КОНСТРУКТИВНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

5—703

С. Н. МАНУКЯН

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РАЗБИЕНИЙ ПЛОСКОСТИ НЕВЫРОЖДЕННЫМИ КОНСТРУКТИВНЫМИ КРИВЫМИ

В статье [1] были установлены конструктивные аналоги основных утверждений классической теоремы Жордана для континентных равномерно непрерывных кривых. При этом не делалось специального предположения, касающегося невырожденности рассматриваемых кривых. В связи с этим некоторые утверждения конструктивного аналога теоремы Жордана, установленного в [1], были по своей форме слабее, чем соответствующие утверждения классической теоремы Жордана. По существу в [1] был установлен, например, не тот факт, что конструктивная кривая рассматриваемого типа разбивает плоскость на две конструктивные области, а лишь тот факт, что такая кривая разбивает плоскость на не более чем две конструктивные области. Введя дополнительное предположение невырожденности конструктивной кривой, можно усилить ту форму теоремы Жордана, которая была установлена в [1]. Ниже будет доказано, что для *всякой невырожденной равномерно непрерывной континентной замкнутой кривой можно построить точку, являющуюся внутренней относительно этой кривой* (теорема 1).

Доказывается также, что *всякая точка кривой указанного типа является предельной для внутренних точек относительно этой кривой* (теорема 2); это утверждение доказывается в точности так же, как аналогичное утверждение, касающееся внешних точек кривых ([2], II часть, теорема 2.2).

Доказательство существования внутренних точек интуционистских жордановых кривых было дано Л. Э. Я. Брауэром [3].

Однако доказательство Л. Э. Я. Брауэра не проведено достаточно отчетливым образом, и остается неясным, возможно ли провести аналогичное рассуждение в рамках конструктивной математики. Приводимое ниже доказательство теоремы 1 основано на ином методе, отличном от метода, применяемого Л. Э. Я. Брауэром.

Мы будем употреблять терминологию и обозначения из [1] и [2]. Вначале мы введем несколько вспомогательных понятий и установим некоторые их свойства.

Будем говорить, что число $t \in \alpha\Delta\beta$ является *рациональным относительно* $\alpha\Delta\beta$, если осуществимо такое рациональное число d, что $t-\alpha = d\cdot(\beta-\alpha)$. Будем говорить, что ломаная L, заданная на $\alpha\Delta\beta$, *рационально параметризована*, если осуществимо такое определяющее дробление P ломаной L, что все FR-числа, входящие в P, рациональны относительно $\alpha\Delta\beta$.

Пусть K — кривая, заданная на сегменте $\alpha\Delta\beta$. Будем говорить, что точка $x \ni y$ является *точкой самопересечения* кривой K, если осуществимы такие FR-числа t_1 и t_2, принадлежащие $\alpha\Delta\beta$, что

$$t_1 \neq t_2, \qquad K^{\xi}(t_1) = K^{\xi}(t_2) = x, \qquad K^{\eta}(t_1) = K^{\eta}(t_2) = y.$$

Пусть K — кривая, заданная на сегменте $\alpha\Delta\beta$. Будем говорить, что невырожденный сегмент $\alpha_1\Delta\beta_1$, где $\alpha \leqslant \alpha_1 < \beta_1 \leqslant \beta$, является *сегментом постоянства* кривой K, если

$$\forall t\,(t \in \alpha_1\Delta\beta_1 \supset K(t) = K(\alpha_1)).$$

Будем говорить, что $x \ni y$ является *точкой сильного самопересечения кривой* K, заданной на $\alpha\Delta\beta$, если осуществимы такие FR-числа t_1 и t_2, принадлежащие $\alpha\Delta\beta$, что $t_1 < t_2$, $K(t_1) = K(t_2) = x \ni y$ и $t_1\Delta t_2$ не есть сегмент постоянства кривой K, и $\alpha\Delta t_1$ и $t_2\Delta\beta$ не суть одновременно сегменты постоянства кривой K.

Пусть $\alpha\Delta\beta$ — невырожденный сегмент, и пусть FR-числа u и v принадлежат $\alpha\Delta\beta$ и таковы, что $\rho_{\alpha\Delta\beta}(u, v) \neq \frac{\beta-\alpha}{2}$. Будем говорить, что точка $w \in \alpha\Delta\beta$ находится *циклически в границах* u и v, если

$$\rho_{\alpha\Delta\beta}(u, v) = \rho_{\alpha\Delta\beta}(u, w) + \rho_{\alpha\Delta\beta}(w, v).$$

Сначала установим следующие утверждения:

Лемма 1. *Если FR-числа x, y удовлетворяют условиям $x, y \in \alpha\Delta\beta$, $\alpha < x < y < \beta$, $y - x < \frac{\beta-\alpha}{2}$, то FR-число $z \in \alpha\Delta\beta$ находится циклически в границах x и y в том и только в том случае, когда $x \leqslant z \leqslant y$.*

Доказательство проводится разбором различных случаев расположения z относительно x и y:

1) $z - y < \frac{\beta-\alpha}{2}, \quad z - x < \frac{\beta-\alpha}{2}$;

2) $z - y < \frac{\beta-\alpha}{2}, \quad z - x \geqslant \frac{\beta-\alpha}{2}$;

3) $z - y \geqslant \frac{\beta-\alpha}{2}, \quad z - x \geqslant \frac{\beta-\alpha}{2}$.

Лемма 2. *Если FR-числа x, y удовлетворяют условиям* $x, y \in \alpha\Delta\beta$, $\alpha \leqslant x < y \leqslant \beta$, $y - x > \frac{\beta-\alpha}{2}$, *то FR-число* $z \in \alpha\Delta\beta$ *находится циклически в границах x и y в том и только в том случае, когда* $y \leqslant z \leqslant \beta \vee \alpha \leqslant z \leqslant x$.

Доказательство проводится разбором различных случаев расположения z относительно x и y:

1) $z - x > \frac{\beta-\alpha}{2}$, $\quad y - z < \frac{\beta-\alpha}{2}$;

2) $z - x < \frac{\beta-\alpha}{2}$, $\quad y - z > \frac{\beta-\alpha}{2}$;

3) $z - x < \frac{\beta-\alpha}{2}$, $\quad y - z < \frac{\beta-\alpha}{2}$.

Лемма 3. *Если FR-числа x, y удовлетворяют условиям* $x, y \in \alpha\Delta\beta$ $|x - y| \neq \frac{\beta-\alpha}{2}$, *то FR-число z находится циклически в границах x и y в том и только в том случае, когда z находится циклически в границах y и x.*

Доказательство очевидно.

Лемма 4. *Пусть* x, y, u, v, w — *FR-числа и* $\alpha \leqslant x, y, u, v, w \leqslant \beta$, *причем* $|u - v| \neq \frac{\beta-\alpha}{2}$. *Если x и y циклически находятся в границах u и v, а w циклически находится в границах x и y, то w циклически находится в границах u и v.*

Доказательство. Если $x = y$ или $u = v$, то доказательство очевидно. Возможны 2 случая.

I случай. $|u - v| < \frac{\beta-\alpha}{2}$. Если $x < y$, то $y - x < \frac{\beta-\alpha}{2}$. Имея в виду, что x и y находятся циклически в границах u и v, а w находится циклически в границах x и y согласно лемме 1 получим $u \leqslant x \leqslant w \leqslant y \leqslant v$, а это в соответствии леммы 1 означает требуемое. Если $x > y$, то $x - y < \frac{\beta-\alpha}{2}$ и аналогично вышесказанному получим $u \leqslant y \leqslant w \leqslant x \leqslant v$. Лемма в случае I доказана.

II случай. $|u - v| > \frac{\beta-\alpha}{2}$. Не нарушая общности предположим, что $u < v$ (так как в случае $v < u$ все рассуждения аналогичны случаю $u < v$).

Если $x < y$, то имея в виду, что x и y циклически находятся в границах u и v согласно лемме 2 получим $\alpha \leqslant x \leqslant u \vee v \leqslant x \leqslant \beta$, $\alpha \leqslant y \leqslant u \vee v \leqslant y \leqslant \beta$.

Возможны 3 случая:

1. $\alpha \leqslant x$, $y \leqslant u$, тогда ясно, что $y - x < \frac{\beta - \alpha}{2}$; согласно лемме 1 получим $\alpha \leqslant x \leqslant w \leqslant y \leqslant u$, что и требовалось.

2. $\alpha \leqslant x \leqslant u$, $v \leqslant y \leqslant \beta$, тогда ясно, что $y - x > \frac{\beta - \alpha}{2}$; согласно лемме 2 получим $\alpha \leqslant w \leqslant x \vee y \leqslant w \leqslant \beta$, отсюда получим $\alpha \leqslant w \leqslant u \vee$ $\vee\, v \leqslant w \leqslant \beta$, что и требовалось.

3. $v \leqslant x$, $y \leqslant \beta$, тогда $y - x < \frac{\beta - \alpha}{2}$; согласно лемме 1 получим $v \leqslant x \leqslant w \leqslant y \leqslant \beta$, что и требовалось доказать. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть L_1 и L_2 — линейные образы каких-либо двух отрезков по сегменту $\alpha\Delta\beta$. Тогда*

$$\forall t (t \in \alpha\Delta\beta \supset \rho(L_1(t), L_2(t) \leqslant \max(\rho(L_1(\alpha), L_2(\alpha)), \rho(L_1(\beta), L_2(\beta))).$$

Доказательство очевидно.

Лемма 6. *Пусть K — равномерно непрерывная континентная замкнутая кривая, определенная на невырожденном сегменте $\alpha\Delta\beta$. Тогда для любого рационального $\eta > 0$ осуществима замкнутая несамопересекающаяся рационально параметризованная ломаная L с рациональными вершинами, определенная на $\alpha\Delta\beta$ и такая, что:*

(I) $\forall t (t \in \alpha\Delta\beta \supset \rho(K(t), L(t)) < \eta)$;

(II) *для всякой точки $x \sigma y$, η-удаленной от K оказывается: $x \sigma y$ удалена от L, и скачок на $\alpha\Delta\beta$ всякой угловой функции ломаной L относительно $x \sigma y$ равен скачку на $\alpha\Delta\beta$ всякой угловой функции кривой K относительно $x \sigma y$.*

Доказательство. Пусть K — равномерно непрерывная континентная замкнутая кривая, определенная на $\alpha\Delta\beta$, и пусть η положительное рациональное число.

Пользуясь теоремой 2.7 из [2], (часть II) построим такое положительное рациональное $\delta_1 < \frac{\eta}{2}$, что для любого положительного рационального $\varepsilon_1 < \delta_1$ и для любой ε_1-цепи $Ц$ кривой K, и для любой точки $x \sigma y$, $\frac{\eta}{2}$ — удаленной от K, оказывается: порядок цепи $Ц$ относительно $x \sigma y$ совпадает со скачком угловой функции кривой K относительно $x \sigma y$, деленным на 2π.

