,\ i,\ q),$$

$$\mathrm{Subst}\,(N,\ v,\ i,\ q),\ \max(k,\ l),\ E',\ n) \in \langle t_1^* \rangle$$

и

$$(N+1,\ \mathrm{Impsym}\,(N,\ \mathrm{Subst}\,(N,\ x,\ i,\ q),\ \mathrm{Subst}\,(N,\ y,\ i,\ q),$$

$$\mathrm{Subst}\,(N,\ u,\ i,\ q),\ \mathrm{Subst}\,(N,\ v,\ i,\ q),\ \max(k,\ l)),$$

$$\mathrm{Subst}\,(N+1,\ \mathrm{Impsym}\,(N,\ x,\ y,\ u,\ v,\ k),\ i,\ q),\ E',\ n) \in \langle t_1^* \rangle;$$

если i и j суть г. н. систем натуральных чисел, все члены которых не превосходят n и, кроме того, $k \geqslant n$, то

$$(N+1,\ \mathrm{Impsym}\,(N,\ \mathrm{Stress}\,(N,\ x,\ i),\ \mathrm{Stress}\,(N,\ y,\ i),\ \mathrm{Stress}\,(N,\ u,\ j),$$

$$\mathrm{Stress}\,(N,\ v,\ j),\ k),\ \mathrm{Stress}\,(N+1,\ \mathrm{Impsym}\,(N,\ \mathrm{Stress}\,(N,\ x,\ i),$$

$$\mathrm{Stress}\,(N,\ y,\ i),\ \mathrm{Stress}\,(N,\ u,\ j),\ \mathrm{Stress}\,(N,\ v,\ j),\ k),\ \mathrm{Unit}\,(i,\ j)),$$

$$E',\ n) \in \langle t_1^* \rangle$$

и

$$(N+1,\ \mathrm{Stress}\,(N+1,\ \mathrm{Impsym}\,(N,\ \mathrm{Stress}\,(N,\ x,\ i),\ \mathrm{Stress}\,(N,\ y,\ i),$$
$$\mathrm{Stress}\,(N,\ u,\ j),\ \mathrm{Stress}\,(N,\ v,\ j),\ k),\ \mathrm{Unit}\,(i,\ j)),$$
$$\mathrm{Impsym}\,(N,\ \mathrm{Stress}\,(N,\ x,\ i),\ \mathrm{Stress}\,(N,\ y,\ i),\ \mathrm{Stress}\,(N,\ u,\ j),$$
$$\mathrm{Stress}\,(N,\ u,\ j),\ k),\ E',\ n)\in\langle t_1^*\rangle.$$

Симметрическое конструктивное исчисление предикатов определяется правилом вывода modus ponens и следующими схемами аксиом (где A, B, C суть произвольные арифметические формулы, $\widetilde{\forall}$ обозначает произвольный набор кванторов общности, $[A]_t^x$ есть результат подстановки арифметического терма t вместо свободных вхождений переменной x в формулу A, C не содержит свободно x и допустима подстановка t вместо x в A):

$$\widetilde{\forall}\,(A\supset(B\supset A));\qquad \widetilde{\forall}\,((A\supset B)\supset((B\supset C)\supset(A\supset C)));$$

$$\widetilde{\forall}\,((A\supset(B\supset C))\supset(B\supset(A\supset C)));$$

$$\widetilde{\forall}\,((A\supset(A\supset B))\supset((\neg B\supset(\neg B\supset\neg A))\supset(A\supset B));$$

$$\widetilde{\forall}\,((A\supset B)\supset(\neg B\supset\neg A));\qquad \widetilde{\forall}\,(\neg\neg A\supset A);\qquad \widetilde{\forall}(A\supset\neg\neg A);$$

$$\widetilde{\forall}\,(A\,\&\,B\supset A);\qquad \widetilde{\forall}\,(A\,\&\,B\supset B);$$

$$\widetilde{\forall}\,((C\supset A)\supset((C\supset B)\supset(C\supset A\,\&\,B)));\qquad \widetilde{\forall}\,(A\supset A\vee B);$$

$$\widetilde{\forall}\,(B\supset A\vee B);\qquad \widetilde{\forall}\,((A\supset C)\supset((B\supset C)\supset(A\vee B\supset C)));$$

$$\widetilde{\forall}\,(\forall xA\supset[A]_t^x);\qquad \widetilde{\forall}\,([A]_t^x\supset\exists xA);\qquad \widetilde{\forall}\,(C\supset\forall xC);$$

$$\widetilde{\forall}\,(\exists xC\supset C);\qquad \widetilde{\forall}\,(\forall x\,(A\supset B)\supset(\forall xA\supset\forall xB));$$

$$\widetilde{\forall}\,(\forall x\,(A\supset B)\supset(\exists xA\supset\exists xB);\qquad \widetilde{\forall}\,(\forall x\,(A\supset(A\supset B))\supset(\exists xA\supset(\exists xA\supset\exists xB)).$$

(Это определение аналогично определению исчисления HS из [11]). Симметрическое конструктивное исчисление высказываний определяется естественным образом как часть только что указанного исчисления.

