АЛГОРИФМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СЛОЖНОСТИ

Н. П. ТЕР-ЗАХАРЯН

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЯЗЫКА МНОГОМЕСТНЫХ РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

Содержание.

Введение. § 1. Общий критерий неоптимальности алгорифмического языка. § 2. Язык многоместных рекурсивных функций (ЯМРФ) и его мультипликативная оптимальность. § 3. Некоторые понятия и утверждения из конструктивного анализа. § 4. Аналитические свойства ЯМРФ и некоторых его подъязыков. § 5. Доказательство основной теоремы.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья посвящена изучению энтропийных свойств языка многоместных рекурсивных функций (ЯМРФ), построенного на основе введенного С. К. Клини [1] определения рекурсивной функции. Мы будем использовать понятия алгорифмического языка, энтропии алгорифмического языка, мультипликативной и асимптотической оптимальности алгорифмических языков и некоторые другие понятия, определенные в [2].

Основное утверждение статьи заключается в том, что ЯМРФ является мультипликативно оптимальным (§ 2), но не является асимптотически оптимальным языком (§ 5). В отношении языка одноместных рекурсивных функций (ЯРФ) аналогичное утверждение доказано в [2]. Однако для исследования ЯМРФ оказалось невозможным использовать метод, примененный в [2] при рассмотрении ЯРФ. Потребовались иные методы и, в частности, применение аппарата конструктивного анализа.

Некоторый самостоятельный интерес в статье представляет критерий неоптимальности алгорифмических языков, приведенный в § 1.

§ 3 носит вспомогательный характер. В нем исследуются некоторые понятия конструктивного анализа; в частности, рассматриваются свойства конструктивных степенных рядов, условия существования различных аналитических решений алгебраических уравнений и т. д.

Мы будем пользоваться некоторыми сокращениями, например: ЧРФ—частично-рекурсивная функция, н. а.—нормальный алгорифм, н. ч.— натуральное число, КПРФ—конструктивная последовательность рекурсивных функций, КПFR-чисел—конструктивная последовательность FR-чисел.

В статье принята единая нумерация определений, лемм и теорем. Некоторые формулы, выделенные в отдельные строки, нумеруются в виде пары чисел, разделенных точкой и заключенных в круглые скобки. Первое число пары указывает номер параграфа, второе число—порядковый номер формулы внутри параграфа.

Краткое изложение основных результатов настоящей статьи опубликовано в [3].

Автор приносит глубокую благодарность И. Д. Заславскому за постоянное внимание к работе, а также Г. Б. Маранджяну и М. А. Хачатряну, внимательно прочитавшим рукопись и сделавшим ряд замечаний, способствовавших улучшению работы.

§ 1 Общий критерий неоптимальности алгорифмического языка

Определение 1. Пусть даны два алгорифмических языка

$$A_j,\ A_i,\ \Omega_1,\ \{И\} \tag{1.1}$$

и

$$A_j,\ A_i,\ \Omega_{Я},\ \{И\}. \tag{1.2}$$

Язык (1.2) будем называть подъязыком языка (1.1), если

$$\forall (t_i)((!\,\Omega_2((t_i))\supset !\,\Omega_1((t_i)))\ \&\ (!\,\Omega_1((t_i))\supset$$

$$\exists (t_i t_i)(!\,\Omega_2((t_i t_i))\ \&\ \ni ((t_i),\ (t_i t_i))\ \&\ l((t_i t_i))\leqslant l((t_i))))).$$

Теорема 1. *Пусть Я—некоторый алгорифмический язык, $Я_1$-его подъязык, н. а.* A *(соответственно, н. а.* B*) в алфавите A_0^{ca} перерабатывает каждое н. ч. n в натуральное число* A(n) *(соответственно,* B(n)*), равное количеству сообщений языка Я (соответственно, языка $Я_1$) длины n. Тогда, если существуют FR-числа a и b, удовлетворяющие условиям*

$$i)\ 1\leqslant b<a,$$

$$ii)\ \forall n\exists m\forall k(k>m\supset \mathrm{B}(k)<(b+2^{-n})^k),$$

$$iii)\ \forall n\forall m\exists k(k>m\ \&\ \mathrm{A}(k)>(a-2^{-n})^k),$$

то неверно, что язык Я является асимптотически оптимальным.