Далее, пользуясь равномерной непрерывностью кривой K, построим положительное рациональное $\varepsilon < \frac{\beta - \alpha}{2}$, такое, что

$$\forall uv \left(u, v \in \alpha\Delta\beta \,\&\, |u - v| < \varepsilon \supset \rho(K(u), K(v)) < \frac{\eta}{8}\right). \tag{1}$$

Пользуясь континентностью кривой K, построим такое положительное $\delta < \delta_1$, что

$$\forall uv (u, v \in \alpha\Delta\beta \,\&\, \rho(K(u), K(v)) < \delta \supset \rho_{\alpha\Delta\beta}(u, v) < \varepsilon). \tag{2}$$

Снова пользуясь равномерной непрерывностью кривой K, построим такое положительное рациональное $\theta < \varepsilon$, что

$$\forall uv \left(u, v \in \alpha\Delta\beta \,\&\, |u - v| < \theta \supset \rho(K(u), K(v)) < \frac{\delta}{8} \right). \tag{3}$$

Построим такое натуральное $n > 1$, что

$$\frac{\beta - \alpha}{n} < \theta, \tag{4}$$

и такие FR-числа $t_0, t_1, \ldots, t_n$, что

$$t_i = \alpha + i \frac{\beta - \alpha}{n} \quad (0 \leqslant i \leqslant n). \tag{5}$$

Построим замкнутую ломаную L_1. заданную на $\alpha\Delta\beta$, с определяющим дроблением $t_0 * t_1 * \cdots * t_n$, такую, что

$$K(t_i) = L_1(t_i) \qquad (0 \leqslant i \leqslant n), \tag{6}$$

Легко видеть, что $K(t_0) * K(t_1) * \cdots * (K(t_{n-1})$ есть $\frac{\delta}{8}$—цепь $\Big($следовательно, $\frac{\eta}{16}$ — цепь$\Big)$ кривой K. В самом деле для любого i от 0 до $n-1$ будет: $|t_{i+1} - t_i| = \frac{\beta - \alpha}{n} < \theta$, а потому, в силу (3) будет

$$\rho(K(t_i), K(t_{i+1})) < \frac{\delta}{8} \tag{7}$$

(отметим, что $K(t_n) = K(t_0) = K(\alpha) = K(\beta)$; кроме того, в силу следствия из теоремы 1.3 из [4], для всякого $t \in \alpha\Delta\beta$ осуществимо такое i, что $0 \leqslant i \leqslant n-2$, и $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+2}$, но тогда $|t - t_{i+1}| < \frac{\beta - \alpha}{n} < \theta$, а тогда, снова в силу (3),

$$\rho(K(t), K(t_{i+1})) < \frac{\delta}{8}. \tag{8}$$

Тем самым $K(t_0) * K(t_1) * \cdots * K(t_{n-1})$ есть $\frac{\delta}{8}$ — цепь кривой K. В силу построения δ_1, для всякой точки $x \ni y$, $\frac{\eta}{2}$ —удаленной от K, оказывается: $K(t_0) * K(t_1) * \cdots * K(t_{n-1})$ есть $\frac{\eta}{2}$ — цепь относительно точки $x \ni y$ и порядок этой цепи относительно $x \ni y$ равен скачку всякой угловой функции K относительно $x \ni y$. Тем самым скачки любых угловых функций кривых K и L_1 относительно всякой точки $x \ni y$, $\frac{\eta}{2}$ — удаленной от K, равны.

Пусть $t \in \alpha\Delta\beta$. Построим i, такое, что $0 \leqslant i \leqslant n-2$, и $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+2}$. Тогда $|t_{i+1} - t| < \frac{\beta-\alpha}{n}$, и точки $L_1(t)$ и $L_1(t_{i+1})$ лежат на одной стороне ломаной L_1; но в силу (7) длина каждой стороны ломаной L_1 меньше $\frac{\delta}{8}$, а потому

$$\rho(L_1(t), L_1(t_{i+1})) < \frac{\delta}{8} \tag{9}$$

откуда, в силу (8)

$$\rho(L_1(t), K(t)) \leqslant \rho(L_1(t), L_1(t_{i+1})) + \rho(L_1(t_{i+1}), K(t_{i+1})) + \\ + \rho(K(t_{i+1}), K(t)) < \frac{\delta}{8} + 0 + \frac{\delta}{8} = \frac{\delta}{4} \tag{10}$$

или

$$\rho(L_1(t), K(t)) < \frac{\eta}{8}. \tag{11}$$

Построим теперь рациональные точки $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n$, такие, что $P_0 = P_n$ и

$$\rho(P_i, L_1(t_i)) < \frac{\delta}{8} \qquad (0 \leqslant i \leqslant n)$$

и отрезки $P_i\Delta P_{i+1}$ при $0 \leqslant i < n$ попарно неколлинеарны друг другу, и ни один из них не является вырожденным (возможность построения таких точек очевидна).

Построим ломаную L_2, определенную на $\alpha\Delta\beta$, с определяющим дроблением $t_0 * t_1 * \cdots * t_n$ такую, что

$$L_2(t_i) = P_i \qquad (0 \leqslant i \leqslant n).$$

Таким образом, мы имеем:

$$\rho(L_2(t_i), L_1(t_i)) < \frac{\delta}{8} < \frac{\eta}{16} \qquad (0 \leqslant i \leqslant n),$$

а потому согласно лемме 5

$$\forall t \left(t \in \alpha\Delta\beta \supset \rho(L_2(t), L_1(t)) < \frac{\delta}{8} < \frac{\eta}{16}\right). \tag{12}$$

Следовательно, согласно (10) и (12)

$$\forall t \left(t \in \alpha\Delta\beta \supset \rho(L_2(t), K(t)) < \frac{3\delta}{8} < \frac{3\eta}{16}\right). \tag{13}$$

Ясно, далее, что при любом i от 0 до $n-1$, в силу (6), (7), (12)

$$\rho(L_2(t_i), L_2(t_{i+1})) < \frac{\delta}{8} + \frac{\delta}{8} + \frac{\delta}{8} = \frac{3\delta}{8} < \frac{3\eta}{16}.$$

Всякая точка $x \coloneq y$, η — удаленная от K, в силу (11) и (13) будет $\frac{7}{8}\eta$ — удалена от L_1 и $\frac{13}{16}\eta$ — удалена от L_2; но так как длины сторон ломаных L_1 и L_2 меньше, соответственно, $\frac{\eta}{16}$ и $\frac{3\eta}{16}$, то в силу теоремы 2.6 из [2] (II часть), скачки всяких угловых функций ломаных L_1 и L_2 относительно точки $x \coloneq y$, η-удаленной от K, равны. Эти скачки, в силу доказанного выше, равны также скачку всякой угловой функции кривой K относительно $x \coloneq y$. Таким образом, ломаная L_2 удовлетворяет всем требуемым условиям, кроме, быть может, несамопересекаемости. Остается изменить ломаную L_2 таким образом, чтобы новая ломаная была несамопересекающейся, и вместе с тем сохранила бы остальные интересующие нас свойства ломаной L_2.

Так как стороны ломаной L_2 не вырождены и попарно неколлинеарны, то количество точек самопересечения L_2 конечно (в самом деле, точками самопересечения L_2 могут быть или ее вершины, или точки пересечения каких-либо пар ее сторон, не совпадающих с вершинами; так как два неколлинеарных отрезка могут пересечься не более, чем в одной точке, то в силу рациональности вершин ломаной L_2, мы можем построить список всех ее точек самопересечения, просматривая все вершины L_2 и всевозможные пары ее сторон). Если L_2 не имеет точек самопересечения, то ломаная, удовлетворяющая условиям леммы, уже построена. Будем поэтому рассматривать лишь случай, когда ломаная L_2 имеет хотя бы одну точку самопересечения.

Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_N$ — все точки самопересечения ломаной L_2. Рассмотрим какую-либо из этих точек и обозначим ее через P. Из оказанного выше, принимая во внимание рациональность вершин ломаной L_2, нетрудно вывести, что координаты P суть рациональные числа. Посмотрим все различные числа $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$, такие что $\tau_j \in \alpha\Delta\beta$ и $L_2(\tau_j) = P$ (этих чисел может быть лишь конечное число, в силу невырожденности сторон ломаной L_2). Легко показать, что $\frac{\tau_j - \alpha}{\beta - \alpha}$ при $1 \leqslant j \leqslant r$ суть рациональные числа; действительно, пусть i таково, что $L_2(\tau_j) \in L_2(t_i)\Delta L_2(t_{i+1})$; тогда

$$L_2^{\xi}(\tau_j) = L_2^{\xi}(t_i) + \frac{L_2^{\xi}(t_{i+1}) - L_2^{\xi}(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \cdot (\tau_j - t_i).$$

Так как вершины L_2 рациональны, значит $L_2^{\xi}(t_i)$, $L_2^{\xi}(t_{i+1})$ рациональны; с другой стороны, имеем

$$t_i = \alpha + \frac{i}{n} \cdot (\beta - \alpha) \quad (0 \leqslant i \leqslant n).$$

Значит

$$L_2^{\xi}(\tau_j) = L_2^{\xi}(t_i) + \frac{L_2^{\xi}(t_{i+1}) - L_2^{\xi}(t_i)}{\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}} \cdot \left(\frac{\tau_j - \alpha}{\beta - \alpha} - \frac{i}{n}\right),$$

отсюда имея в виду то, что $L_2(\tau_j) = P$ есть рациональная точка, получим, что $\frac{\tau_j - \alpha}{\beta - \alpha}$ — рациональное число.

Поскольку при любых i и j от 1 до r

$$L_2(\tau_j) = L_2(\tau_j),$$

то в соответствии с (13) имеем:

$$\rho(K(\tau_i),\ K(\tau_j)) \leqslant \rho(K(\tau_i),\ L_2(\tau_i)) + \rho(L_2(\tau_i),\ L_2(\tau_j)) +$$
$$+ \rho(L_2(\tau_j),\ K(\tau_j)) < \frac{3\delta}{8} + 0 + \frac{3\delta}{8} = \frac{3}{4}\delta < \delta,$$

откуда, согласно (2)

$$\rho_{\alpha\Delta\beta}(\tau_i,\ \tau_j) < \varepsilon \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant i \leqslant r \\ 0 \leqslant j \leqslant r \end{pmatrix}. \tag{13a}$$

Ясно, что для любых i и j от 0 до n FR-число $\frac{\rho_{\alpha\Delta\beta}(\tau_i,\ \tau_j)}{\beta - \alpha}$ равно некоторому рациональному числу*, а потому можно выбрать такую пару $(k,\ l)$, для которой расстояние $\rho_{\alpha\Delta\beta}(\tau_k,\ \tau_l)$ является наибольшим среди всех чисел вида $\rho_{\alpha\Delta\beta}(\tau_i,\ \tau_j)$ при $0 \leqslant i \leqslant r,\ 0 \leqslant j \leqslant r$. Исходя из неравенства $\rho_{\alpha\Delta\beta}(\tau_i,\ \tau_j) < \varepsilon < \frac{\beta - \alpha}{6}$, нетрудно убедиться в том, что всякое число τ_i при $0 \leqslant i \leqslant r$ находится циклически в границах τ_k и τ_l. Далее, так как $\frac{\tau_k - \alpha}{\beta - \alpha}$ и $\frac{\tau_l - \alpha}{\beta - \alpha}$, равны некоторым рациональным числам, то $\tau_k < \tau_l \vee \tau_l < \tau_k$; отсюда следует, что для всякой точки P самопересечения ломаной L_2 мы можем построить FR-числа u и v, принадлежащие $\alpha\Delta\beta$, такие, что

$$\rho_{\alpha\Delta\beta}(u,\ v) < \varepsilon < \frac{\beta - \alpha}{6};$$
$$L_2(u) = L_2(v) = P; \tag{14}$$
$$(|u - v| < \varepsilon \supset u < v)\ \&\ (|u - v| > \varepsilon \supset v < u);$$
$$\rho_{\alpha\Delta\beta}(u,\ \alpha) + \rho_{\alpha\Delta\beta}(\alpha,\ v) = \rho_{\alpha\Delta\beta}(u,\ v) \supset |u - v| < \varepsilon,$$

и всякое FR-число t, удовлетворяющее условию $L_2(t) = P$, находится циклически в границах u и v. Построим алгорифмы **A** и **D**, перерабатывающие всякую точку P самопересечения ломаной L_2 в FR-числа u и v, соответственно удовлетворяющие указанным свойствам (очевидно, что эти условия определяют u и v однозначно).