Теорема 9.1. *Всякая арифметическая формула, выводимая в симметрическом конструктивном исчислении высказываний $S\omega$-истинна относительно $\langle t_0^*\rangle$ в любой точке; всякая арифметическая формула, выводимая в симметрическом конструктивном исчислении предикатов, $S\omega$-истинна относительно $\langle t_1^*\rangle$ в любой точке.*

Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 8.1; в качестве вспомогательного исчисления в этом доказательстве может быть взято, например, исчисление GS, определенное в [11].

§ 10. Непрерывная конструктивная логика

В работах, относящихся к классической логике, часто рассматривались логические системы, в которых в качестве истинностных значений используются не два логических значения «истина» и «ложь», а более широкие классы значений, например, действительные числа из некоторого промежутка. (Такие системы рассмотрены, например, в работе Г. Дж. Кэйслера и Чэн Чень-Чуня [29]; весьма сходные понятия фигурируют в работах Л. Заде [30], где рассматриваются «множества с нечеткими границами»). Во многих разделах математики приходится сталкиваться с понятиями, относительно которых естественно ставить вопрос об их формализации в терминах, допускающих некоторую «размытость» границ этих понятий. Например, рассматривая конструктивные действительные числа, мы имеем точно определенные отношения порядка и равенства между ними; однако, производя реальные вычисления, мы всегда имеем дело лишь с некоторыми рациональными (или даже десятично-рациональными) приближениями действительных чисел, на основании которых нельзя судить с полной определенностью об отношениях порядка и равенства между представляемыми ими действительными числами. С другой стороны, было бы неестественным считать, что рациональные приближения действительных чисел не дают нам вовсе никакой информации указанного рода. Естественно пытаться определять на рациональных приближениях действительных чисел такие отношения, которые соответствовали бы отношениям порядка и равенства между изображаемыми ими действительными числами; но такие отношения на рациональных приближениях, очевидно, не могут быть определены в традиционных терминах; введение «понятий с размытыми границами», позволяет естественным образом формализовывать указанные определения. Можно указать и другие примеры аналогичного рода (например, связанные с понятиями «просто вычислимой рекурсивной функции», «просто реализуемой булевой функции» и пр.).

В этом параграфе мы покажем, каким образом аналогичные рассмотрения могут проводиться в рамках конструктивной логики.

Вначале введем некоторые вспомогательные понятия.

Будем рассматривать двоично-рациональные числа вида $\frac{q}{2^n}$, где q — целое число, n — натуральное число. Понятие двоично-рациональной примитивно-рекурсивной функции (сокращенно ДПРФ) определяется в точной аналогии с понятием РПРФ из [34], а именно каждая ДПРФ есть тройка примитивно-рекурсивных функций (α, β, γ) одинаковой размерности; при этом значение ДПРФ (α, β, γ) в точке $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ интерпретируется как двоично-рациональное число

$$\frac{\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \beta(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{2^{\gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n)}}.$$

Введем в рассмотрение одноместную ПРФ l, такую, что при любом натуральном n

$$l(n) = \mu k_{k<n}[2^k > n] \dot{-} 1$$

(иначе говоря, $l(n) = [\log_2(n+1)]$) и одноместные ДПРФ R, R_1, R_2, такие, что при любом натуральном n

$$R(n) = \frac{(2n+3) - 2^{l(n)+1}}{2^{l(n)+1}}; \qquad R_1(n+2) = R(n); \qquad R_2(n+1) = R(n);$$

и, кроме того,

$$R_1(0) = \frac{0}{1}; \qquad R_2(0) = \frac{0}{1} \qquad R_1(1) = \frac{1}{1}.$$

Легко проверить, что ДПРФ R, R_1, R_2 определяют конструктивные взаимно-однозначные соответствия между натуральными и двоично-рациональными числами, удовлетворяющими условиям, соответственно $0 < r < 1$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant r < 1$.

Двоично-рациональным многомерным рекурсивно-перечислимым множеством (сокращенно—ДМРПМ) размерности n будем называть всякое рекурсивно-перечислимое множество систем вида $(x_1, x_2, \ldots, x_n, r)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — натуральные числа, r — двоично-рациональное число, удовлетворяющее условию $0 \leqslant r < 1$; при этом каждое ДМРПМ задается некоторым МРПМ A^* систем $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$, таким, что $(x_1, x_2, \ldots, x_n, R_1(y)) \in A$ в том и только в том случае, когда $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \in A^*$.

