Г. С. ЦЕЙТИН, А. А. ЧУБАРЯН

О НЕКОТОРЫХ ОЦЕНКАХ ДЛИН ЛОГИЧЕСКИХ ВЫВОДОВ В КЛАССИЧЕСКОМ ИСЧИСЛЕНИИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

В этой статье рассматривается поставленная И. Д. Заславским задача сравнения числа шагов выводов в двух различных модификациях классического исчисления высказываний. Первая из этих форм основана на рассмотрении десяти схем аксиом, правила сокращения посылки и правила силлогизма. Вторая форма исчисления высказываний основана на рассмотрении десяти конкретных аксиом, причем к вышеназванным правилам вывода в этом случае прибавляется правило подстановки.

Определяются функции Шеннона для сравнения минимальной длины логического вывода формулы в одной из указанных форм с минимальной длиной вывода той же формулы в другой форме исчисления высказываний. Оценки, полученные для вышеназванных функций, указывают на то, что длины логических выводов во второй форме исчисления высказываний оказываются, как правило, существенно короче длин логических выводов тех же формул в первой форме исчисления высказываний.

Приведем аксиомы и правила вывода двух рассматриваемых форм исчисления высказываний.

Мы будем пользоваться общепринятыми определениями пропозициональной переменной и пропозициональной формулы ([1], § 25).

В первой из рассматриваемых форм исчисления высказываний (обозначаемой ниже через Σ_1), аксиомами являются любые формулы, получаемые из нижеследующих схем аксиом посредством замены метапеременных $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ произвольными пропозициональными формулами:

1) $\bar{A} \supset (\bar{B} \supset \bar{C})$;

2) $(\bar{A} \supset \bar{B}) \supset ((\bar{A} \supset (\bar{B} \supset \bar{C})) \supset (\bar{A} \supset \bar{C}))$;

3) $\bar{A} \supset (\bar{B} \supset \bar{A} \& \bar{B})$;

4) $\bar{A} \& \bar{B} \supset \bar{A}$;

5) $\bar{A} \& \bar{B} \supset \bar{B}$;

6) $\bar{A} \supset \bar{A} \vee \bar{B}$;

7) $\bar{B} \supset \bar{A} \vee \bar{B}$;

8) $(\bar{A} \supset \bar{C}) \supset ((\bar{B} \supset \bar{C}) \supset (\bar{A} \vee \bar{B} \supset \bar{C}))$;

9) $(\bar{A} \supset \bar{B}) \supset ((\bar{A} \supset \neg \bar{B}) \supset \neg \bar{A})$;

10) $\neg\neg \bar{A} \supset \bar{A}$.

Правила вывода системы Σ_1 вводятся следующим образом:

1) любая аксиома Σ_1 выводима в Σ_1;

2) если формулы Φ и $\Phi \supset \Psi$ выводимы в Σ_1, то формула Ψ выводима в Σ_1 (правило сокращения посылки);

3) если формулы $\Phi \supset \Psi$ и $\Psi \supset \chi$ выводимы в Σ_1, то формула $\Phi \supset \chi$ выводима в Σ_1 (правило силлогизма).

Правило (3), очевидно, не является необходимым для характеризации класса формул, выводимых в Σ_1; оно введено в исчисление из технических соображений.

Во второй форме исчисления высказываний (обозначаемой ниже через Σ_2), аксиомами являются десять формул, получаемых посредством замены в приведенных выше схемах 1—10 метапеременных $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ пропозициональными переменными A, B, C,

Правилами вывода системы Σ_2 являются три правила системы Σ_1 и, кроме того, правило подстановки, формулируемое следующим образом: пусть Φ — формула, содержащая некоторую пропозициональную переменную F; тогда, если Φ выводима в Σ_2, то формула, полученная из Φ заменой всех вхождений переменной F какой-либо формулой Ψ, также выводима в Σ_2.

Непустую конечную последовательность формул $T_1, T_2, \ldots, T_n$ будем называть выводом последней формулы T_n, если каждая из формул T_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) или является аксиомой, или получается из каких-либо предшествующих ей формул с помощью одного из правил вывода, имеющихся в данной форме исчисления высказываний. В дальнейшем буква W будет использоваться в роли переменной, допустимыми значениями которой являются всевозможные выводы в системе Σ_1 и в системе Σ_2. Утверждение о том, что W является выводом формулы Φ в системе Σ_i будем обозначать в дальнейшем через $W \underset{i}{\rightarrow} \Phi$ (здесь $i = 1$ или $i = 2$).

Сложность вывода W определим как количество формул в выводе и обозначим через $L(W)$.