Доказательство. Предположим, что Я асимптотически оптимален. Очевидно, что по всякому н. ч. n можно найти такое сообщение X этого языка, что

$$l(X)>n. \tag{1.2'}$$

Кроме того, согласно теореме 4 из [2] язык $Я$ имеет энтропию, равную единице.

Согласно условию i) теоремы мы можем построить н. ч. n_0 так, что при любом $n \geqslant n_0$

$$\frac{lb\,(b+2^{-n})}{lb\,(a-2^{-n})} < 1-2^{-n}. \tag{1.3}$$

Зафиксируем некоторое $n \geqslant n_0$. Исходя из условия iii) теоремы, построим конструктивную монотонно возрастающую последовательность φ натуральных чисел, такую что

$$\forall k\,(\mathrm{A}\,(\varphi\,(k)) > (a-2^{-n})^{\varphi(k)}). \tag{1.4}$$

Введем в рассмотрение такой н. а. Γ $A_0^{\text{са}}$, что

$$\forall s\left(\Gamma\,(s) = \mu m\left(\sum_{j=1}^{m} \mathrm{A}\,(j) \geqslant 2^{s+1}-1\right)\right). \tag{1.5}$$

Нетрудно убедиться в том, что Γ применим ко всякому н. ч. s и перерабатывает его в н. ч. $\Gamma\,(s)$, равное максимальной длине сообщений языка $Я$, имеющих сложность s. Согласно свойству (1.2′) языка $Я$ имеем

$$\forall m\,(\Gamma\,(m+1) \geqslant \Gamma\,(m)), \qquad \forall n \exists m\,(\Gamma\,(m) > n). \tag{1.6}$$

Из свойств последовательности φ и из (1.6) следует, что можно построить неубывающую последовательность ψ натуральных чисел, такую что

$$\forall k\,(k \geqslant k_0 \supset \Gamma\,(\psi\,(k)) \leqslant \varphi\,(k) < \Gamma\,(\psi\,(k)+1)), \tag{1.7}$$

где $k_0 = \mu k\,(\varphi\,(k) \geqslant \Gamma\,(1))$. Отсюда следует, что при любом $k \geqslant k_0$

$$\sum_{i=1}^{\varphi(k)} \mathrm{A}\,(i) \leqslant \sum_{i=1}^{\Gamma(\psi(k)+1)-1} \mathrm{A}\,(i). \tag{1.8}$$

Однако, согласно (1.5),

$$\sum_{i=1}^{\Gamma(\psi(k)+1)-1} \mathrm{A}\,(i) < 2^{\psi(k)+2}-1. \tag{1.9}$$

С другой стороны, по (1.4) следует, что

$$\sum_{i=1}^{\varphi(k)} \mathrm{A}\,(i) > (a-2^{-n})^{\varphi(k)}. \tag{1.10}$$

Итак, учитывая (1.8), (1.9) и (1.10), получаем, что при $k \geqslant k_0$

$$(a-2^{-n})^{\varphi(k)} < 2^{\psi(k)+2}.$$

Отсюда

$$\varphi\,(k) < \frac{\psi\,(k)+2}{lb\,(a-2^{-n})}. \tag{1.11}$$

Пользуясь тем, что $Я_1$ — подъязык $Я$, из определения н. а. Г получаем

$$\forall n \forall h \left(H(n,\ h) \supset h \leqslant \sum_{i=1}^{\Gamma(n)} \mathrm{B}(i) \right), \tag{1.12}$$

где H — энтропийная формула языка $Я$.