Двоично-рациональным бесконечномерным рекурсивно-перечислимым множеством (сокращенно—ДБРПМ) будем называть всякое рекурсивно-перечислимое множество систем вида $(x_1, x_2, \ldots, x_n, r)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и r имеют тот же смысл, что и ранее (но n уже не обязательно одно и то же для всех систем, принадлежащих данному ДБРПМ). ДБРПМ задаются при помощи БРПМ так же, как ДМРПМ задаются при помощи МРПМ.

ДМРПМ (соответственно, ДБРПМ) A будем называть монотонным в том и только в том случае, когда выполнены следующие условия: (1) если $(x_1, x_2, \ldots, x_n, r) \in A$, и $0 \leqslant r' < r$, то $(x_1, x_2, \ldots, x_n, r') \in A$; (2) если $(x_1, x_2, \ldots, x_n, r) \in A$ и $r > 0$, то существует двоично-рациональное число r'', такое, что $r < r'' < 1$, и $(x_1, x_2, \ldots, x_n, r'') \in A$. (3) для любой системы $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (где, в случае, когда A есть ДМРПМ, n совпадает с размерностью A) имеет место соотношение $(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) \in A$. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь монотонные ДБРПМ и ДМРПМ; вместо „монотонное ДБРПМ“ или „монотонное ДМРПМ“ будем иногда сокращенно писать, соответственно, МДБРПМ или МДМРПМ.

Легко строится гёделева нумерация всевозможных МДБРПМ. А именно для каждого ДБРПМ A определим монотонное ДБРПМ A' при помощи следующего условия: $(x_1, x_2, \ldots, x_n, r) \in A'$, где $0 \leqslant r < 1$, в том и только в том случае, когда $r=0$ или существует r', такое, что $r < r' < 1$ и $(x_1, x_2, \ldots, x_n, r') \in A$. Ясно, что A' конструктивно определяется для всякого ДБРПМ A, и, если A монотонно, то $A'=A$. Теперь будем считать, что гёделев номер каждого одномерного МРПМ A изображает монотонное ДБРПМ B', получающееся только что описанным образом из ДБРПМ B, определяемого следующим соотношением: $(x_1, x_2, \ldots, x_n, R_2(y)) \in B$ в том и только в том случае, когда г. н. системы $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$, принадлежит A.

Определим теперь некоторые действия над МДБРПМ (которые будут рассматриваться также и как действия над изображающими их гёделевыми номерами). Сумма $A \cup B$ и пересечение $A \cap B$ монотонных ДБРПМ A и B определяются естественным образом. Операция $\uparrow_l$ определяется следующим образом: если A есть монотонное ДБРПМ, то $\uparrow_l A$ есть МДБРПМ, такое, что $(x_1, x_2, \ldots, x_n, r) \in \uparrow_l A$ в том и только в том случае, когда выполнено одно из трех условий: (1) $r=0$; (2) $n=l$, и $(x_1, x_2, \ldots, x_k, r) \in A$ при некотором $k<l$; (3) $n \geqslant l$ и $(x_1, x_2, \ldots, x_{l-1}, d, x_{l+1}, \ldots, x_n, r) \in A$ при некотором натуральном d. Естественным образом определяются отношения $\subseteq$ и $=$ между МДБРПМ. Отношение $A \underset{n}{\subseteq} B$, где A и B—МДБРПМ, n—натуральное число, по определению имеет место тогда и только тогда, когда для всякой системы вида $(x_1, x_2, \ldots, x_m, r)$, где $m \geqslant n$ и $(x_1, x_2, \ldots, x_m, r) \in A$, имеет место $(x_1, x_2, \ldots, x_m, r) \in B$.

ДБРПМ A будем называть замкнутым, если вместе с каждой системой $(x_1, x_2, \ldots, x_n, r)$ ему принадлежат любые системы вида $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m, r)$.

Замыканием ДБРПМ A будем называть ДБРПМ B, такое, что $(x_1, x_2, \ldots, x_n, r) \in B$ в том и только в том случае, когда хотя бы одна из систем $(x_1, x_2, \ldots, x_k, r)$ при $0 \leqslant k \leqslant n$ принадлежит A. Будем говорить, что система $(x_1, x_2, \ldots, x_n, r)$ условно принадлежит ДБРПМ A и писать $(x_1, x_2, \ldots, x_n, r) \subsetneq A$, если некоторая система вида $(x_1\ x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m, r)$ принадлежит A.

Посредством $\ll\langle x \rangle\gg$ условимся обозначать замыкание МДБРПМ, изображаемого натуральным числом x в указанном выше смысле (очевидно, что замыкание монотонного ДБРПМ само монотонно).