---

* Это следует из легко проверяемого равенства

$$\frac{\rho_{\alpha\Delta\beta}(\tau_i,\ \tau_j)}{\beta - \alpha} = \min\left(\left| \frac{\tau_i - \alpha}{\beta - \alpha} - \frac{\tau_j - \alpha}{\beta - \alpha} \right|,\ 1 - \left| \frac{\tau_i - \alpha}{\beta - \alpha} - \frac{\tau_j - \alpha}{\beta - \alpha} \right| \right).$$

Точку самопересечения P ломаной L_2 назовем ***краевой***, если $\mathbf{A}(P) > \mathbf{D}(P)$, и некраевой, если $\mathbf{A}(P) < \mathbf{D}(P)$ (очевидно, что $\mathbf{A}(P) \neq \mathbf{D}(P)$). Ясно, что для всякой некраевой точки P самопересечения ломаной L_2 будет:

$$\mathbf{D}(P) - \mathbf{A}(P) < \varepsilon < \frac{\beta - \alpha}{6},$$

и всякое число t, удовлетворяющее условию $L_2(t) = P$, принадлежит $\mathbf{A}(P) \Delta \mathbf{D}(P)$. Для всякой краевой точки P самопересечения ломаной L_2 будет:

$$(\beta - \mathbf{A}(P)) + (D(P) - \alpha) < \varepsilon < \frac{\beta - \alpha}{6},$$

и всякое число t, удовлетворяющее условию $L_2(t) = P$, принадлежит $\mathbf{A}(P) \Delta \beta$ или $\alpha \Delta \mathbf{D}(P)$ (отметим, что один из этих двух сегментов может оказаться вырожденным).

Составим список всех различных чисел $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$, принадлежащих $\alpha \Delta \beta$ и таких, что $L_2(\theta_i)$ есть точка самопересечения ломаной L_2. Расположим эти числа в порядке возрастания; таким образом, будем считать, что $\alpha \leqslant \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_m \leqslant \beta$.

Если среди точек самопересечения ломаной L_2 имеется хотя бы одна краевая точка самопересечения, то тогда построим число B, являющееся максимальным числом среди чисел вида $\mathbf{D}(P)$, где P — краевая точка самопересечения ломаной L_2 (очевидно, что B входит в список $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$). Построим также число A такое, что $A = \mathbf{A}(L_2(B))$. Ясно, что A входит в список $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$; ясно также, что $\alpha \leqslant B < A \leqslant \beta$, $(B - \alpha) + (\beta - A) < \varepsilon < \dfrac{\beta - \alpha}{6}$, и невозможно, чтобы было $\alpha = B$ и $A = \beta$. Построим далее числа $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_s, v_s$, каждое из которых входит в список $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$, согласно следующим правилам, формулируемым ниже отдельно для того случая, когда ломаная L_2 имеет краевые точки самопересечения и для того случая, когда L_2 таких не имеет.

Случай 1. Ломаная L_2 не имеет краевых точек самопересечения.

1) В качестве u_1 берем θ_1; в качестве v_1 берем $\mathbf{D}(L_2(u_1))$ (очевидно, что будет $\alpha < u_1 < v_1$).

2) Пусть уже построены числа $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_h, v_h$. Если имеются числа θ_i, θ_j, такие, что $v_h < \theta_i < \theta_j < \beta$, $L_2(\theta_i) = L_2(\theta_j)$, то тогда в качестве u_{h+1} берем наименьшее из таких чисел θ_i, больших v_h, для которых имеется θ_j, удовлетворяющее условиям $v_h < \theta_i < \theta_j < \beta$, $L_2(\theta_i) = L_2(\theta_j)$; в качестве v_{h+1} берем $\mathbf{D}(L_2(u_{h+1}))$.

Если чисел θ_i и θ_j, удовлетворяющих указанным условиям, не имеется в списке $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$, то процесс построения списка $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_s, v_s$ считаем завершенным.

Случай 2. Ломаная L_2 имеет краевые точки самопересечения.

1) Если имеются числа θ_i и θ_j такие, что $B < \theta_i < \theta_j < A$, $L_2(\theta_i) = L_2(\theta_j)$, то тогда в качестве u_1 берем наименьшее из таких

чисел θ_i, больших B, для которых имеется θ_j, удовлетворяющее условиям $B<\theta_i<\theta_j<A$, $L_2(\theta_i)=L_2(\theta_j)$; в качестве v_1 берем $D(L_2(u_1))$.

Если чисел θ_i и θ_j, удовлетворяющих указанным условиям, не имеется в списке $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$, то полагаем $u_1=A$, $v_1=B$, и процесс построения списка $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_s, v_s$ считаем завершенным.

2) Пусть уже построены числа $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_h, v_h$. Если имеются числа θ_i и θ_j такие, что $v_h<\theta_i<\theta_j<A$, $L_2(\theta_i)=L_2(\theta_j)$, то тогда в качестве u_{h+1} берем наименьшее из таких чисел θ_i, больших v_h, для которых имеется θ_j, удовлетворяющее условиям $v_h<\theta_i<$ $<\theta_j<A$, $L_2(\theta_i)=L_2(\theta_j)$; в качестве v_{h+1} берем $D(L_2(u_{h+1}))$. Если чисел θ_i и θ_j, удовлетворяющих указанным условиям, в списке $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ не имеется, то полагаем $u_{h+1}=A$, $v_{h+1}=B$, после чего процесс построения списка $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_s, v_s$ считаем завершенным.

Указанными правилами способ построения списка $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots,$ u_s, v_s, очевидно, определяется однозначно. По построению, в случае отсутствия краевых точек самопересечения ломаной L_2 числа $u_1, v_1,$ $u_2, v_2, \dots, u_s, v_s$ удовлетворяют условию

$$\alpha<u_1<v_1<u_2<v_2<\cdots<u_s<v_s<\beta, \tag{15}$$

а в случае наличия краевых точек самопересечения ломаной L_2 числа $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_s, v_s$, удовлетворяют условию:

$$\alpha\leqslant v_s<u_1<u_2<v_2<\cdots<u_{s-1}<v_{s-1}<u_s\leqslant\beta. \tag{16}$$

Из правил построения чисел $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_s, v_s$ легко усматривается, что справедливы и обратные утверждения, если имеет место (15), то ломаная L_2 не имеет краевых точек пересечения, а если имеет место (16), то такие точки имеются (например, $L_2(u_s)$).

Ясно, что $L_2(u_i)=L_2(v_i)$ при $1\leqslant i\leqslant s$; обозначим каждую точку $L_2(u_i)$ при $1\leqslant i\leqslant s$ через Q_i. Легко видеть, что в случае (15) имеем: $\rho_{\alpha\Delta\beta}(u_i, v_i)=v_i-u_i$ при $1\leqslant i\leqslant s$; в случае (16) имеем $\rho_{\alpha\Delta\beta}(u_i, v_i)=v_i-u_i$ при $1\leqslant i\leqslant s-1$ и $\rho_{\alpha\Delta\beta}(u_s, v_s)=\beta-\alpha+v_s-u_s$. В самом деле, из (13а) вытекает, что как в случае (15), так и в случае (16)

$$\rho_{\alpha\Delta\beta}(u_i, v_i)<\varepsilon<\frac{\beta-\alpha}{6} \qquad (1\leqslant i\leqslant s).$$

Следовательно, как в случае (15), так и в случае (16), если при некотором i от 1 до s, таком, что $u_i<v_i$ окажется $\rho_{\alpha\Delta\beta}(u_i, v_i)=$ $=\beta-\alpha-v_i+u_i$, то тогда $(\beta-v_i)+(u_i-\alpha)<\frac{\beta-\alpha}{6}$, откуда

$$v_i>\frac{5}{6}(\beta-\alpha)+\alpha; \qquad u_i>\frac{1}{6}(\beta-\alpha)+\alpha; \tag{16a}$$

отсюда следует, как легко видеть, что $\rho_{\alpha\Delta\beta}(u_i, v_i) = \rho_{\alpha\Delta\beta}(u_i, \alpha) + \rho_{\alpha\Delta\beta}(v_i, \alpha)$, т. е., что α находится циклически в границах u_i и v_i; следовательно, согласно лемме 4, α находится циклически в границах $\mathbf{A}(Q_i)$ и $\mathbf{D}(Q_i)$; следовательно, Q_i есть краевая точка самопересечения ломаной L_2. Таким образом, в случае (15) соотношение $\rho_{\alpha\Delta\beta}(u_i, v_i) = \beta - \alpha - u_i + v_i$ невозможно, и должно быть $\rho_{\alpha\Delta\beta}(u_i, v_i) = v_i - u_i$. В случае (16) при $u_i < v_i$ (т. е. при $1 \leqslant i \leqslant s-1$) соотношения (16a) невозможны, поскольку в случае их выполнения оказалось бы, что $\mathbf{D}(Q_i) \geqslant u_i > v_s = B$, причем Q_i — краевая точка самопересечения ломаной L_2; это однако находится в противоречии со способом построения B. Таким образом, при $1 \leqslant i \leqslant s-1$ в случае (16) имеем: $\rho_{\alpha\Delta\beta}(u_i, v_i) = v_i - u_i$; то обстоятельство, что $\rho_{\alpha\Delta\beta}(u_s, v_s) = \beta - \alpha + v_s - u_s$, усматривается непосредственно. Таким образом, высказанные выше утверждения, касающиеся значений $\rho_{\alpha\Delta\beta}(u_i, v_i)$ в различных случаях, полностью доказаны.