Пусть имеет место $H(\psi(k),\ h)$. Тогда, согласно (1.12),

$$h \leqslant \sum_{i=1}^{\Gamma(\psi(k))} \mathrm{B}(i),$$

откуда, учитывая (1.7), получаем

$$h \leqslant \sum_{i=1}^{\psi(k)} \mathrm{B}(i). \tag{1.13}$$

Согласно условию *ii*) теоремы мы можем построить н. ч. k_1 так, чтобы при $k \geqslant k_1$

$$\mathrm{B}(k) < (b + 2^{-n})^k. \tag{1.14}$$

Пусть $k_2 \rightleftharpoons \max(k_0,\ \mu k(\varphi(k) > k_1))$. Тогда, учитывая (1.14), при любом $k \geqslant k_2$ получаем

$$\sum_{i=1}^{\varphi(k)} \mathrm{B}(i) < \sum_{i=1}^{k_1-1} \mathrm{B}(i) + \sum_{i=k_1}^{\varphi(k)} (b + 2^{-n})^i.$$

Т. к. $b \geqslant 1$ (согласно условию *i*) теоремы), то из предыдущего неравенства следует, что существует константа $d > 0$, такая, что при всяком $k \geqslant k_2$

$$1 + \sum_{i=1}^{\varphi(k)} \mathrm{B}(i) < d(b + 2^{-n})^{\varphi(k)}.$$

Учитывая последнее неравенство и (1.11), из (1.13) получаем, что при $k \geqslant k_2$

$$\frac{l(h)}{\psi(k)+1} < \frac{lbd}{\psi(k)+1} + \frac{\psi(k)+2}{\psi(k)+1} \cdot \frac{lb\,(b + 2^{-n})}{lb\,(a - 2^{-n})}. \tag{1.15}$$

Ввиду того, что последовательность ψ монотонная и ограниченная, мы можем построить н. ч. $k_3 \geqslant k_2$ так, что при любом $k \geqslant k_3$

$$\frac{lbd}{\psi(k)+1} < 2^{-2n-1}$$

и (1.16)

$$\frac{\psi(k)+2}{\psi(k)+1} < 1 + 2^{-n}.$$

Тогда, учитывая (1.3) и (1.16), из неравенства (1.15) получаем, что при любом $k \geqslant k_3$

$$\frac{l(h)}{\psi(k)+1} < 1 - 2^{-2n-1},$$

откуда следует, что энтропия языка *Я* меньше единицы, что противоречит нашему предположению. Полученное противоречие завершает доказательство.

§ 2. Язык многоместных рекурсивных функций (ЯМРФ) и его мультипликативная оптимальность

Пусть $A_r \leftrightarrows [, , 0, 1,], []$ — алфавит из списка основных алфавитов (см. [2]); $n, q, l, i_1, \ldots, i_l, m$ — натуральные числа. Мы дадим индуктивное определение слов типа R, причем параллельно с этим индуктивным определением мы дадим индуктивное определение размерности слов типа R. Эти понятия описываются следующими порождающими правилами.

1) $[\,]$ — слово типа R размерности 1;

2) для всякого n и q $[0, n, q]$ — слово типа R размерности n;

3) для всякого n и q $[1, n, q]$ — слово типа R размерности n;

4) пусть P — слово типа R размерности j, Q_k — слово типа R размерности i_k $(k = 1, \ldots, l)$, тогда $[00, P, Q_1, \ldots, Q_l]$ — слово типа R размерности i_1;

5) пусть P — слово типа R размерности n, Q — слово типа R размерности n, тогда $[01, P, Q]$ — слово типа R размерности $(n+1)$;

6) пусть P — слово типа R размерности $(n+1)$, тогда $[10, P]$ — слово типа R размерности n.

Пусть $c(x, y)$ — канторовский номер пары натуральных чисел x и y (см., напр., [4]). С помощью нумерации пар натуральных чисел устроим нумерацию n-ок натуральных чисел. С этой целью введем функцию $c^n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определяемую следующим рекуррентным отношением

$$c^n(x_1, \ldots, x_n) = c(x_1, c^{n-1}(x_2, \ldots, x_n)),$$

и функции $c_1^n(m), c_2^n(m), \ldots, c_n^n(m)$ такие, что если

$$m = c^n(x_1, \ldots, x_n),$$

то

$$c_i^n(m) = x_i, \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Построим формулу Δ с одной свободной переменной рода t_r, такую, что $\Delta(X)$ имеет место тогда и только тогда, когда X есть слово типа R.