Понятие $LД$-оператора N-го ранга определяется следующим образом: $LД$-оператор O-го ранга суть МДБРПМ; $LД$-операторы N-го ранга при $N>0$ суть L-операторы N-го ранга. Введем обозначение $[x]_N^Д$, которое мы будем понимать следующим образом: при $N=0$ $[x]_0^Д$ есть МДБРПМ «‹ x ›»; при $N>0$ $[x]_N^Д$ есть L-оператор $[x]_N$.

Двоично-рациональное раскрытие $RД(N, x, t)$ $LД$-оператора $[x]_N^Д$ относительно МРПМ $\langle t \rangle$ размерности 5 определяется следующими соотношениями:

$$RД(0, x, t) = «‹x›»;$$

$$RД(N+1, x, t) = \bigcup_{(N, \xi) \in [x]_{N+1}(t)} R(N, \xi, t).$$

Действия $\overset{ДN}{\cup}$, $\overset{ДN}{\cap}$, $\uparrow_i^{ДN}$ над натуральными числами, рассматриваемыми как г. н. $LД$-операторов N-го ранга, определяются в точности таким же образом, как были определены в § 4 действия $\overset{N}{\cup}$, $\overset{N}{\cap}$, $\uparrow_i^N$ над г. н. L-операторов, с той лишь разницей, что $\overset{ДО}{\cup}$, $\overset{ДО}{\cap}$, $\uparrow_i^{ДО}$ при $N=0$ понимаются как действия $\cup$, $\cap$, $\uparrow_i$ над ДБРПМ; определения $\overset{Д(N+1)}{\cup}$, $\overset{Д(N+1)}{\cap}$, $\uparrow_i^{Д(N+1)}$, через $\overset{ДN}{\cup}$, $\overset{ДN}{\cap}$, $\uparrow_i^{ДN}$ сохраняют в точности такую же форму, как и соответствующие определения из § 4. Четырехмерные МРПМ $\Pi^Д$, $\Sigma^Д$, $\Gamma^Д$ определяются точно так же, как Π, Σ, Γ в § 4, с заменой $\overset{N}{\cap}$, $\overset{N}{\cup}$, $\uparrow_i^N$ соответственно на $\overset{ДN}{\cap}$, $\overset{ДN}{\cup}$, $\uparrow_i^{ДN}$. Легко проверить, что аналоги лемм из § 4 сохраняют силу и для только что введенных понятий.

Зафиксируем некоторый г. н. $0^Д$, изображающий пустое пятимерное МДБРПМ. Понятия $FД$-числа ранга N, $GД$-числа ранга N, $PД$-числа ранга N, пятиместное отношение „число y $Д$-погружаемо в число z посредством числа u для размерности v на уровне ранга N“, а также понятие $Д$-правильного натурального числа определяются аналогично соответствующим определениям из § 5, со следующими отличиями. При $N=0$ полагаем: (1) $FД$-числом O-го ранга является только число $0^Д$; (2) $GД$-числом O-го ранга является только число $0^Д$; (3) $PД$-числом O-го ранга является только число E'; (4) число $yД$-погружаемо в число z посредством числа u для размерности v на уровне ранга 0, если $u = E'$, и $«‹y›» \underset{v}{\subseteq} «‹z›»$.

Индуктивные определения понятий (1), (2), (3) и отношения (4), имеющих ранг $N+1$ посредством аналогичных понятий и отношения, имеющих ранг N, производится в точности таким же образом, как и в § 5, с той лишь разницей, что всюду вместо терминов „F-число“, „G-число“, „P-число“, „погружаемо“ употребляются термины „$FД$-число“, „$GД$-число“, „$RД$-число“ и „$Д$-погружаемо“ и в индуктивном определении отношения (4) на место соотношения

$$R(N+1, x, t) \underset{v}{\subseteq} R(N+1, y, \{\{u\}\}(t))$$

подставляется соотношение

$$RД(N+1, x, t) \underset{v}{\subseteq} RД(N+1, y, \{\{u\}\}(t)),$$

где обозначение $\underset{v}{\subseteq}$ понимается в смысле соответствующего определения для МДБРПМ. (Особо отметим, что в указанных определениях сохраняются обозначения $\langle t \rangle$, $\cap$, $\times$, $((k))$, МРПМ; замене подвергаются лишь те слова и выражения, для которых это было только что специально указано). Натуральное число t называется *Д*-правильным, если $\langle t \rangle$ есть пятимерное МРПМ, и при всяком k оказывается: $t \cap (((k)) \times V^4)$ есть *FД*-число $(k+1)$-го ранга.

Понятия *GД*-числа *N*-го ранга и *Д*-правильного натурального числа играют в рассмотрениях, связанных с непрерывной конструктивной логикой, ту же роль, что и понятия *G*-числа *N*-го ранга и правильного натурального числа в рассмотрениях предыдущих параграфов. Легко видеть, что понятие *GД*-числа фиксированного ранга может быть выражено посредством арифметической формулы так же, как это было сделано в отношении понятия *G*-числа фиксированного ранга в § 8.