Легко показать, что $Q_i \neq Q_j$ при $i \neq j$, $1 \leqslant i \leqslant s$, $1 \leqslant j \leqslant s$. В самом деле, если в случае (16) оказалось бы, что $Q_i = Q_s$ при $i \neq s$, то оказалось бы, что $L_2(u_i) = Q_s$, а потому u_i должно было бы находиться циклически в границах $\mathbf{A}(Q_s)$ и $\mathbf{D}(Q_s)$, т. е., в границах u_s и v_s; это однако, противоречит тому, что $\alpha \leqslant v_s < u_i < u_s \leqslant \beta$, и $(\beta - u_s) + (v_s - \alpha) < \varepsilon < \frac{\beta - \alpha}{6}$.

Если же $Q_i = Q_j$ при $i < j$ (причем в случае (16) $j \neq s$), то $L_2(v_j) = L_2(u_i)$, а это означает, в соответствии с неравенством $u_i < v_i < v_j$, что при выборе v_i было нарушено то условие, что в качестве v_i должно выбираться наибольшое возможное число, дающее самопересечение с $L_2(u_i)$ и принадлежащее интервалу $u_i \nabla \beta$ или $u_i \nabla A$.

Посредством $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{s-1}$ условимся обозначать сегменты, соответственно $u_1 \Delta v_1$, $u_2 \Delta v_2$, ..., $u_{s-1} \Delta v_{s-1}$. Введем следующий сокращенный оборот речи: будем говорить, что FR-число $t \in \alpha\Delta\beta$ принадлежит сегменту Ω_s, или иначе $t \in \Omega_s$ если в случае (15) оказывается, что $t \in u_s \Delta v_s$, а в случае (16) оказывается, что $t \in u_s \Delta \beta \vee t \in \alpha \Delta v_s$. (Отметим, что отдельно взятому термину „сегмент Ω_s“ в случае (16) не придается никакого смысла). *Промежуточными сегментами* в случае (15) будем называть сегменты $\alpha \Delta u_1$, $v_1 \Delta u_2$, $v_2 \Delta u_3$, ..., $v_s \Delta \beta$, а в случае (16) – сегменты $v_s \Delta u_1$, $v_1 \Delta u_2$, $v_2 \Delta u_3$, ..., $v_{s-1} \Delta u_s$.

Легко видеть, что при всяком i от 1 до s всякое FR-число $t \in \alpha\Delta\beta$, удовлетворяющая условию $L_2(t) = Q_i$ принадлежит сегменту Ω_i.

Построим теперь ломаную L_3, определенную на $\alpha\Delta\beta$ и удовлетворяющую следующим условиям:

(а) Для всякого t, принадлежащего сегменту Ω_i при $1 \leqslant i \leqslant s$, оказывается:

$$L_3(t) = L_2(u_i).$$

(b) Для всякого t, принадлежащего одному из промежуточных сегментов оказывается:

$$L_3(t) = L_2(t).$$

(c) Определяющее дробление ломаной L_3 составлено из: (1) всех FR-чисел, входящих в определяющее дробление и принадлежащих промежуточным сегментам; (2) всех FR-чисел u_i и v_i при $1 \leqslant i \leqslant s$; (3) чисел α и β (при этом подразумевается, что из списка указанных FR-чисел мы устраняем все повторения; это возможно, так как каждое из таких чисел t обладает тем свойством, что $\frac{t-\alpha}{\beta-\alpha}$ равно некоторому рациональному числу).

Возможность построения ломаной L_3, удовлетворяющей указанным условиям, очевидна.

Установим некоторые свойства L_3. Докажем, прежде всего, что

$$\forall t \left(t \in \alpha\Delta\beta \supset \rho(K(t),\ L_3(t)) < \frac{5}{16}\eta \right). \tag{17}$$

В самом деле, если t принадлежит одному из промежуточных сегментов, то $L_3(t) = L_2(t)$, а тогда неравенство

$$\rho(K(t),\ L_3(t)) < \frac{5}{16}\eta \tag{18}$$

немедленно следует из (13). Если $t \in u_i \Delta v_i$ при некотором i от 1 до $s-1$, то в силу (14)

$$|u_i - t| < \varepsilon,$$

откуда, согласно (1)

$$\rho(K(u_i),\ K(t)) < \frac{\eta}{8},$$

а так как, с другой стороны, на основании (13) имеем

$$\rho(K(u_i),\ L_2(u_i)) < \frac{3\eta}{16},$$

то получаем в соответствии с определением ломаной L_3

$$\rho(K(t),\ L_3(t)) = \rho(K(t),\ L_2(u_i) \leqslant \rho(K(t),\ K(u_i)) +$$

$$+ \rho(K(u_i),\ L_2(u_i)) < \frac{\eta}{8} + \frac{3\eta}{16} = \frac{5\eta}{16}.$$

Таким же способом устанавливается (18) при $t \in u_s \Delta v_s$ в случае (15). Если же имеет место (16), то при $t \in u_s \Delta \beta$ и при $t \in \alpha \Delta v_s$ вначале, исходя из неравенства $\beta - \alpha - (u_s - v_s) < \varepsilon$ мы получаем, что

$$\beta - u_s < \varepsilon;$$

$$v_s - \alpha < \varepsilon;$$

откуда как в случае $t \in u_s \Delta \beta$, так и в случае $t \in \alpha \Delta v_s$, получаем

$$\rho(K(u_s), K(t)) < \frac{\eta}{8},$$

$$\rho(K(v_s), K(t)) < \frac{\eta}{8},$$

после чего (18) получается при $t \in \Omega_s$ дословно так же, как и ранее. Тем самым, как для случая (15), так и для случая (16) мы доказали (18) при каждом t, принадлежащем какому-либо сегменту определяющего дробления ломаной L_3; отсюда легко устанавливается, что при всяком $t \in \alpha \Delta \beta$ справедливо двойное отрицание (18), а значит и само это неравенство. Таким образом, (17) доказано.

Докажем далее, что для любой точки $x \sigma y$, η — удаленной от K, скачок всякой угловой функции ломаной L_3 относительно $x \sigma y$ равен скачку всякой угловой функции ломаной L_2 (а следовательно, и кривой K) относительно $x \sigma y$.

Пусть φ — некоторая угловая функция кривой L_2 относительно точки $x \sigma y$, η — удаленной от K. Рассcмотрим сегмент $u_l \Delta v_l$ при $1 < i \leqslant s-1$; докажем, что $\varphi(u_l) = \varphi(v_l)$.

Действительно при всяком $t \in u_l \Delta v_l$ имеем:

$$\rho(L_2(u_l), L_2(t)) \leqslant \rho(L_2(u_l), K(u_l)), \rho(K(u_l), K(t)) +$$

$$+ \rho(K(t), L_2(t)) < \frac{3\eta}{16} + \frac{\eta}{8} + \frac{3\eta}{16} = \frac{\eta}{2}. \tag{19}$$

Далее имеем

$$\rho(L_2(u_l), x \sigma y) \geqslant \rho(K(u_l), x \sigma y) - \rho(L_2(u_l), K(u_l)) > \eta - \frac{3}{16}\eta = \frac{13}{16}\eta. \tag{20}$$

Проведем прямую Π через точки $L_2(u_l)$ и $x \sigma y$. Рассмотрим кривую L_2' определенную на $u_l \Delta v_l$ и такую, что

$$\forall t (t \in u_l \Delta v_l \supset L_2'(t) = L_2(t)).$$

Ясно, что функция φ, рассматриваемая на сегменте $u_l \Delta v_l$ будет угловой функцией для L_2'. Из (19) вытекает, что все точки лежащие на кривой L_2' удалены от $L_2(u_l)$ на расстояние, меньшее $\frac{\eta}{2}$; в то же время точка $x \sigma y$ удалена от $L_2(u_l)$ на расстояние, большее $\frac{13}{16}\eta$. Следовательно, на луче прямой Π, исходящем из точки $x \sigma y$ и не проходящем через точку $L_2(u_l)$, нет ни одной точки кривой L_2'. Согласно теореме 4.5 из [1] на указанном луче найдется точка, внешняя относительно L_2'. Но тогда, согласно теореме 4.4 из [1] точка $x \sigma y$ также является внешней относительно L_2'. Следовательно,

$$\varphi(u_l) = \varphi(v_l).$$

Дословно таким же образом доказывается, что в случае (15) будет: $\varphi(u_s) = \varphi(v_s)$. Таким образом, в случае (15) мы имеем: $\varphi(u_i) = \varphi(v_i)$ при $1 \leqslant i \leqslant s$. Если теперь ψ есть угловая функция ломаной L_3 относительно точки $x \ni y$, то как легко видеть в случае (15), имеем: $\psi(u_i) = \psi(v_i)$ при $1 \leqslant i \leqslant s$. По построению ломаной L_3, осуществимо такое целое q, что $\psi(t) - \varphi(t) = 2\pi q$ при $t \in \alpha\Delta u_1$, но тогда $\psi(v_i) - \varphi(v_i) = \psi(u_i) - \varphi(u_i) = 2\pi q$, а тогда $\psi(t) - \varphi(t) = 2\pi q$ при $t \in v_1 \Delta u_2$. Продолжая таким же образом, убедимся в том, что $\psi(t) - \varphi(t) = 2\pi q$ при всяком $t \in \alpha\Delta\beta$; но тогда $\psi(\beta) - \psi(\alpha) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$, и, таким образом, в случае (15) скачки φ и ψ по $\alpha\Delta\beta$ совпадают. Докажем то же утверждение для случая (16). Построим ломаную L'_2, определенную на $u_s \Delta (v_s + \beta - \alpha)$, такую, что

$$L'_2(t) = \begin{cases} L_2(t) & \text{при} \quad u_s \leqslant t \leqslant \beta; \\ L_2(t - \beta + \alpha) & \text{при} \quad \beta \leqslant t \leqslant v_s + \beta - \alpha. \end{cases}$$

Построим также функцию ω, определенную на $u_s \Delta (v_s + \beta - \alpha)$ и такую, что

$$\omega(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{при} \quad u_s \leqslant t \leqslant \beta; \\ \varphi(t - \beta + \alpha) - \varphi(\alpha) + \varphi(\beta) & \text{при} \quad \beta \leqslant t \leqslant v_s + \beta - \alpha, \end{cases}$$

где φ — некоторая угловая функция L_2 относительно $x \ni y$. Точно таким же образом как это делалось для предыдущего случая, убеждаемся в том, что точка $x \ni y$ является внешней для кривой L_2. Легко видеть, что функция ω является угловой функцией для ломаной L'_2. Следовательно,

$$\omega(v_s + \beta - \alpha) - \omega(u_s) = 0,$$

иначе говоря

$$\varphi(v_s) - \varphi(\alpha) + \varphi(\beta) - \varphi(u_s) = 0,$$

или

$$\varphi(u_s) - \varphi(v_s) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha). \tag{21}$$

Теперь пусть ψ есть угловая функция L_3 относительно $x \ni y$. Ясно, что $\psi(v_s) - \varphi(v_s) = 2\pi q$, где q — некоторое целое число. Тогда таким же методом, как в случае (15) мы получим, что $\psi(t) - \varphi(t) = 2\pi q$ при $t \in v_s \Delta u_s$. Отсюда следует, что $\psi(u_s) - \psi(v_s) = \varphi(u_s) - \varphi(v_s)$. Но так как, очевидно, $\psi(v_s) = \psi(\alpha)$, $\psi(u_s) = \psi(\beta)$, то, пользуясь (21), получаем:

$$\psi(\beta) - \psi(\alpha) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha),$$

т. е. скачки φ и ψ по $\alpha\Delta\beta$ совпадают. Тем самым для всех случаев мы доказали, что скачки всяких угловых функций кривых L_2 и L_3 относительно любой точки, η-удаленной от K, совпадают.