Пусть $l, n, m, j, i_1, \ldots, i_l$ — натуральные числа, $\mathbf{V}$ — нигде не определенный н. а. в алфавите A_0^{ca}. Построим, наконец, н. а. $\mathbf{W}$ в алфавите A_r^{ca} со следующими свойствами:

1) $\mathbf{W}([\ ] \square m) = m + 1$;

2) $\mathbf{W}([0, n, l] \square m) = l$;

3) $\mathbf{W}([1, n, l] \square m) \simeq \begin{cases} c_l^n(m), & \text{если } 1 \leqslant l \leqslant n \\ \mathbf{V}(m), & \text{в противном случае;} \end{cases}$

4) если P — слово типа R размерности j, Q_k — слово типа R размерности i_k $(k = 1, \ldots, l)$, то

$$\mathbf{W}[00, P, Q_1, \ldots, Q_l] \square m) \simeq \begin{cases} \mathbf{W}(P \square c^l(\mathbf{W}(Q_1 \square m), \ldots, \mathbf{W}(Q_l \square m))), \\ \qquad\qquad \text{если} \quad j = l \,\&\, i_1 = i_2 = \cdots = i_l, \\ \mathbf{V}(m) \qquad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

5) если P — слово типа R размерности n, Q — слово типа R размерности q, то

$$\mathbf{W}([01, P, Q] \square m) \simeq \begin{cases} \mathbf{V}(m), \qquad \text{если } q \neq n + 2, \\ \mathbf{W}(P \square c^n(c_2^{n+1}(m), \ldots, c_{n+1}^{n+1}(m))), \\ \qquad\qquad \text{если } q = n + 2 \,\&\, c_1^{n+1}(m) = 0 \\ \mathbf{W}(Q \square c^{n+2}(c_1^{n+1}(m) \dot{-} 1, c_2^{n+1}(m), \ldots, c_{n+1}^{n+1}(m), \\ \qquad \mathbf{W}([01, P, Q] \square c^{n+1}(c_1^{n+1}(m) \dot{-} 1, \\ \qquad\qquad c_2^{n+1}(m), \ldots, c_{n+1}^{n+1}(m))))), \\ \qquad\qquad \text{если } q = n + 2 \,\&\, c_2^{n+1}(m) \neq 0; \end{cases}$$

6) если P — слово типа R размерности $(n + 1)$, то

$$\mathbf{W}([10, P] \square m) \simeq \mu q(\mathbf{W}(P \square c(q, m)) = 0),$$

где символ μ понимается обычным образом (см. напр., [5] стр. 304).

Список

$$A_0, A_r, \Delta, \{\mathbf{W}\},$$

элементы которого определены выше, будем называть языком многоместных рекурсивных функций (ЯМРФ).

Теорема 2. *ЯМРФ мультипликативно оптимален.*

Доказательство. Фиксируем произвольный алгорифмический язык

$$A_j, A_l, \Omega, \{\mathbf{W}\}. \tag{2.1}$$

Пусть пара н. а. $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}^*$ в $A_{\nu(0,j)}^{\text{ca}}$ есть лексикографическая нумерация слов в A_j, пара н. а. $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_1^*$ в $A_{\nu(0,l)}^{\text{ca}}$ есть л. н. с. языка

(2.1), пара н. а. C_2 и C_2^* в A_r^{ca} есть л. н. с. ЯМРФ, н. а. L_1 в $A_{\nu(0,1)}^{ca}$ есть критерий сложности языка (2.1), н. а. L_2 в A_r^{ca} есть критерий сложности ЯМРФ.

Требуется построить транслятор из (2.1) в ЯМРФ и такие константы c и d, чтобы для всякого сообщения X языка (2.1), имело бы место следующее

$$L_2(T(X)) \leqslant cL_1(X) + d.$$

Пользуясь теоремой Детловса ([6], стр. 75), построим слово X_0 типа R размерности 2, удовлетворяющее условию

$$\forall n\,(W(X_0 \square n) \simeq B^*(И(C_1(c_1^2(n)) \square B(c_2^2(n))))).$$