Переходим теперь к рассмотрению формул, выражающих суждения непрерывной конструктивной логики. В качестве элементарных предикатов такой логики естественно рассматривать МДМРПМ тех или иных видов; при этом если для нашего МДМРПМ A оказывается $(x_1, x_2, \ldots, x_n, r) \in A$, то это обстоятельство содержательно трактуется в том смысле, что суждение $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ утверждается с „коэффициентом истинности" r. Отметим, что „коэффициент истинности" рассматривается здесь не только как степень нашей субъективной уверенности или нашей информированности отностительно $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а как нечто, описывающее также и свойства самого суждения; например, если мы рассматриваем предикат „рациональные числа r_1 и r_2 близки друг к другу", то можем его определить так, чтобы суждению „5,01 и 5 близки друг к другу" приписывались бы, например, „коэффициенты истинности" ме́ньшие 0,7 и не приписывался бы никакой другой „коэффициент истинности". Мы будем задавать элементарные предикаты таким образом, что для каждого суждения $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где A — элементарный предикат, мы сможем конструктивно указать двоично-рациональную точную верхнюю границу „коэффициентов истинности", приписываемых этому суждению (неэлементарные предикаты могут и не обладать этим свойством).

Введем в рассмотрение одноместную предикатную букву $\overline{R}$, двуместные предикатные буквы $\overline{E}$ и $\overline{F}$, трехместные предикатные буквы $\overline{S}$ и $\overline{P}$. *Д*-формулой будем называть всякую формулу чистого исчисления предикатов, в которой не встречаются предикатные буквы, отличные от $\overline{R}$, $\overline{E}$, $\overline{F}$, $\overline{S}$, $\overline{P}$. *Д*-ранг произвольной *Д*-формулы определяется в точности такими же правилами, как и ранг арифметической формулы (см. начало § 6). Для каждой *Д*-формулы A мы определим далее, натуральное число $\omega_A^{(Д)}$ следующим образом: (1) если A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 суть элементарные *Д*-формулы, соответственно вида $\overline{R}(x_i)$, $\overline{E}(x_i, x_j)$, $\overline{F}(x_i, x_j)$, $\overline{S}(x_i, x_j, x_k)$, $\overline{P}(x_i, x_j, x_k)$, то $\omega_{A_1}^{(Д)}$, $\omega_{A_2}^{(Д)}$, $\omega_{A_3}^{(Д)}$, $\omega_{A_4}^{(Д)}$, $\omega_{A_5}^{(Д)}$ суть г. н. МДБРПМ, являющихся замыканиями для бесконечно-мерных образов МДМРПМ D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 размерностей, соответственно i, $\max(i, j)$, $\max(i, j)$, $\max(i, j, k)$, $\max(i, j, k)$ и таких, что соотношения

$$(x_1, x_2, \dots, x_i, r) \in D_1, (x_1, x_2, \dots, x_{\max(i, j)}, r) \in D_2,$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_{\max(i, j)}, r) \in D_3, (x_1, x_2, \dots, x_{\max(i, j, k)}, r) \in D_4,$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_{\max(i, j, k)}, r) \in D_5$$

имеют место в тех и только тех случаях, когда

$$r = 0 \vee r < R_1(x_i), \qquad r = 0 \vee (0 \leqslant r < 1 \,\&\, x_i = x_j),$$

$$r = 0 \vee (0 \leqslant r < 1 \,\&\, x_i = x_j + 1), \qquad r = 0 \vee (0 \leqslant r < 1 \,\&\, x_i + x_j = x_k),$$

$$r = 0 \vee (0 \leqslant r < 1 \,\&\, x_i \cdot x_j = x_k).$$

(2) если A есть $Д$-формула, имеющая $Д$-ранг N, B есть $Д$-формула, имеющая $Д$-ранг M, k есть $\max(M, N)$, n есть максимальный индекс свободных и связанных предметных переменных встречающихся в формулах A и B, то тогда $\omega^{(Д)}_{A \& B}$, $\omega^{(Д)}_{A \vee B}$, $\omega^{(Д)}_{\neg A}$, $\omega^{(Д)}_{A \supset B}$, $\omega^{(Д)}_{\forall x_l A}$, $\omega^{(Д)}_{\exists x_l A}$, определяются в точности так же, как $\omega_{A \& B}$, $\omega_{A \vee B}$, $\omega_{\neg A}$, $\omega_{A \supset B}$, $\omega_{\forall x_l A}$, $\omega_{\exists x_l A}$ в § 6, со следующими изменениями: (1) вместо действий $\overset{k}{\cap}$, $\overset{k}{\cup}$, $\uparrow^k_i$, рассматриваются действия $\overset{Д,\, k}{\cap}$, $\overset{Д,\, k}{\cup}$, $\uparrow^{Д,\, k}_i$; (2) вместо МРПМ Π и Γ рассматриваются МРПМ $\Pi^Д$ и $\Gamma^Д$; Число $\omega^{(Д)}_A$ будет рассматриваться как г. н. $LД$-оператора N-го ранга, где N есть $Д$-ранг A.