Докажем, что ломаная L_3 не может иметь точек сильного самопересечения. Предположим противное; пусть Q есть точка сильного самопересечения ломаной L_3. Тогда имеются такие t^* и t^{**}, что

(a) $\alpha \leqslant t^* < t^{**} \leqslant \beta$;

(b) $L_3(t^*) = L_3(t^{**}) = Q$

(c) $\exists y_1 y_2 (t^* < y_1 < t^{**} \,\&\, (\alpha \leqslant y_2 < t^* \vee t^* < y_2 \leqslant \beta) \,\&\, L_3(y_1) \neq$
$$\neq Q \,\&\, L_3(y_2) \neq Q).$$

Рассмотрим различные случаи взаимного расположения чисел t^* и t^{**}.

(1) $t^* \in \Omega_i$, $t^{**} \in \Omega_i$, при некотором i от 1 до s. Этот случай невозможен ввиду (c).

(2) $t^* \in \Omega_i$, $t^{**} \in \Omega_j$, $i \neq j$. В этом случае оказалось бы, что $Q = Q_i$, $Q = Q_j$, а это противоречит тому, что $Q_i \neq Q_j$ при $i \neq j$.

(3) $t^* \in \Omega_i$ при $1 \leqslant i \leqslant s$, а t^{**} находится внутри одного из промежуточных сегментов. Тогда $L_3(t^*) = L_2(u_i)$, $L_3(t^{**}) = L_2(t^{**})$. Если $i = s$ и имеет место случай (16), то $L_2(t^{**}) = Q_s$, и, вместе с тем $v_s < t^{**} < u_s$, т. е. ввиду $\beta - \alpha - u_s + v_s < \varepsilon < \frac{\beta - \alpha}{6}$, t^{**} циклически не находится в границах v_s и u_s: это однако противоречит определению u_s и v_s в случае (16). Если $i \neq s$ или имеет место случай (15), то $u_i \leqslant t^* \leqslant v_i \leqslant t^{**}$, причем в случае (15) будет $t^{**} < \beta$, а в случае (16) $t^{**} < u_1$; это означает, что при выборе v_i было нарушено правило, согласно которому в роли v_i должно выбираться наибольшее число, дающее самопересечение с $L_2(u_i)$ и меньшее β или A. Следовательно, рассматриваемая ситуация невозможна.

(4) t^* находится внутри одного из промежуточных сегментов, $t^{**} \in \Omega_s$, и имеет место случай (16). Тогда $L_3(t^*) = L_2(t^*)$, $L_3(t^{**}) = L_2(u_s) = Q_s$. В этом случае оказывается, что $L_2(t^*) = Q_s$ и, вместе с тем, $v_s < t^* < u_s$, т. е., t^* циклически не находится в границах v_s и u_s; но это противоречит определению u_s и v_s в случае (16).

(5) t^* находится внутри одного из промежуточных сегментов, и выполнено следующее условие: имеет место случай (15), или же $t^{**} \overline{\in} \Omega_s$. Тогда $L_3(t^*) = L_2(t^*)$, и $L_3(t^{**}) = L_2(u_i)$ если $t^{**} \in \Omega_i$, (тогда, очевидно, $t^* < u_i$ и $L_3(t^{**}) = L_2(t^{**})$ если t^{**} находится внутри одного из промежуточных сегментов. Таким образом, квазиосуществимо (и, как легко видеть, осуществимо) такое τ, что $\tau > t^*$, $\tau < \beta$ в случае (15), $\tau < u_s$ в случае (16), и $L_2(\tau) = L_2(t^*)$. Но t^* находится внутри промежуточного сегмента $\alpha \Delta u_1$ (это возможно лишь в случае (15)) или же внутри сегмента $v_i \Delta u_{i+1}$ при некотором i от 1 до $s - 1$ (легко видеть, что $t^* \in v_s \Delta \beta$ в случае (15) невозможно). Следовательно, при выборе u_1 в случае $t^* \in \alpha \nabla u_1$, или же при выборе u_{i+1} в случае $t^* \in v_i \nabla u_{i+1}$ было нарушено правило, согласно которому в роли u_1 или u_{i+1} выбирается наименьшее число, дающее самопересечение ломаной L_2 в интервале $\alpha \nabla \beta$, $B \nabla A$, $v_i \nabla \beta$ или $v_i \nabla A$. Следовательно, рассматриваемая ситуация невозможна.

Легко проверить, что если t^* и t^{**} принадлежат некоторым сегментам определяющего дробления ломаной L_3, то имеет место один из случаев (1)—(5) (тогда, в частности, если $t^* \in \Omega_i$ при некотором i от 1 до s, то имеет место один из случаев (1), (2), (3), а если t^* находится внутри одного из промежуточных сегментов, то имеет место один из случаев (4), (5). Но, очевидно, имеет место квазидизъюнкция всевозможных случаев принадлежности t^* и t^{**} тем или иным сегментам определяющего дробления ломаной L_3, а так как в каждом из этих случаев устанавливается невозможность t^* и t^{**} с указанными выше свойствами, то тем самым мы доказали, что ломаная L_3 не имеет точек сильного самопересечения.

Легко видеть, что в тех частях ломаной L_3, которые определены на промежуточных сегментах, все стороны попарно неколлинеарны, невертикальны и негоризонтальны. Легко видеть также, что максимальная длина сторон ломаной L_3 не превосходит максимальной длины сторон ломаной L_2, т. е., $\frac{3\eta}{16}$.

Переходим, наконец, к построению ломаной L_4, которая будет удовлетворять всем условиям леммы. Для каждой вершины P ломаной L_3, очевидно, можно построить минимум расстояний d этой вершины до сторон ломаной L_3, удаленных от рассматриваемой вершины. Построим рациональное число $\lambda > 0$, меньшее всех чисел d, построенных указанным образом для всех вершин ломаной L_3. Построим далее число w, такое, что

$$w = \min_{1 \leqslant i \leqslant s} \rho_{\alpha\Delta\beta}(u_i, v_i).$$

Ясно, что $w > 0$. Пользуясь равномерной непрерывностью ломаной L_3, построим рациональное число $\mu > 0$, такое, что $\mu < \frac{w}{4}$, и

$$\forall t_1, t_2 \left(t_1, t_2 \in \alpha\Delta\beta \,\&\, |t_1 - t_2| < \mu \supset \rho(L_3(t_1), L_3(t_2)) < \min\left(\frac{\lambda}{3}, \frac{\eta}{16}\right)\right). \tag{22}$$

Далее, построим FR-числа $p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots, p_s, q_s$, принадлежащие $\alpha\Delta\beta$ и удовлетворяющие условиям:

(I) числа $\frac{p_i - \alpha}{\beta - \alpha}$ и $\frac{q_i - \alpha}{\beta - \alpha}$ равны некоторым рациональным числам (следовательно, точки $L_3(p_i)$ и $L_3(q_i)$ рациональны).

(II) В случае (15) $\alpha < p_1 < u_1 < v_1 < q_1 < p_2 < u_2 < v_2 < q_2 < \cdots < p_s < u_s < v_s < q_s < \beta$; в случае (16) $\alpha \leqslant v_s < q_s < p_1 < u_1 < v_1 < q_1 < p_2 < u_2 < v_2 < q_2 < \cdots < p_{s-1} < u_{s-1} < v_{s-1} < q_{s-1} < p_s < u_s < \beta$.

(III) Каждый из сегментов $p_i \Delta u_i$ и $v_i \Delta q_i$ содержится в некотором сегменте определяющего дробления ломаной L_3.

(IV) Для любого i от 1 до s

$$0 < u_i - p_i < \mu;$$

$$0 < q_i - v_i < \mu.$$

Возможность построения чисел $p_1, q_1, \ldots, p_s, q_s$, обладающих указанными свойствами, очевидна.

Посмотрим, наконец, ломаную L_4, удовлетворяющую перечисленным ниже условиям (эти условия мы сформулируем отдельно для того случая, когда имеет место (15) и для того случая, когда имеет место (16)). В случае (15) ломаная L_4 строится таким образом, что она обладает следующими свойствами:

(I) Если $t \in \alpha\Delta\beta$, и t не принадлежит ни одному из сегментов $p_i\Delta q_i$ при $1 \leqslant i \leqslant s$, то $L_4(t) = L_3(t)$.

(2) Если $t \in p_i\Delta q_i$, где $1 \leqslant i \leqslant s$, то

$$L_4^{\xi}(t) = L_3^{\xi}(p_i) + \frac{L_3^{\xi}(q_i) - L_3^{\xi}(p_i)}{q_i - p_i} \cdot (t - p_i);$$

$$L_4^{\eta}(t) = L_3^{\eta}(p_i) + \frac{L_3^{\eta}(q_i) - L_3^{\eta}(p_i)}{q_i - p_i} \cdot (t - p_i).$$

В случае (16) ломаная L_4 строится таким образом, что она обладает следующими свойствами:

(1) Если $t \in \alpha\Delta\beta$, t не принадлежит ни одному из сегментов $p_i\Delta q_i$ при $1 \leqslant i \leqslant s-1$ и $t \notin p_s\Delta\beta$, $t \notin \alpha\Delta q_s$, то $L_4(t) = L_3(t)$.

(2) Если $t \in p_i\Delta q_i$, где $1 \leqslant i \leqslant s-1$, то

$$L_4^{\xi}(t) = L_3^{\xi}(p_i) + \frac{L_3^{\xi}(q_i) - L_3^{\xi}(p_i)}{q_i - p_i} \cdot (t - p_i);$$

$$L_4^{\eta}(t) = L_3^{\eta}(p_i) + \frac{L_3^{\eta}(q_i) - L_3^{\eta}(p_i)}{q_i - p_i} \cdot (t - p_i).$$

(3) Если $t \in p_s\Delta\beta$, то

$$L_4^{\xi}(t) = L_3^{\xi}(p_s) + \frac{L_3^{\xi}(q_s) - L_3^{\xi}(p_s)}{\beta - p_s + q_s - \alpha} \cdot (t - p_s);$$

$$L_4^{\eta}(t) = L_4^{\eta}(p_s) + \frac{L_3^{\eta}(q_s) - L_3^{\eta}(p_s)}{\beta - p_s + q_s - \alpha} \cdot (t - p_s).$$

(4) Если $t \in \alpha\Delta q_s$, то

$$L_4^{\xi}(t) = L_3^{\xi}(p_s) + \frac{L_3^{\xi}(q_s) - L_3^{\xi}(p_s)}{\beta - p_s + q_s - \alpha} \cdot (\beta - p_s + t - \alpha);$$

$$L_4^{\eta}(t) = L_3^{\eta}(p_s) + \frac{L_3^{\eta}(q_s) - L_3^{\eta}(p_s)}{\beta - p_s + q_s - \alpha} \cdot (\beta - p_s + t - \alpha).$$

Построение ломаной L_4, обладающей указанными свойствами, производится очевидным образом; определяющее дробление L_4 получается из определяющего дробления L_3 заменой всех u_i на p_i и всех v_i на q_i.