Тогда при любом н. ч. n слово

$$[00,\ X_0,\ [0,\ 1,\ n],\ [1,\ 1,\ 1]]$$

будет сообщением ЯМРФ. Построим н. а. T в $A_{\nu(l,P)}^{ca}$ такой, что для всякого сообщения X языка (2. 1) имеет место следующее

$$T(X) \simeq [00,\ X_0,\ [0,\ 1,\ C_1^*(X)],\ [1,\ 1,\ 1]]. \qquad (2.2)$$

Ясно, что н. а. T является транслятором из (2.1) в ЯМРФ. Это доказывает универсальность ЯМРФ. Из (2.2) следует, что существует такая константа b, что каково бы ни было сообщение X языка (2.1)

$$l(T(X)) = l(C_1^*)(X)) + b,$$

т. е. иначе говоря,

$$l(T(X)) = L_1(X) + b.$$

Тогда

$$C_2^*(T(X)) \leqslant \sum_{i=1}^{L_1(X)+b} 5^i,$$

а потому

$$L_2(T(X)) \leqslant L_1(X)\, lb5 + (b+1)\, lb5.$$

Теорема доказана.

Основная теорема. *Неверно, что ЯМРФ — асимптотически оптимален.*

Доказательство этой теоремы будет представлено в § 5.

§ 3. Некоторые понятия и утверждения из конструктивного анализа

Содержание настоящего параграфа носит вспомогательный характер по отношению к остальной части работы; здесь вводятся определения и излагаются результаты в основном технического характера, которые будут использованы в следующих параграфах.

Определение 2. Пусть A — конструктивная последовательность FR-чисел. Будем говорить, что FR-число x является **верхним пределом** последовательности A (и записывать так: $\overline{\lim}\,\mathrm{A}(n) = x$), если

$$\forall n \exists m \forall k (k > m \supset \mathrm{A}(k) < x + 2^{-n}) \,\&\, \forall n \forall m \exists k (k > m \,\&\, \mathrm{A}(k) > x - 2^{-n}).$$

Определение 3. Слово $\sum\{f\}$ будем называть конструктивным степенным рядом комплексной переменной, если f — конструктивная последовательность конструктивных функций комплексной переменной и существует $K\Pi FR$-чисел A, такая, что

$$\forall z \forall k (\{f(k)\}(z) = \mathrm{A}(k)\, z^k).$$

В дальнейшем мы будем пользоваться привычным обозначением степенного ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}(k)\, z^k.$$

Определение 4. Будем говорить, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}(k)\, z^k$ конструктивно сходится (или просто сходится) в точке $z = z_0$ $\left(\text{и записывать это так: } S\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}(k)\, z^k,\ z_0\right)\right)$, если сходится соответствующий конструктивный числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}(k)\, z_0$. (Понятие конструктивного числового комплексного ряда вводится аналогично [7].)

Определение 5. Будем говорить, что FR-число R является радиусом сходимости степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}(k)\, z^k$, если

$$1)\quad \forall z \left(|z| < R \supset S\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}(k)\, z^k,\ z\right)\right),$$

$$2)\quad \forall z \left(|z| > R \supset \neg S\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}(k)\, z^k,\ z\right)\right).$$

Следующая лемма является конструктивным аналогом теоремы Коши—Адамара.

Лемма 1. Если ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}(k)\, z^k$ имеет радиус сходимости $R > 0$, то $\overline{\lim}\sqrt[k]{|\mathrm{A}(k)|} = \dfrac{1}{R}\cdot$ (Операцию извлечения корня k-ой степени из модуля FR-числа, рассматриваемую в работе [8] на стр. 133, мы будем обозначать традиционным образом: $\sqrt[k]{|\ |}$).

Доказательство. Для доказательства леммы требуется проверить 2 условия:

$$\forall n \exists m \forall k \left(k > m \supset \sqrt[k]{|\mathrm{A}(k)|} < \frac{1}{R} + 2^{-n} \right), \tag{3.1}$$

$$\forall n \forall m \exists k \left(k > m \,\&\, \sqrt[k]{|\mathrm{A}(k)|} > \frac{1}{R} - 2^{-n} \right). \tag{3.2}$$

Зафиксируем н. ч. n. Тогда

$$\frac{R}{1 + R \cdot 2^{-n}} < R.$$

Согласно условию леммы имеет место следующее

$$S\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}(k)\, z^k,\ \frac{R}{1 + R \cdot 2^{-n}} \right),$$

а потому можно указать н. ч. m, такое, что при любом $k > m$

$$|\mathrm{A}(k)| \cdot \left(\frac{R}{1 + R \cdot 2^{-n}} \right)^k < 1,$$

откуда следует (3.1).