Введем теперь понятие $TД\omega$-истинности $Д$-формулы с заданным коэффициентом в заданной точке относительно заданного $GД$-числа или $Д$-правильного натурального числа. Пусть t — некоторое $GД$-число или некоторое правильное натуральное число, r — некоторое двоично-рациональное число, такое, что $0 < r < 1$; пусть A есть $Д$-формула, у которой $Д$-ранг N, и наибольший индекс входящих в нее свободных и связанных предметных переменных есть n. Будем говорить, что $Д$-формула A $TД\omega$-истинна в точке $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с коэффициентом r относительно t, если $(x_1, x_2, \dots, x_n, r) \in RД(N, \omega^Д_A, t)$. Понятие $TД\omega$-истинности вводится, таким образом, в точной аналогии с понятием $T\omega$-истинности. Различие между этими понятиями проявляется однако в „коэффициенте истинности" r, который существенно меняет самый принцип, на основе которого вводится понятие истинности. Мы докажем лишь одно утверждение, касающееся введенных сейчас понятий.

Пусть $\langle \tau \rangle$ — есть одномерное МРПМ, которому принадлежат все натуральные числа n, обладающие следующим свойством: существует такое натуральное число m, что результат подстановки термов $0\overbrace{'' \cdots '}^{n \text{ раз}}$ и $0\overbrace{'' \cdots '}^{m \text{ раз}}$, вместо переменных t и N в формулу традиционной конструктивной формальной арифметики, выражающую предикат „t есть $FД$-число N-го ранга", выводим в традиционной конструктивной формальной арифметике. Пусть далее $\langle \bar{\tau} \rangle$ есть пятимерное МРПМ, являющееся суммой всех МРПМ $\langle k \rangle$, таких, что $k \in \langle \tau \rangle$. Тогда для всякого МДМРПМ D размерности n можно построить такую $Д$-формулу A, что наибольший индекс m свободных и связанных предметных переменных, встречающихся в A не меньше m, и формула A $TД\omega$-истинна в точке $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m)$ с коэффициентом r относительно $\bar{\tau}$ в том и только в том случае, когда $(x_1, x_2, \dots, x_n, r) \in D$.

Иначе говоря, всякое МДМРПМ D может быть описано посредством некоторой $Д$-формулы (при достаточно информативном $Д$-правильном числе $\bar{\tau}$). Это утверждение до некоторой степени оправдывает выбор элементарных предикатов, взятых за основу при построении и истолковании $Д$-формул.

Для доказательства только что сформулированного утверждения введем одно вспомогательное понятие. МДМРПМ D размерности n будем называть примитивно-рекурсивным, если существует такая ДПРФ φ от n переменных, что $(x_1, x_2, \dots, x_n, r) \in D$ только в том случае, когда $r = 0$ или $0 \leqslant r \leqslant \varphi\ (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Вначале мы докажем рассматриваемое утверждение для того случая, когда D примитивно-рекурсивно. В самом деле, пусть ДПРФ φ обладает тем свойством, что $(x_1, x_2, \dots, x_n, r) \in D$ равносильно $r = 0 \vee 0 \leqslant r < \varphi (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Построим ПРФ ψ, такую, что всегда $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = R_1 (\psi (x_1, x_2, \dots, x_n))$. Как известно (см. например, [2] § 49, § 74), можно построить формулу B традиционной конструктивной формальной арифметики, составленную лишь из элементарных формул вида $(x_i = x_j)$, $(x_i = x'_j)$, $x_i + x_j = x_k$; $x_i \cdot x_j = x_k$ и нумерически выражающую функцию ψ. В силу общих теорем, связывающих $T\omega$-истинность с выводимостью в традиционной конструктивной формальной арифметике, отсюда вытекает, что формула B $T\omega$-истинна в точке $(x_1, x_2, \dots \dots, x_n, x_{n+1})$, относительно τ в том и только в том случае, когда $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_{n+1}$. Построим $Д$-формулу $\overline{B}$ исходя из формулы B посредством замены элементарных формул вида $x_i = x_j$, $x_i = x'_j$, $x_i + x_j = x_k$, $x_i \cdot x_j = x_k$ соответственно формулам $\overline{E}(x_i, x_j)$, $\overline{F}(x_i, x_j)$, $\overline{S}(x_i, x_j, x_k)$, $\overline{P}(x_i, x_j, x_k)$ и построим $Д$-формулу $\overline{A}$ в виде $\exists x_{n+1} (\overline{B} \,\&\, \overline{R}\, (x_{n+1}))$. Легко видеть, что $Д$-формула $\overline{A}$ $TД\omega$-истинна в точке $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с коэффициентом r относительно $\bar{\tau}$ в том и только в том случае, когда $r = 0$ или $r < \varphi\, (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тем самым требуемое утверждение доказано для случая примитивно-рекурсивных МДМРПМ D.