Сложностью пропозициональной формулы Φ по выводимости в системе Σ_i назовем минимальную из сложностей всевозможных выводов формулы Φ в системе Σ_i:

$$L^i(\Phi) = \min_{W \underset{i}{\rightarrow} \Phi} L(W),$$

Определим две относительные функции Шеннона:

$$Ш^{1,2}(n) = \max_{\bar{L}^1(\Phi) \leq n} \bar{L}^2(\Phi)$$

и

$$Ш^{2,1}(n) = \max_{\bar{L}^2(\Phi) \leq n} \bar{L}^1(\Phi).$$

Цель настоящей статьи заключается в доказательстве следующих теорем.

Теорема 1. $Ш^{1,2}(n) \leqslant 2n + 22$.

Теорема 2. $\frac{1}{4} 2^{\frac{n}{2}} \leqslant Ш^{2,1}(n) \leqslant \frac{3}{\sqrt{2}} 2^{\frac{n}{2}}$* при $n > 0$.

В доказательстве этих теорем используется приведенная ниже лемма.

Вывод называется ***приведенным***, если последовательность формул, полученная из него вычеркиванием любой формулы, кроме последней, не является выводом. Очевидно, минимальная сложность вывода для данной формулы достигается на приведенных выводах.

Лемма. *Максимальное количество аксиом в приведенном выводе длины n не превышает $\frac{n+1}{2}$.*

Доказательство. Выпишем из данного вывода все пары формул (Φ, Ψ) такие, что формула Φ является одной из непосредственных посылок при выводе формулы Ψ. Обозначим число таких пар через m, а число аксиом в выводе — через k. Тогда, с одной стороны, $m \geqslant n - 1$, так как каждая формула, кроме последней, является первым членом хотя бы в одной из таких пар (иначе, вычеркнув ее, получим снова вывод). С другой стороны, $m \leqslant 2(n-k)$, так как аксиома не может быть вторым членом такой пары, а любая другая формула (их $n-k$) может быть вторым членом не более чем в двух разных парах. Итак, $n - 1 \leqslant 2(n-k)$, следовательно, $k \leqslant \frac{n+1}{2}$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 1. Пусть дан произвольный приведенный вывод $T_1, T_2, \ldots, T_n$ в Σ_1. Преобразуем эту последовательность формул и вывод той же формулы T_n в системе Σ_2.

Пусть X и Y — пропорциональные переменные, не встречающиеся в данном выводе. Напишем в начале данной последовательности формул следующие формулы:

1) $A \supset (B \supset A)$; 1′) $A \supset (X \supset A)$;

2) $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$;

---

* Посредством часто встречающегося в литературе обозначения $\asymp$, это утверждение может быть записано в виде $Ш^{2,1}(n) \asymp 2^{\frac{n}{2}}$.

2′) $(A \supset X) \supset ((A \supset (X \supset C)) \supset (A \supset C))$;

2″) $(A \supset X) \supset ((A \supset (X \supset Y)) \supset (A \supset Y))$;

3) $A \supset (B \supset A \& B)$; 3′) $A \supset (X \supset A \& X)$;

4) $A \& B \supset A$; 4′) $A \& X \supset A$;

5) $A \& B \supset B$; 5′) $A \& X \supset X$;

6) $A \supset A \vee B$; 6′) $A \supset A \vee X$;

7) $B \supset A \vee B$; 7′) $X \supset A \vee X$;

8) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$;

8′) $(A \supset C) \supset ((X \supset C) \supset (A \vee X \supset C))$;

8″) $(A \supset Y) \supset ((X \supset Y) \supset (A \vee X \supset Y))$;

9) $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$; 9′) $(A \supset X) \supset ((A \supset \neg X) \supset \neg A)$;

10) $\neg\neg A \supset A$;

и затем достаточно написать еще не более $2 \cdot \frac{n+1}{2}$ формул, так как каждую аксиому системы Σ_1 можно получить в результате не более чем 3-х последовательных подстановок в одну из формул 1′, 2″, 3′, 4′, 5′, 6′, 7′, 8″, 9′ и 10, а в выводе $T_1, T_2, \dots, T_n$ не более $\frac{n+1}{2}$ аксиом.

Итак, количество формул в дополненной последовательности, являющейся уже выводом той же формулы T_n в системе Σ_2, не превышает $21 + 2 \cdot \frac{n+1}{2} + n = 2n + 22$, следовательно,

$$Ш^{1,2}(n) \leqslant 2n + 22.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Выведем верхнюю оценку. Пусть в системе Σ_2 имеется некоторый приведенный вывод $T_1, T_2, \dots, T_n$.