Предположим далее, что существуют такие н. ч. n и m, что, каково бы ни было $k > m$, имеет место

$$\sqrt[k]{|\mathrm{A}(k)|} \leqslant \frac{1}{R} - 2^{-n}. \tag{3.3}$$

Зафиксируем FR-число x так, чтобы

$$R < x < \frac{R}{1 - R \cdot 2^{-n}}. \tag{3.4}$$

Согласно условию леммы имеем

$$\neg S\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}(k)\, z^k,\ x \right). \tag{3.5}$$

С другой стороны, из (3.3) следует, что

$$|\mathrm{A}(k)\, x^k| \leqslant \left(\frac{1}{R} - 2^{-n} \right)^k x^k. \tag{3.6}$$

Т. к. из (3.4) следует, что $x \cdot \left(\frac{1}{R} - 2^{-n} \right) < 1$, то учитывая (3.6), получаем $S\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}(k)\, z^k,\ x \right)$, что противоречит (3.5). Итак,

$$\forall n \forall m \neg\neg \exists k \left(k > m \,\&\, \sqrt[k]{|\mathrm{A}(k)|} > \frac{1}{R} - 2^{-n}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\forall n \forall m \neg\neg \exists k \exists l \left(k > m \,\&\, D^{-}(\sqrt[k]{|\mathrm{A}(k)|} * l) > D^{+}\left(\frac{1}{R} - 2^{-n} * l\right)\right),$$

где D^{-} и D^{+} суть нормальные алгорифмы, определенные в [5] на стр. 315 и удовлетворяющие условиям

$$\forall x \forall n (D^{-}(x * n) < x < D^{+}(x * n)),$$

$$\forall x \forall n (D^{+}(x * n) - D^{-}(x * n) < 2^{-n}).$$

Поэтому, согласно принципу А. А. Маркова [9] имеем

$$\forall n \forall m \exists k \left(k > m \,\&\, \sqrt[k]{|\mathrm{A}(k)|} > \frac{1}{R} - 2^{-n}\right).$$

Лемма доказана.

Следующая лемма является конструктивным аналогом некоторого частного случая теоремы Принсгейма [10].

Лемма 2. *Пусть* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}(k) z^k$ *— конструктивный степенной ряд, такой, что при всяком н. ч.* k $\mathrm{A}(k)$ *— неотрицательное FR-число; пусть положительное FR-число* R *— радиус сходимости этого ряда и КФКП* F *удовлетворяет в круге* $|z| < R$ *условию*

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}(k) z^k. \tag{3.7}$$

Тогда для любых двух FR-чисел c *и* a, *удовлетворяющих условию*

$$0 < c < R < a, \tag{3.8}$$

ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{F^{(m)}(c)}{m!}(a-c)^m$ *расходится.*

Доказательство. Фиксируем FR-числа c и a так, чтоб они удовлетворяли условию (3.8). Предположим, что ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{F^{(m)}(c)}{m!}(a-c)^m$ сходится. Т. к. по условию $\forall k (\mathrm{A}(k) \geqslant 0)$, то аналогично тому, как это сделано в [11], можно доказать, что ряд (3.7) можно почленно дифференцировать, причем полученный ряд сходится в том же круге $|z| < R$. Итак, при любом $|z| < R$ и любом н. ч. m

$$F^{(m)}(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \mathrm{A}(k) \frac{k!}{(k-m)!} z^{k-m}.$$

Отсюда

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{F^{(m)}(c)}{m!} (a-c)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=m}^{\infty} \mathrm{A}(k) \frac{k!}{m!\,(k-m)!} c^{k-m} (a-c)^m.$$

Нетрудно убедиться в том, что у повторного ряда, записанного в правой части предыдущего равенства, можно поменять порядок суммирования. Получим

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{F^{(m)}(c)}{m!} (a-c)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}(k)\, a^k.$$

Но, согласно выбору точки a (условия (3.8)), имеем $\neg S\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}(k)\, z^k, a\right)$.

Следовательно, ряд $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{F^{(m)}(c)}{m!} (a-c)^m$ тоже расходится, что и требовалось доказать.