Если теперь D—произвольное МДМРПМ, то оно, очевидно, может быть представлено в виде суммы перечислимой последовательности примитивно-рекурсивных МДМРПМ; более точно, для всякого

МДМРПМ D размерности n можно построить такое примитивно-рекурсивное МДМРПМ C размерности $(n+1)$, что для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n, r$ оказывается: $(x_1, x_2, \ldots, x_n, r) \in D$ в том и только в том случае, когда при некотором x_{n+1} имеет место $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, r) \in C$. (Этот факт с очевидностью вытекает из известных теорем о перечислении МРПМ). Теперь, если мы для заданного МДМРПМ D размерности n построим примитивно-рекурсивное МДМРПМ C только что указанным способом, и затем для C построим $Д$-формулу $\overline{A}$ вида $\exists x_{n+2} (\overline{B} \,\&\, \overline{R}(x_{n+2}))$ (со свободными переменными $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$), так, как это сделано выше для случая примитивно-рекурсивного D, то, как легко проверить, формула $\exists x_{n+1} \overline{A}$ будет удовлетворять всем требуемым условиям по отношению к заданному D. Тем самым доказано сформулированное выше утверждение.

Вопрос о соотношениях введенной логической системы с другими известными системами конструктивной и классической логики, а также вопрос о пригодности этой логической системы для приложений различного рода, разумеется, требуют дополнительного исследования. Однако возможность введения систем подобного рода на основе аппарата, рассмотренного в этой статье, является, по мнению автора, дополнительным соображением в пользу этого аппарата.

Вопросы, излагаемые в этой статье, неоднократно обсуждались автором в беседах с А. А. Марковым, Н. А. Шаниным, Г. С. Цейтиным, А. Г. Драгалиным, Б. А. Кушнером, которым автор обязан рядом ценных советов и замечаний. Ряд ценных соображений был высказан Г. Б. Маранджяном, М. А. Хачатряном, С. Н. Манукян и другими участниками семинара по конструктивной логике в ВЦ АН Арм. СССР. Автор приносит всем названным лицам свою искреннюю благодарность.

ԴԱՏՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԿՈՆՍՏՐՈՒԿՏԻՎ ՃՇՄԱՐՏՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԿՈՆՍՏՐՈՒԿՏԻՎ ՏՐԱՄԱԲԱՆՈՒԹՅԱՆ ՈՉ ԱՎԱՆԴԱԿԱՆ ՈՐՈՇ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ

Ռեկուրսիվ թվարկելի բազմությունների վրա սահմանված օպերատորների միջոցով կառուցվում է թվաբանական բանաձևերի կոնստրուկտիվ ճշմարտության մի քանի տարատեսակներ ամփոփող գաղափարների համակարգ։