Процесс преобразования этой последовательности формул в вывод формулы T_n в системе Σ_1 проведем следующим образом.

Пусть T_j $(2 \leqslant j \leqslant n)$ есть первая из всех формул, полученных с помощью правила подстановки, а именно, пусть T_j получена из формулы T_i $(1 \leqslant i \leqslant j-1)$ подстановкой некоторой формулы Ψ вместо переменной F, входящей в T_i. Запишем последовательность формул $T_1, T_2, \dots, T_{j-1}$, а затем, для получения T_j в новом выводе, припишем подпоследовательность формул из последовательности $T_1, T_2, \dots, T_i$, являющуюся приведенным выводом формулы T_i, заменяя во всех них все вхождения переменной F (если таковые имеются) на вхождения формулы Ψ. Получим некоторую последовательность формул

$$T_1, T_2, \dots, T_{j-1}, T'_{p_1}, T'_{p_2}, \dots, T'_{p_k=l} \qquad (T'_{p_k} \text{ есть } T_j).$$

Пусть следующей (по мере возрастания номеров формул в старом выводе) формулой, полученной с помощью правила подстановки, является T_m $(m>j)$, а именно, пусть T_m получена подстановкой некоторой формулы Ψ_1 вместо некоторой переменной F_1 в формулу T_l $(1 \leqslant l \leqslant m-1)$. Припишем к уже полученной последовательности $T_1, T_2, \dots, T'_{p_k}$, сначала формулы $T_{j+1}, \dots, T_{m-1}$ старого вывода, а затем подпоследовательность формул последовательности $T_1, T_2, \dots, T'_{p_k}$, $T_{j+1}, \dots, T_{m-1}$, являющуюся выводом формулы T_l (l — номер этой формулы в старом выводе), заменяя в них все вхождения переменной F_1 (если таковые имеются) на вхождения формулы Ψ_1. Полученная последовательность формул будет выводом формулы T_m (m — номер этой формулы в старом выводе) в системе Σ_1.

Поступая аналогичным образом со всеми последующими формулами вывода $T_1, T_2, \dots, T_n$, полученными с помощью правила подстановки, достраиваем уже полученную последовательность до последовательности формул, являющейся выводом формулы T_n в Σ_1. Ясно, что вычеркнув лишние формулы можно получить приведенный вывод.

Обозначим через $\varphi(n)$ максимальную длину приведенного вывода в системе Σ_1, полученного с помощью вышеописанного преобразования из произвольного вывода в Σ_2 сложности n.

Очевидно, $\varphi(1) = \varphi(2) = 1$. Выведем рекуррентное соотношение для $\varphi(n)$ при $n \geqslant 3$. В произвольном выводе в Σ_2 сложности $n \geqslant 3$ может оказаться:

1) n-ая формула получена по правилу подстановки из $(n-1)$-ой формулы,

а) $(n-1)$-ая формула также получена по правилу подстановки, тогда длина приведенного вывода n-ой формулы в Σ_1 не будет превышать длины приведенного вывода $(n-2)$-ой формулы в Σ_1;

б) $(n-1)$-ая формула получена по правилу сокращения посылки или по правилу силлогизма, тогда длина приведенного вывода n-ой формулы в Σ_1 не превышает удвоенной длины приведенного вывода $(n-2)$-ой формулы в Σ_1 плюс 1.

2) n-ая формула получена по правилу сокращения посылки или по правилу силлогизма из предыдущих формул, одна из которых $(n-1)$-ая.

а) $(n-1)$-ая получена по правилу подстановки, тогда длина приведенного вывода n-ой формулы в Σ_1, не будет превышать удвоенной длины приведенного вывода $(n-2)$-ой формулы в Σ_1 плюс 1;

а) $(n-1)$-ая формула получена по правилу сокращения посылки или по правилу силлогизма, тогда, если $(n-2)$-ая формула участвовала в получении $(n-1)$-ой формулы, то так как вывод n-ой формулы в Σ_1 будет состоять из вывода $(n-2)$-ой формулы в Σ_1, вывода другой посылки $(n-1)$-ой формулы в Σ_1, самой $(n-1)$-ой формулы и самой n-ой формулы, то длина приведенного вывода n-ой формулы Σ_1 не будет превышать удвоенной длины приведенного вывода $(n-2)$-ой формулы в Σ_1 плюс 2; если же $(n-2)$-ая формула не участвовала в получении $(n-1)$-ой, то длина приведенного вывода $(n-1)$-ой формулы в Σ_1 не будет превышать длины приведенного вывода $(n-2)$-ой формулы в Σ_1 и, следовательно, длина приведенного вывода n-ой формулы в Σ_1 не будет превышать удвоенной длины приведенного вывода $(n-2)$-ой формулы в Σ_1 плюс 1.