Докажем, что ломаная L_4 удовлетворяет всем условиям леммы. Из построения ломаной L_4 ясно, что при всех i от 1 до s

$$0 < p_i - u_i < \mu;$$

$$0 < q_i - v_i < \mu;$$

отсюда, согласно (22)

$$\rho(L_3(p_i),\ L_3(u_i)) < \frac{\eta}{16};$$
$$\rho(L_3(q_i),\ L_3(v_i)) < \frac{\eta}{16}, \tag{22a}$$

или, иначе говоря,

$$\rho(L_4(p_i),\ L_3(u_i)) < \frac{\eta}{16};$$
$$\rho(L_4(q_i),\ L_3(v_i)) < \frac{\eta}{16}. \tag{23}$$

Кроме того, согласно определению ломаной L_4, имеем при всяком i от 1 до $s-1$

$$|L_4^{\xi}(p_i) - L_4^{\xi}(u_i)| \leqslant \frac{|L_3^{\xi}(q_i) - L_3^{\xi}(p_i)|}{q_i - p_i} \cdot |p_i - u_i| <$$

$$< \frac{|L_3^{\xi}(q_i) - L_3^{\xi}(v_i)| + |L_3^{\xi}(u_i) - L_3^{\xi}(p_i)|}{v_i - u_i} \cdot \mu < \left(\frac{\eta}{16} + \frac{\eta}{16}\right)\frac{\mu}{w} < \frac{\eta}{32}.$$

Аналогичным образом получаем

$$|L_4^{\eta}(p_i) - L_4^{\eta}(u_i)| < \frac{\eta}{32};$$

$$|L_4^{\xi}(q_i) - L_4^{\xi}(v_i)| < \frac{\eta}{32};$$

$$|L_4^{\eta}(q_i) - L_4^{\eta}(v_i)| < \frac{\eta}{32}.$$

кроме того, точно таким же образом получаем, используя определение L_4, что такие же неравенства справедливы и при $i = s$. Следовательно, при всяком i от 1 до s имеем:

$$\rho(L_4(p_i),\ L_4(u_i)) < \frac{\eta}{16};$$

$$\rho(L_4(q_i),\ L_4(v_i)) < \frac{\eta}{16}.$$

Из этих неравенств и из (23) получаем, что при всяком i от 1 до s

$$\rho(L_3(u_i), L_4(u_i)) < \frac{\eta}{8};$$
$$\rho(L_3(v_i), L_4(v_i)) < \frac{\eta}{8}. \qquad (24)$$

Теперь покажем, что для всякого $t \in \alpha\Delta\beta$

$$\rho(L_3(t), L_4(t)) < \frac{\eta}{8}. \qquad (25)$$

В самом деле, если t не принадлежит ни одному из сегментов $p_i\Delta q_i$ при $1 \leqslant i \leqslant s-1$, и в случае (15) не принадлежит $p_s\Delta q_s$, а в случае (16) не принадлежит ни одному из сегментов $p_s\Delta\beta$ и $\alpha\Delta q_s$, то неравенство (25) тривиально. Если t принадлежит одному из сегментов $p_i\Delta u_i$, $u_i\Delta v_i$, $v_i\Delta q_i$ при $1 \leqslant i \leqslant s-1$, то неравенство (25) немедленно выводится из леммы 5 на основании (24). Аналогично доказывается (25) при $t \in p_s\Delta u_s$, $t \in u_s\Delta v_s$, $t \in v_s\Delta q_s$, в случае (15) и при $t \in p_s\Delta u_s$, $t \in u_s\Delta\beta$, $t \in \alpha\Delta v_s$, $t \in v_s\Delta q_s$ в случае (16). Так как для любого t справедлива квазидизъюнкция всех рассмотренных случаев, то для любого t имеет место двойное отрицание (25), а значит и само это неравенство.

Сопоставляя (17) и (25), получаем, что

$$\forall t\left(t \in \alpha\Delta\beta \supset \rho(K(t), L_4(t)) < \frac{7}{16}\eta\right). \qquad (26)$$

Пусть теперь $x \circ y$ есть точка, η—удаленная от кривой K. Из (17) и (26) следует, что точка $x \circ y$ $\frac{11}{16}\eta$—удалена от L_3 и $\frac{9}{16}\eta$—удалена от L_4. С другой стороны, длина каждой стороны ломаной L_3, как уже было сказано выше, меньше, чем $\frac{3\eta}{16}$. Длина каждой стороны ломаной L_4, очевидно, либо не превосходит длины некоторой стороны ломаной L_3, либо не превосходит $\rho(L_4(p_i), L_4(q_i))$ при некотором i от 1 до s, но, очевидно, согласно (22а), что

$$\rho(L_4(p_i), L_4(q_i)) = \rho(L_3(p_i), L_3(q_i)) \leqslant \rho(L_3(p_i), L_3(u_i)) +$$
$$+ \rho(L_3(u_i), L_3(v_i)) + \rho(L_3(v_i), L_3(q_i)) < \frac{\eta}{16} + 0 + \frac{\eta}{16} = \frac{\eta}{8},$$

а потому длина каждой стороны ломаной L_4 меньше, чем $\frac{3\eta}{16}$. Таким образом цепи, составленные из последовательных вершин ломаных L_3 и L_4, являются $\frac{3\eta}{16}$ — цепями относительно точки $x\sigma y$; эти цепи могут быть получены одно из другой посредством перемещений некоторых их точек на расстояние, меньшее $\frac{\eta}{16}$; отсюда следует, согласно теореме 2.6 из [2] (II часть), что порядки этих цепей относительно точки $x\sigma y$ равны; но тогда скачки любых угловых функций ломаных L_3 и L_4 относительно точки $x\sigma y$ равны. Следовательно, в соответствии с доказанным выше, скачок всякой угловой функции кривой K относительно $x\sigma y$ равен скачку всякой угловой функции ломаной L_4 относительно $x\sigma y$.

Докажем теперь, что ломаная L_4 является несамопересекающейся. Прежде всего по построению чисел p_i и q_i, имеем для всякого i от 1 до s

$$\rho(L_3(p_i),\ L_3(u_i)) < \frac{\lambda}{3};$$

$$\rho(L_3(q_i),\ L_3(v_i)) < \frac{\lambda}{3}.$$

Таким образом, вершины отрезка $L_4(p_i)\Delta L_4(q_i)$ удалены от $L_3(u_i)$ меньше, чем на $\frac{\lambda}{3}$; следовательно, и всякая точка, лежащая на отрезке $L_4(p_i)\Delta L_4(q_i)$ удалена от $L_3(u_i)$ меньше, чем на $\frac{\lambda}{3}$.

В силу выбора числа λ, $\rho(L_3(u_i),\ L_3(u_j)) > \lambda$ при $1 \leqslant i \leqslant s$, $1 \leqslant j \leqslant s$, $i \neq j$. Кроме того, всякая точка, лежащая на одной из сторон ломаной L_3, на которой не лежит $L_3(u_i)$ отстоит от $L_3(u_i)$, больше, чем на λ. Отсюда следует, что ни на каком отрезке $L_4(p_i)\Delta L_4(q_i)$ при $1 \leqslant i \leqslant s$ не может быть точек самопересечения ломаной L_4.

Что касается точек, лежащих на ломаной L_4 и не лежащих ни на одном из отрезков $L_4(p_i)\Delta L_4(q_i)$ при $1 \leqslant i \leqslant s$, то каждая такая точка лежит также на кривой L_3, а потому если бы она была точкой самопересечения L_4, то она была бы также точкой сильного самопересечения ломаной L_3, а ломаная L_3, согласно доказанному выше, не имеет точек сильного самопересечения. Мы доказали, что L_4 есть несамопересекающая ломаная. Тем самым лемма полностью доказана.

Лемма 7. *Пусть рациональные числа A, B, C таковы, что $A^2 + B^2 > 0$, и пусть ломаная L с рациональными вершинами, определенная на $\alpha\Delta\beta$, такова, что ни одна ее вершина не лежит на прямой $Ax + By + C = 0$. Тогда число пересечений ломаной L с прямой $Ax + By + C = 0$ нечетно в случае, когда*

$$(A \cdot L^{\xi}(\alpha) + B \cdot L^{\eta}(\alpha) + C) \cdot (A \cdot L^{\xi}(\beta) + B \cdot L^{\eta}(\beta) + C) < 0,$$

и четно, когда

$$(A \cdot L^{\xi}(\alpha) + B \cdot L^{\eta}(\alpha) + C) \cdot (A \cdot L^{\xi}(\beta) + B \cdot L^{\eta}(\beta) + C) > 0.$$

Доказательство проводится таким же образом, как и доказательство аналогичного утверждения в классической математике.

Теорема 1. *Пусть K — равномерно непрерывная континентная замкнутая невырожденная кривая. Тогда существует точка $x\vartheta y$, внутренняя относительно кривой K.*

Доказательство. Пусть K определена на $\alpha\Delta\beta$ и удовлетворяет всем условиям теоремы. Не нарушая общности, можем считать, что α и β рациональные. Так как K невырожденная, значит $\alpha < \beta$. Обозначим $\frac{\alpha+\beta}{2}$ через γ. Ясно, что $\rho(K(\alpha), K(\gamma)) \neq 0$, т. е.,

$$(K^{\xi}(\alpha) - K^{\xi}(\gamma))^2 + (K^{\eta}(\alpha) - K^{\eta}(\gamma))^2 \neq 0,$$

а тогда

$$K^{\xi}(\alpha) \neq K^{\xi}(\gamma) \vee K^{\eta}(\alpha) \neq K^{\eta}(\gamma).$$

Пусть для определенности $K^{\eta}(\alpha) \neq K^{\eta}(\gamma)$, тогда $K^{\eta}(\alpha) < K^{\eta}(\gamma) \vee K^{\eta}(\alpha) > K^{\eta}(\gamma)$. Пусть для определенности $K^{\eta}(\alpha) < K^{\eta}(\gamma)$. Построим рациональное $\varepsilon > 0$, такое, что

$$K^{\eta}(\gamma) - K^{\eta}(\alpha) > \varepsilon. \tag{1}$$

Согласно равномерной непрерывности кривой K построим рациональное число δ, такое, что $\delta < \frac{\beta-\alpha}{2}$, и

$$\forall t_1 t_2 \left(t_1, t_2 \in \alpha\Delta\beta \,\&\, |t_1 - t_2| < \delta \supset \rho(K(t_1), K(t_2)) < \frac{\varepsilon}{8}\right). \tag{2}$$