Մասնավորապես սահմանվում է թվաբանական բանաձևերի Tω-ճշմարտության գաղափարը և ապացուցվում է, որ այն որոշ իմաստով համարժեք է իրացնելիության ավանդական գաղափարին։ Տրվում և հետազոտվում են նաև բանաձևերի Sω-ճշմարտության և TДω-ճշմարտության գաղափարները, որոնցից առաջինը համապատասխանում է սիմետրիկ կոնստրուկտիվ տրամաբանության մեջ եղած ճշմարտության գաղափարին, իսկ երկրորդը հնարավորություն է տալիս սահմանել կոնստրուկտիվ տրամաբանության մի նոր համակարգ՝ անընդհատ կոնստրուկտիվ տրամաբանությունը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kleene S. C.* On the interpretation of intuitionistic number theory, Journ. Symb. Log., 10, № 4, 109—123 (1945).
2. *Kleene S. C.* Introduction to metamathematics, New York—Toronto (1952) (русский перевод *Клини С. К.* Введение в метаматематику, ИЛ, М. (1957)).
3. *Kleene S. C.* Realizability and Shanin's algorithm for the constructive deciphering of mathematical sentences, Logique et analyse, № 11—12, 154—165 (1960).
4. *Шанин Н. А.* О некоторых логических проблемах арифметики, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, XLIII (1955).
5. *Шанин Н. А.* О конструктивном понимании математических суждений, Труды Матем. инст. им. В. Стеклова, LII, 226—311 (1958).
6. *Шанин Н. А.* К вопросу о конструктивном понимании опорных формул. I, Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова, LXXII, 348—379 (1964).
7. *Марков А. А.* Об одном принципе конструктивной математической логики, Труды 3-го Всесоюзн. матем. съезда, II, 146—147 (1956).
8. *Марков А. А.* О логике конструктивной математики, Вестник Моск. Университета, серия I (Математика, Механика), 2, 7—29 (1970).
9. *Кипнис М. М.* Конструктивная классификация арифметических предикатов и семантические базисы арифметики, «Записки научных семинаров ЛОМИ», 8, 53—65 (1968).
10. *Заславский И. Д.* Симметрическая конструктивная логика, Международный конгресс математиков, Тезисы кратких научных сообщений, секция 1, 16 (1966).
11. *Заславский И. Д.* О предикатных и арифметических исчислениях симметрической конструктивной логики, ДАН СССР, 210, № 3, 517—520 (1973).
12. *Успенский В. А.* Лекции о вычислимых функциях, Физматгиз, М (1960).
13. *Успенский В. А.* О вычислимых операциях, ДАН СССР, 103, № 5, 773—776 (1955).
14. *Успенский В. А.* Системы перечислимых множеств и их нумерации, ДАН СССР, 105, № 6, 1155—1158 (1955).
15. *Мальцев А. И.* Алгоритмы и рекурсивные функции, Физматгиз, М. (1965).
16. *Детловс В. К.* Эквивалентность нормальных алгорифмов и рекурсивных функций, Труды Мат. инст. им. В. А. Стеклова, LII, 75—139 (1958).
17. *Цейтин Г. С.* Один способ изложения теории алгорифмов и перечислимых множеств Труды Мат. инст. им. В. А. Стеклова, LXXII, 69—98 (1964).
18. *Myhill J.* Creative sets, Z. math. Logic und Grundl der Math., 1, 97—108 (1955).
19. *Myhill J., Shepherdson J. C.* Effective operations on partial recursive functions. Zeitschr. f. math. Log. und Grundl. d. Math. 1, H. 4, 310—317 (1955).
20. *Myhill J.* The invalidity of Markoff's Scheme. Zeitschr. für Math. Log. und Grundl. d. Math., 9, 359—360 (1963).
21. *Péter Roŝza.* Rekursive Funktionen, Budapest (1951) (Русский перевод *Петер Р.*, Рекурсивные функции, ИИЛ, М. (1954)).
22. *Gödel K.* Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie. Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, 34—38 (1932).
23. *Tarsky A.* Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen. Studia philosophica, vol. I, 261—405 (1936).
24. *Lorenzen P.* Einführung in die Operative Logik und Mathematik, Berlin, Springer—Verlag (1955).
25. *Fraenkel A. A.* Bar-Hillel Y. Foundations of Set Theory. Amsterdam (1958). (Русский перевод: *Франкель А., Бар-Хиллел И.*, Основания теории множеств, Москва, „Мир" (1966).
26. *Heyting A.* After thirty years, Logic, Methodology and Philosophy of science, Proceedings of the 1960 International Congress, Standford Univ. Press, Standford 194—197 (1962) (Русский перевод: *А. Гейтинг.* Тридцать лет спустя, „Математическая логика и ее применения", Сб. статей под ред. Э. Нагеля, П. Саппса, А. Тарского, „Мир", М., 224—228, 1965).

27. *Nelson D.* Recursive functions and intuitionistic number theory, Trans. Amer. Math. Soc., 61, 307—368 (1947).
28. *Nelson D.* Constructible falsity, Journ. Symb. Logic, 14, 16—26 (1949).
29. *Chen Chung Chang, H. J. Keisler.* Conrinuous model theory, Princeton (1966). (Русский перевод: *Г. Дж. Кейслер, Чэн Чень-Чунь*, Теория непрерывных моделей, М., „Мир“, 1972).
30. *Zadeh L. A.* Fuzzy sets, Information and Control, 8, 338—353 (1965).
31. *Kreisel G.* A remark on free choice sequences and the topological Completeness proofs. Journ. Symb. Log. 23, 369—388 (1958).
32. *Gentzen G.* Untersuchungen über das logische Schließen, I. Math. Zeitschr., 39, № 2, 176—210 (1934); II. Math. Zeitscgr., 39, № 3, 405—431 (1934); (Русский перевод: *Генцен Г.* Исследования логических выводов, Сб. „Математическая теория логического вывода“, М., „Наука“, 9—74, 1967).
33. *Косовский Н. К.* О распознавании инвариантных свойств алгорифмов, Записки Научных семинаров ЛОМИ, том. 32, «Исслед. по констр. математике и мат. логике, V», 29—34 (1972).
34. *Марков А. А.* О конструктивных функциях. Труды Мат. инст. им. В. А. Стеклова, LII, 315—348 (1958).
35. *Smullyan R. M.* Theory of formal systems, Revised edition, Princeton University Press, Plinceton, N. Y. (1963).