Пусть КФКП F удовлетворяет в круге $|z|<R$ условию

$$A_0(z) F^3(z) + A_1(z) F^2(z) + A_2(z) F(z) + A_3(z) = 0, \tag{3.9}$$

где A_i, при $0 \leqslant i \leqslant 3$, суть КФКП, определенные в указанном круге, причем A_0 не обращается в нуль при $0<z<R$. Определим КФКП G в кольце $0<|z|<R$ следующим образом

$$G(z) = F(z) - \frac{A_1(z)}{3A_0(z)}.$$

Тогда функция G будет удовлетворять условию

$$G^3(z) + P(z)\, G(z) + Q(z) = 0, \tag{3.10}$$

где КФКП P и Q определяются в кольце $0<|z|<R$ следующим образом

$$P(z) = \frac{A_2(z)}{A_0(z)} - \frac{A_1^2(z)}{3A_0^2(z)},$$

$$Q(z) = \frac{2A_1^3(z)}{27A_0^3(z)} - \frac{A_1(z)\, A_2(z)}{3A_0^2(z)} + \frac{A_3(z)}{A_0(z)}.$$

Как обычно, уравнение (3.10) мы будем называть приведенной формой уравнения (3.9), а КФКП Δ, определенную в кольце $0<|z|<R$ следующим образом

$$\Delta(z) = -27Q^2(z) - 4P^3(z),$$

— дискриминантом уравнения (3.10).

§ 4. Аналитические свойства ЯМРФ и некоторых его подъязыков

Введем в рассмотрение н. а. **A** в A_0^{ca}, перерабатывающий каждое н. ч. n в натуральное число, равное количеству сообщений ЯМРФ длины n. Пользуясь определением ЯМРФ, легко видеть, что

$$\mathbf{A}(0) = \mathbf{A}(1) = \mathbf{A}(3) = \mathbf{A}(4) = 0,$$

$$\mathbf{A}(2) = 1, \quad \mathbf{A}(5) = 2,$$

$$\forall n \Big(n \geqslant 1 \supset \mathbf{A}(n+4) = n \cdot 2^4 + \mathbf{A}(n-1) + \sum_{i+j=n-2} \mathbf{A}(i)\mathbf{A}(j) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n+4} \sum_{i+i_1+\dots+i_m=n-m-1} \mathbf{A}(i)\mathbf{A}(i_1)\cdots\mathbf{A}(i_m) \Big). \tag{4.1}$$

Рассмотрим следующий конструктивный степенной ряд комплексной переменной z:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}(k) z^k. \tag{4.2}$$

Нетрудно убедиться в том, что ряд (4.2) сходится при $|z| < \frac{1}{5}$. Действительно, количество сообщений ЯМРФ длины n не превосходит количества всех слов алфавита A_r длины n, а потому

$$\forall n (\mathbf{A}(n) \leqslant 5^n),$$

откуда следует требуемое.

С другой стороны, докажем, что ряд (4.2) расходится в точке $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{12}}$. Для доказательства построим формулу Δ' с одной свободной переменной рода t_r, которая задается следующими порождающими правилами:

1) для всякого n и q $\Delta'([0, n, q])$;
2) если $\Delta'(P)$ и $\Delta'(Q)$, то $\Delta'([01, P, Q])$.

Список

$$A_0, A_r, \Delta', \{\mathbf{W}\},$$

второй и четвертый элементы которого определены в § 2, назовем усеченным языком многоместных рекурсивных функций (УЯРФ). Рассмотрим н. а. **C** в A_0^{ca}, перерабатывающий каждое н. ч. n в натуральное число, равное количеству сообщений УЯРФ длины n. Пользуясь определением УЯРФ, легко показать, что

$$\mathbf{C}(0) = \mathbf{C}(1) = \mathbf{C}(2) = \mathbf{C}(3) = \mathbf{C}(4) = 0 \qquad \mathbf{C}(5) = 1, \tag{4.3}$$

$$\forall n \Big(n > 5 \supset \mathbf{C}(n) = (n-4)2^{n-5} + \sum_{i+j=n-6} \mathbf{C}(i)\mathbf{C}(j) \Big).$$