Из этих рассуждений следует, что для всех $n \geqslant 3$

$$\varphi(n) \leqslant 2\varphi(n-2) + 2.$$

При четном n

$$\varphi(n) \leqslant 2\varphi(n-2) + 2 \leqslant 2^2\varphi(n-4) + 2^2 + 2 \leqslant \cdots \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\frac{n-2}{2}}\varphi(2) + 2^{\frac{n-2}{2}} + \cdots + 2^2 + 2 = 3\cdot 2^{\frac{n-2}{2}} - 2 < \frac{3}{\sqrt{2}}\, 2^{\frac{n}{2}},$$

при нечетном n

$$\varphi(n) \leqslant 2^{\frac{n-1}{2}}\varphi(1) + 2^{\frac{n-1}{2}} + \cdots + 2^2 + 2 = 3\cdot 2^{\frac{n-1}{2}} - 2 < \frac{3}{\sqrt{2}}\, 2^{\frac{n}{2}}.$$

Итак, $\varphi(n) \leqslant \frac{3}{\sqrt{2}}\, 2^{\frac{n}{2}}$, следовательно,

$$Ш^{2,1}(n) \leqslant \varphi(n) \leqslant \frac{3}{\sqrt{2}}\, 2^{\frac{n}{2}}.$$

Перейдем к доказательству нижней оценки. Для каждой формулы Φ исчисления высказываний определим множество формул $\tau(\Phi)$ такое, что

$$\tau(\Phi) = \{\Phi\} \cup \tau_1(\Phi)^*,$$

где $\tau_1(\Phi) = \Lambda$, если Φ — элементарная формула;

$\tau_1(\Phi_1 \& \Phi_2) = \tau(\Phi_1) \cup \tau(\Phi_2)$;

$\tau_1(\Phi_1 \vee \Phi_2) = \tau(\Phi_1) \cap \tau(\Phi_2)$;

$\tau_1(\Phi_1 \supset \Phi_2) = \tau(\Phi_2) \setminus \tau(\Phi_1)$;

$\tau_1(\urcorner\Phi) = C\tau(\Phi)$ (дополнение множества $\tau(\Phi)$ до множества всех формул).

Ясно, что для произвольной формулы Φ исчисления высказываний множество $\tau(\Phi)$ разрешимое и конечное или имеет конечное дополнение.

Нетрудно непосредственно убедиться, что для произвольной аксиомы Ξ системы Σ_1 имеем $\overline{\overline{\tau(\Xi)}} \leqslant 3$.

---

* $\{\Phi\}$ — означает множество, состоящего из одного элемента – формулы Φ.

Допустим, что формула Ψ получена из формул Φ и $\Phi \supset \Psi$ по правилу сокращения посылки, тогда, по определению,

$$\tau(\Phi \supset \Psi) = \{\Phi \supset \Psi\} \cup (\tau(\Psi) \setminus \tau(\Phi)),$$

откуда

$$\tau(\Psi) \subseteq \tau(\Phi \supset \Psi) \cup \tau(\Phi).$$

Если же формула $\Phi \supset X$ получена из формул $\Phi \supset \Psi$ и $\Psi \supset X$ по правилу силлогизма, то поскольку

$$\tau(\Phi \supset \Psi) = \{\Phi \supset \Psi\} \cup (\tau(\Psi) \setminus \tau(\Phi))$$

и

$$\tau(\Psi \supset X) = \{\Psi \supset X\} \cup (\tau(X) \setminus \tau(\Psi)),$$

то

$$\tau(\Phi \supset X) = \{\Phi \supset X\} \cup (\tau(X) \setminus \tau(\Phi)) \subseteq \{\Phi \supset X\} \cup (\tau(\Phi \supset \Psi) \cup \tau(\Psi \supset X)).$$

Итак, в τ — множестве формулы, выводимой в Σ_1, может появиться новая формула (причем только одна), отличная от формул τ—множеств ее посылок, только при применении правила силлогизма.

Пусть длина некоторого приведенного вывода в Σ_1 равна m и l — количество аксиом в данном выводе, тогда мощность τ — множества формулы, находящейся в конце этого вывода, не может превышать $3l + (m - l) = 2l + m \leqslant 2 \cdot \dfrac{m+1}{2} + m = 2m + 1$.