Построим рациональное число d, такое, что

$$0 < d < \frac{\delta}{2}. \tag{3}$$

Тогда, очевидно, $\alpha < \alpha + d < \gamma - d < \gamma + d < \beta - d < \beta$. Согласно континентности кривой K построим положительное рациональное $\eta > 0$, такое, что $\eta < \frac{\varepsilon}{4}$, и

$$\forall t_1 t_2 (t_1, t_2 \in \alpha\Delta\beta \,\&\, \rho(K(t_1), K(t_2)) < \eta \supset \rho_{\alpha\Delta\beta}(t_1, t_2) < d). \tag{4}$$

Докажем, что для любых t_1 и t_2, таких, что $t_1 \in (\alpha + d)\Delta(\gamma - d)$, $t_2 \in (\gamma + d)\Delta(\beta - d)$ справедливо неравенство:

$$\rho(K(t_1), K(t_2)) \geqslant \eta. \tag{5}$$

В самом деле, если бы для t_1 и t_2 с указанными свойствами оказалось бы: $\rho(K(t_1), K(t_2)) < \eta$, то оказалось бы также: $\rho_{\alpha\Delta\beta}(t_1, t_2) < d$, а это невозможно, поскольку для $t_1 \in (\alpha+d)\Delta(\gamma-d)$ и $t_2 \in (\gamma+d)\Delta(\beta-d)$ всегда имеет место соотношение $\rho_{\alpha\Delta\beta}(t_1, t_2) \geqslant 2d$. Согласно лемме 6, построим несамопересекающуюся замкнутую ломаную L, с рациональными вершинами рационально параметризованными, такую, что

$$\forall t\,(t \in \alpha\Delta\beta \supset \rho\,(K(t),\, L(t)) < \frac{\eta}{64}, \tag{6}$$

и для всякой точки $x \ni y$, $\frac{\eta}{64}$ —удаленной от K, оказывается: скачок всякой угловой функции кривой K относительно $x \ni y$ равен скачку всякой угловой функции L относительно $x \ni y$.

Рассмотрим ломаные L_1 и L_2 определенные соответственно на $(\alpha + d)\,\Delta\,(\gamma - d)$ и $(\gamma + d)\,\Delta\,(\beta - d)$ и такие, что

$$\begin{aligned} L_1(t) &= L(t) \quad \text{при} \quad t \in (\alpha + d)\,\Delta\,(\gamma - d); \\ L_2(t) &= L(t) \quad \text{при} \quad t \in (\gamma + d)\,\Delta\,(\beta - d). \end{aligned} \tag{7}$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} &\forall t_1 t_2\,(t_1 \in (\alpha + d)\,\Delta\,(\gamma - d)\ \&\ t_2 \in (\gamma + d)\,\Delta\,(\beta - d) \supset \\ &\supset \rho\,(L_1(t_1),\, L_2(t_2)) > \frac{31}{32}\,\eta. \end{aligned} \tag{8}$$

В самом деле, если t_1 и t_2 таковы, что

$$t_1 \in (\alpha + d)\,\Delta\,(\gamma - d)\ \&\ t_2 \in (\gamma + d)\,\Delta\,(\beta - d),$$

то, согласно (5)

$$\rho\, K(t_1),\ K(t_2)) \geqslant \eta,$$

кроме того, в силу (6),

$$\rho\,(K(t_1),\, L_1(t_1)) = \rho\,(K(t_1),\, L(t_1)) < \frac{\eta}{64},$$

$$\rho\,(K(t_2),\, L_2(t_2)) = \rho\,(K(t_2),\, L(t_2)) < \frac{\eta}{64},$$

откуда

$$\rho\,(L_1(t_1),\, L_2(t_2)) > \eta - \frac{\eta}{64} - \frac{\eta}{64} = \frac{31}{32}\,\eta;$$

этим доказано требуемое.

Далее в силу (2) и (3) имеем:

$$\rho\,(K(\gamma),\, K(\gamma - d)) < \frac{\varepsilon}{8};$$

$$\rho\,(K(\gamma),\, K(\gamma + d)) < \frac{\varepsilon}{8};$$

отсюда на основании (6) и (7)

$$\rho(K(\gamma),\ L_1(\gamma-d))<\frac{\varepsilon}{8}+\frac{\eta}{64}<\frac{\varepsilon}{4};$$
$$\rho(K(\gamma),\ L_2(\gamma+d))<\frac{\varepsilon}{8}+\frac{\eta}{64}<\frac{\varepsilon}{4}\cdot \tag{9}$$

Совершенно аналогичным образом получаем

$$\rho(K(\alpha),\ L_1(\alpha+d))<\frac{\varepsilon}{4};$$
$$\rho(K(\beta),\ L_2(\beta-d))=\rho(K(\alpha),\ L_2(\beta-d))<\frac{\varepsilon}{4}\cdot \tag{10}$$

Построим теперь на основании (1) рациональное число b, не совпадающее ни с одной из ординат вершин ломаных L, L_1, L_2 и такое, что

$$K^{\tau}(\alpha)<b-\frac{\varepsilon}{2}<b<b+\frac{\varepsilon}{2}<K^{\tau}(\gamma). \tag{11}$$

Тогда из (9) и (10) получаем

$$L_1^{\tau}(\alpha+d)<b-\frac{\varepsilon}{4}<b<b+\frac{\varepsilon}{4}<L_1^{\tau}(\gamma-d);$$
$$L_2^{\tau}(\beta-d)<b-\frac{\varepsilon}{4}<b<b+\frac{\varepsilon}{4}<L_2^{\tau}(\gamma+d). \tag{12}$$

Далее, из (2) и (3) имеем

$$\forall t\left(t\in(\gamma-d)\Delta(\gamma+d)\supset\rho(K(\gamma),\ K(t))<\frac{\varepsilon}{8}\right);$$
$$\forall t\left(t\in\alpha\Delta(\alpha+d)\supset\rho(K(\alpha),\ K(t)<\frac{\varepsilon}{8}\right);$$
$$\forall t\left(t\in(\beta-d)\Delta\beta\supset\rho(K(\beta),\ K(t))<\frac{\varepsilon}{8}\right)\cdot$$

Отсюда при помощи (3) мы можем заключить, что всякая точка лележащая на прямой $y=b$, удалена от всякой точки вида $K(t)$ при t, принадлежащем одному из сегментов $\alpha\Delta(\alpha+d)$, $(\gamma-d)\Delta(\gamma+d)$, $(\beta-d)\Delta\beta$, более чем $\frac{3\varepsilon}{8}\cdot$ Следовательно в силу (6), всякая точка, лежащая на прямой $y=b$, удалена от всякой точки вида $L(t)$ при t, принадлежащем одному из трех указанных сегментов, более, чем на $\frac{3\varepsilon}{8}-\frac{\eta}{64}>\frac{\varepsilon}{4}\cdot$ В частности, всякая точка пересечения прямой $y=b$

с ломаной L есть точка пересечения этой прямой с одной из ломаных L_1 и L_2.

Так как вершины ломаных L_1 и L_2 не находятся на прямой $y=b$, то, в соответствии с неравенствами (12), на основании леммы 7 заключаем, что прямая $y=b$ пересекается с каждой из этих ломаных в нечетном числе точек. Обозначим абсциссы всевозможных точек пересечения ломаных L_1 и L_2 с прямой $y=b$ через

$$x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ \ldots,\ x_{l_1}^{(1)},\ x_1^{(2)},\ x_2^{(2)},\ \ldots,\ x_{l_2}^{(2)},\ \ldots,\ x_1^{(k)},\ x_2^{(k)},\ \ldots,\ x_{l_k}^{(k)},$$

где

$$x_1^{(1)}<x_2^{(1)}<\cdots<x_{l_1}^{(1)}<x_1^{(2)}<x_2^{(2)}<\cdots<x_{l_2}^{(2)}<\cdots<x_1^{(k)}<$$
$$<x_2^{(k)}<\cdots<x_{l_k}^{(k)},$$

и всякие точки $x_u^{(l)}$ и $x_v^{(l)}$ лежат на одной и той же ломаной—или на L_1, или на L_2, а всякие две точки вида $x_u^{(l)}$ и $x_u^{(l+1)}$ лежат на разных ломаных — одна на L_1, а другая на L_2. В соответствии со сказанными выше, натуральные числа

$$l_1+l_3+l_5+\cdots+l_{2\cdot\left[\frac{k-1}{2}\right]+1},$$

$$l_2+l_4+l_6+\cdots+l_{2\cdot\left[\frac{k}{2}\right]}$$

являются нечетными. Следовательно, среди чисел $l_1, l_2, \ldots, l_k$ имеется по крайней мере два нечетных. Обозначим через l_j наименьшее нечетное число среди $l_1, l_2, \ldots, l_k$; тогда, очевидно, $1\leqslant j<k$, и $l_1+l_2+\cdots+l_j$ есть нечетное число. Точки $x_{l_j}^{(j)}\sigma b$ и $x_1^{(j+1)}\sigma b$ лежат на разных ломаных; для определенности пусть первая из них лежит на L_1, а вторая — на L_2. Построим числа $\tau_1\in(\alpha+d)\Delta(\gamma-d)$ и $\tau_2\in(\gamma+d)\Delta(\beta-d)$, такие, что

$$\begin{aligned} x_{l_j}^{(j)}\sigma b &= L_1(\tau_1);\\ x_1^{(j+1)}\sigma b &= L_2(\tau_2). \end{aligned}\tag{13}$$

По построению имеем: $L_1^{\eta}(\tau_1)=L_2^{\eta}(\tau_2)=b$, $L_1^{\xi}(\tau_1)<L_2^{\xi}(\tau_2)$, и никакая точка вида $x\sigma b$, где $L_1^{\xi}(\tau_1)<x<L_2^{\xi}(\tau_2)$, не лежит ни на одной из ломаных L_1 и L_2. Согласно (8), имеем:

$$L_2^{\xi}(\tau_2)-L_1^{\xi}(\tau_1)>\frac{31}{32}\eta>\frac{\eta}{2}.$$

Рассмотрим теперь замкнутый прямоугольник со следующими вершинами:

$$L_1^{\xi}(\tau_1) \sigma \left(b - \frac{\eta}{4}\right);$$

$$L_1^{\xi}(\tau_1) \sigma \left(b + \frac{\eta}{4}\right);$$

$$L_2^{\xi}(\tau_2) \sigma \left(b - \frac{\eta}{4}\right);$$

$$L_2^{\xi}(\tau_2) \sigma \left(b + \frac{\eta}{4}\right).$$

Обозначим этот прямоугольник через Π. Назовем FR-число x, принадлежащее сегменту $L_1^{\xi}(\tau_1) \Delta L_2^{\xi}(\tau_2)$, L_1-абсциссой (соответственно L_2-абсциссой), если имеется точка с абсциссой x, принадлежащая Π и лежащая на L_1 (соответственно на L_2). Докажем, что если FR-число x_1 является L_1-абсциссой, а FR-число x_2 является L_2-абсциссой, то

$$|x_1 - x_2| > \frac{\eta}{2}.$$

В самом деле, если точки $x_1 \sigma y_1$ и $x_2 \sigma y_2$ принадлежат прямоугольнику Π и лежат на ломаных, соответственно L_1 и L_2, то в силу (8) и определения Π, имеем

$$|y_1 - y_2| \leqslant \frac{\eta}{2}$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \geqslant \left(\frac{31}{32}\right)^2 \cdot \eta^2,$$

откуда

$$(x_1 - x_2)^2 \geqslant \eta^2 \left(\frac{961}{1024} - \frac{1}{4}\right) > \frac{\eta^2}{4},$$

что и требовалось.