Теперь оценим снизу функцию $Ш^{2,1}(n)$. Для каждого натурального $k > 0$ формулу $A \supset (\underbrace{B \supset (B \supset \cdots \supset (B}_{2^k \text{ раз}} \supset A) \cdots))$ можно вывести в системе Σ_2 со сложностью, не превышающей $2k + 1$, например, следующим образом (вывод дан с анализом):

1) $A \supset (B \supset A)$ — аксиома 1,

2) $(B \supset A) \supset (B \supset (B \supset A))$ — правило 4, 1,

3) $A \supset (B \supset (B \supset A))$ — правило 3, 1, 2,

4) $(B \supset (B \supset A)) \supset (B \supset (B \supset (B \supset (B \supset A))))$ — правило 4, 3

5) $A \supset (B \supset (B \supset (B \supset (B \supset A))))$ — правило 3, 3, 4.

. . . .

. . . .

$2k$—1) $A \supset (\underbrace{B \supset (B \supset \cdots \supset (B}_{2^{k-1} \text{ раз}} \supset A) \cdots))$ — правило 3, $2k$—3, $2k$—2,

$2k$) $(\underbrace{B \supset (B \supset \cdots \supset (B}_{2^{k-1} \text{ раз}} \supset A) \cdots)) \supset (\underbrace{B \supset (B \supset \cdots \supset (B}_{2^{k} \text{ раз}} \supset A) \cdots))$
— правило 4, $2k - 1$

$2k + 1$) $A \supset (\underbrace{B \supset (B \supset \cdots \supset (B}_{2^{k} \text{ раз}} \supset A) \cdots))$ — правило 3, $2k - 1$, $2k$.

Пусть нам дано некоторое $n > 0$. Найдем максимальное k, удовлетворяющее условию $2k+1 \leqslant n$, тогда $2k+2 \geqslant n$ и, следовательно, $k \geqslant \frac{n-2}{2}$. Для этого k рассмотрим формулу $A\supset(\underbrace{B\supset(B\supset\cdots\supset(B\supset A)}_{2^k \text{ раз}}\ldots))$.

Нетрудно непосредственно убедиться в том, что мощность τ-множества этой формулы равна 2^k+1. Тогда для длины m произвольного вывода данной формулы в системе Σ_1 имеем $2m+1 \geqslant 2^k+1$, откуда $m \geqslant 2^{k-1} \geqslant 2^{\frac{n-2}{2}-1}$.

Итак, из определения функции $Ш^{2,1}(n)$ имеем

$$Ш^{2,1}(n) \geqslant 2^{\frac{n-2}{2}-1} = \frac{1}{4}\, 2^{\frac{n}{2}}.$$

Теорема 2 полностью доказана.

Краткое изложение результатов настоящей статьи было опубликовано в [2].

Գ. Ս. ՑԵՅՏԻՆ, Ա. Ա. ՉՈՒԲԱՐՅԱՆ

ԱՍՈՒՅԹՆԵՐԻ ԴԱՍԱԿԱՆ ՀԱՇՎԻ ՏՐԱՄԱԲԱՆԱԿԱՆ ԱՐՏԱԾՈՒՄՆԵՐԻ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՆ ՈՐՈՇ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Համեմատվում են ասույթների դասական հաշվի երկու ձևեր ըստ տրամաբանական արտածումների երկարության։ Այդ ձևերից մեկը հիմնված է աքսիոմների սխեմաների, նախադրյալի կրճատման կանոնի և սիլլոգիզմի կանոնի վրա։ Ասույթների հաշվի մյուս ձևը հիմնված է կոնկրետ աքսիոմների վրա, իսկ արտածման կանոններին ավելանում է նաև տեղադրման կանոնը։

Սահմանվում են Շենոնի երկու հարաբերական ֆունկցիաներ, որոնք թույլ են տալիս համեմատել կամայական բանաձևերի արտածման նվազագույն երկարությունները ասույթների հաշվի վերոհիշյալ երկու ձևերում։

Այդ ֆունկցիաների համար ստացված գնահատականներից կարելի է եզրակացնել, որ տրամաբանական արտածումների երկարությունները ասույթների հաշվի երկրորդ ձևում զգալի չափով ավելի կարճ են, քան առաջին ձևում։

ЛИТЕРАТУРА

1. *S. C. Kleene.* Introduction to metamathematics, N. Y., 1952 (русский перевод: *С. К. Клини.* Введение в метаматематику, М., ИЛ, 1957).
2. *Г. С. Цейтин, А. А. Чубарян.* Некоторые оценки длин логических выводов в классическом исчислении высказываний. ДАН Арм.ССР, том LV, № 1, 10—12 (1972).

КОНСТРУКТИВНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

5—703