Отсюда вытекает, в частности, что *никакое FR-число из $L_1^{\xi}(\tau_1) \Delta L_2^{\xi}(\tau_2)$ не может быть одновременно L_1-абсциссой и L_2-абсциссой*. Ясно также, что $L_1^{\xi}(\tau_1)$ есть L_1-абсцисса, а $L_2^{\xi}(\tau_2)$ есть L_2-абсцисса.

Пользуясь рациональностью вершин прямоугольника Π и ломаной L_1, нетрудно построить наибольшую L_1-абсциссу; ясно, что она будет рациональна. Построим, в соответствии с этим, рациональное число A, являющееся наибольшей L_1-абсциссой. Ясно, что $A < L_2^{\xi}(\tau_2) - \frac{\eta}{2}$.

Аналогичным образом построим наименьшее рациональное число B, такое, что $A \leqslant B \leqslant L_2^{\xi}(\tau_2)$, и B есть L_2-абсцисса (напомним, в связи с этим, что $L_2^{\xi}(\tau_2)$ есть L_2-абсцисса). Тогда

$$L_1^{\xi}(\tau_1) \leqslant A < B \leqslant L_2^{\xi}(\tau_2),$$

$$B - A > \frac{\eta}{2},$$

и в открытом прямоугольнике с вершинами

$$A \ni \left(b - \frac{\eta}{4}\right),$$

$$A \ni \left(b + \frac{\eta}{4}\right),$$

$$B \ni \left(b - \frac{\eta}{4}\right),$$

$$B \ni \left(b + \frac{\eta}{4}\right),$$

нет ни одной точки, лежащей на какой-либо из ломаных L_1 и L_2. Возьмем теперь центр указанного прямоугольника, т. е. точку $\frac{A+B}{2} \ni b$. Покажем, что эта точка будет внутренней относительно кривой K, чем и будет завершено доказательство теоремы.

Очевидно, что расстояние точки $\frac{A+B}{2} \ni b$ от всякой точки, лежащей на одной из ломаных L_1 и L_2, не меньше $\frac{\eta}{4}\cdot$ Следовательно, точка $\frac{A+B}{2} \ni b$ удалена от всякой точки вида $K(t)$ при $t \in (\alpha + d) \Delta \Delta (\gamma - d)$ или $t \in (\gamma + d) \Delta (\beta - d)$ не меньше чем на $\frac{\eta}{4} - \frac{\eta}{64} > \frac{\eta}{8}\cdot$ С другой стороны, ордината точки $\frac{A+B}{2} \ni b$ есть b, а потому она удалена от всякой точки вида $K(t)$ при $t \in \alpha\Delta(\alpha+d)$, $t \in (\gamma-d)\Delta(\gamma+d)$ или $t \in (\beta - d)\Delta\beta$ более, чем на $\frac{3\varepsilon}{8} > \frac{3}{2}\eta > \frac{\eta}{8}\cdot$ Таким образом, точка $\frac{A+B}{2} \ni b$ $\frac{\eta}{8}$ — удалена от K; поэтому, согласно лемме 6, по построению L, точка $\frac{A+B}{2} \ni b$ удалена от L, и скачок всякой угловой функции кривой K относительно точки $\frac{A+B}{2} \ni b$ совпадает со скачком всякой угловой функции кривой L относительно точки $\frac{A+B}{2} \ni b$. Но прямая $y = b$ при $x \leqslant \frac{A+B}{2}$ пересекает кривую L $(l_1 + l_2 + \cdots + l_j)$ раз, т. е. нечетное число раз; отсюда, в силу теоремы 2.10 из

[2], (II часть) и теоремы 4.5 из [1], получаем, что точка $\frac{A+B}{2}\mathbin{\supset}b$ является внутренней относительно L, следовательно, скачок всякой угловой функции L относительно $\frac{A+B}{2}\mathbin{\supset}b$ отличен от нуля; но тогда скачок всякой угловой функции K относительно $\frac{A+B}{2}\mathbin{\supset}b$ тоже отличен от нуля. Следовательно, $\frac{A+B}{2}\mathbin{\supset}b$ есть внутренняя точка относительно K. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть K — равномерно непрерывная, континентная замкнутая невырожденная кривая определенная на $\alpha\Delta\beta$. Тогда для всякого $t\in\alpha\Delta\beta$ и для всякого n осуществима точка $x\mathbin{\supset}y$, внутренняя относительно K, и такая, что $\rho(x\mathbin{\supset}y,\ K(t))<2^{-n}$.*

Доказательство. Согласно теореме 1, осуществима точка $x_0\mathbin{\supset}y_0$, внутренняя относительно кривой K. Так как $x_0\mathbin{\supset}y_0$ — внутренняя относительно K, то она удалена от K, значит, осуществимо такое натуральное N, что точка $x_0\mathbin{\supset}y_0$ 2^{-N} — удалена от K.

Возьмем произвольное натуральное число n и произвольное $t\in\alpha\Delta\beta$ и покажем, что осуществима точка $x\mathbin{\supset}y$, внутренняя относительно K и такая, что $\rho(x\mathbin{\supset}y,\ K(t))<2^{-n}$. Для этого, очевидно, достаточно построить точку $x\mathbin{\supset}y$, внутреннюю относительно K и такую, что $\rho(K(t),\ x\mathbin{\supset}y)<2^{-n_0}$, где $n_0=\max(n,\ N)$. Впередь будем полагать, что n_0 есть $\max(N,\ n)$.

Далее, достаточно рассмотреть тот случай, когда t совпадает с α; в самом деле, общий случай сводится к случаю $t=\alpha$ посредством соответствующего преобразования параметризации кривой K (не меняющего внутренних и внешних точек относительно кривой).

Согласно равномерной непрерывности K построим такое натуральное m_0, что

$$\forall t_1t_2(t_1,\ t_2\in\alpha\Delta\beta\,\&\,|t_1-t_2|<2^{-m_0}\supset\rho(K(t_1),\ K(t_2))<2^{-n_0-1}).$$

Построим FR-число α^* и β^* такие, что

$$\alpha^*=\min\left(\alpha+2^{-m_0-2},\ \ \alpha+\frac{\beta-\alpha}{3}\right);$$

$$\beta^*=\max\left(\beta-2^{-m_0-2},\ \ \alpha+2\cdot\frac{\beta-\alpha}{3}\right).$$

Тогда, очевидно, что для всякого t, принадлежащего одному из сегментов $\alpha\Delta\alpha^*$ или $\beta^*\Delta\beta$,

$$\rho(K(\alpha),\ K(t))<2^{-n_0-1}.$$

Рассмотрим кривую K^*, определенную на сегменте $\alpha^*\Delta\beta^*$ и такую, что при любом $t \in \alpha^*\Delta\beta^*$

$$K^*(t) = K(t).$$

Дословно так же, как это делалось в доказательстве теоремы 2.2 из [2], (II часть), доказывается, что K^* является континентной простой дугой.

Так как точка $K(\alpha)$ не лежит на кривой K^*, то имея в виду то обстоятельство, что всякая точка, не лежащая на континентной простой дуге, удалена от нее, получим, что $K(\alpha)$ удалена от K^*. Согласно теореме 2.1 из [2], (II часть), точки $K(\alpha)$ и $x_0 \sigma y_0$ можно соединить ломаной L, удаленной от K^*, определенной на некотором сегменте $\alpha_1\Delta\beta_1$; пусть для определенности, $L(\alpha_1) \doteq x_0 \sigma y_0$, $L(\beta_1) = K(\alpha)$. Построим такое $\tau = \alpha_1\Delta\beta_1$, что

$$\forall \tau' (\tau' \in \alpha_1\Delta\tau \supset \rho(L(\tau'), K(\alpha)) > \frac{3}{4} 2^{-n_0};$$

$$\rho(L(\tau), K(\alpha)) < 2^{-n_0}.$$

Рассмотрим кривую L^*, определенную на $\alpha_1\Delta\tau$ и такую, что при всяком $t \in \alpha_1\Delta\tau$

$$L^*(t) \doteq L(t).$$

Легко видеть, что кривая L^* удалена от K. Следовательно, в соответствии с теоремой 4.4 из [1], $L(\tau)$ является внутренней относительно K и удалена от $K(\alpha)$ меньше, чем на 2^{-n_0}. Теорема доказана.

Краткое изложение теорем 1 и 2 настоящей статьи было опубликовано в [5].

Ս. Ն. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ

ԿՈՆՍՏՐՈՒԿՏԻՎ ՉՎԵՐԱԾՎՈՂ ԿՈՐԵՐԻ ՄԻՋՈՑՈՎ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՏՐՈՀՈՒՄՆԵՐԻ ՈՐՈՇ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ապացուցվում է, որ ամեն մի կոնստրուկտիվ հավասարաչափ անընդհատ կոնտինենտ չվերածվող փակ կորի համար կոնստրուկտիվ իմաստով գոյություն ունի նրա նկատմամբ ներքին կետ։ Ապացուցվում է նաև, որ նշված հատկություններով կորի ամեն մի կետ սահմանային է տվյալ կորի նկատմամբ ներքին և արտաքին կետերի կոնստրուկտիվ բազմությունների համար։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Заславский И. Д., Манукян С. Н.* О разбиении плоскости конструктивными кривыми. Труды ВЦ АН АрмССР и ЕГУ, «Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники», V, 26—138 (1968).

2. *Манукян С. Н.* Некоторые вопросы теории конструктивных кривых и криволинейных интегралов. Диссертация. Ереван, (1969).
3. *Brouwer L.* Intuitionistischer Beweis des Jordanschen Kurvensatzes Proc. Acad. Amsterdam, 28, 503—508 (1962). (Русский перевод: *Брауэр Л. Э. Я.*, Интуиционистское доказательство теоремы Жордана о кривых. Труды ВЦ АН АрмССР и ЕГУ. „Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники", V, 139—146 (1968)).
4. *Заславский И. Д.* Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций. Труды Математического института им. В. А. Стеклова, LXVII, 385—457, (1962).
5. *Манукян С. Н.* О внутренних точках невырожденных конструктивных кривых, Доклады Академии наук СССР, том 196, № 3, 768—769 (1971).

КОНСТРУКТИВНАЯ ЛОГИКА