Очевидно, что

$$\forall n\,(\mathrm{A}(n) \geqslant \mathrm{C}(n)). \tag{4.4}$$

Введем в рассмотрение следующий конструктивный степенной ряд комплексной переменной z

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{C}(n)\, z^n. \tag{4.5}$$

Предположим, что ряд (4.2) сходится в точке $z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{12}}$, тогда, в силу условия (4.4), ряд (4.5) также должен сходиться в этой точке. Обозначим через Ф КФКП такую, что при $|z|<\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{12}}$

$$\Phi(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{C}(n)\, z^n.$$

Исходя из равенств (4.3), нетрудно показать, что КФКП Ф при $|z|<\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{12}}$ удовлетворяет условию

$$\Phi(z)=\frac{z^5}{(1-2z)^2}+z^6\Phi^2(z).$$

При $z\neq 0$ это равенство можно переписать в следующем виде:

$$(2z^6\Phi(z)-1)^2(1-2z)^2=(1-2z)^2-4z^{11}. \tag{4.4}$$

Согласно предположению, равенство (4.4) должно иметь место для любого z, такого, что $0<|z|<\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{12}}$.

Однако, при $z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{11}}$ равенство (4.4) нарушается, т. к. левая часть этого равенства положительна, а правая — отрицательна. Следовательно, ряд (4.2) расходится в точке $z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{12}}$.

Пусть FR-число R таково, что при $|z|<R$ ряд (4.2) сходится. Ясно, что

$$R<\frac{1}{2}. \tag{4.5}$$

Обозначим через F КФКП такую, что при $|z|<R$

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{A}(n)\, z^n.$$

Используя равенства (4.1), легко убедиться в том, что КФКП F при $|z|<R$ удовлетворяет следующему условию

$$-z^7F^3(z)+(z^6+z)F^2(z)+\left(z^5-z^3-1-\frac{2z^6}{(1-2z)^2}\right)F(z)+$$

$$+\left(z^2+\frac{2z^5}{(1-2z)^2}\right)=0. \qquad (4.6)$$

Обозначим через G КФКП, определенную в открытом кольце $0<|z|<R$ следующим образом

$$G(z)=F(z)-\frac{1+z^5}{3z^6}.$$

Нетрудно убедиться в том, что при $0<|z|<R$ КФКП G удовлетворяет приведенной форме уравнения (4.6), а именно

$$G^3(z)+P(z)G(z)+Q(z)=0, \qquad (4.7)$$

где P и Q — КФКП, такие, что при всяком z, принадлежащем кольцу $0<|z|<\frac{1}{2}$

$$P(z)=\frac{-16z^{13}+22z^{11}+8z^{10}-12z^9+3z^8+4z^7-4z^6+z^5-4z^2+4z-1}{3z^{12}(1-2z)^2},$$

$$Q(z)=\frac{E}{T}, \qquad (4.8)$$

где $$E=-44z^{17}+8z^{16}-83z^{15}+72z^{14}-18z^{13}-24z^{12}+42z^{11}+$$

$$+30z^{10}-36z^9+9z^8+12z^7-12z^6+3z^5-8z^2+8z-2,$$

$$T=27z^{18}(1-2z)^2.$$

Введем в рассмотрение теперь некоторые подъязыки ЯМРФ.

Определение 6. Пусть m — фиксированное положительное натуральное число. Сообщение ЯМРФ назовем *m-правильным*, если в него не входит слово

$$[00, [01, [1, 0, 0], [00, [\ ], [1, 00, 00]]], [0, 2^m-1,], .$$

Построим формулу Ξ_m с одной свободной переменной рода t_r, такую, что $\Xi_m(X)$ имеет место тогда и только тогда, когда X есть m-правильное сообщение ЯМРФ. Докажем, что при каждом $m>0$ язык $Я_m$:

$$A_0,\ A_r,\ \Xi_m,\ \{\mathbf{W}\} \qquad (4.8')$$

является подъязыком ЯМРФ. Для этого достаточно указать для каждого сообщения ЯМРФ эквивалентное ему m-правильное сообщение не большей длины. Пусть сообщение X содержит в себе слово

$[00, [01, [1, 0, 0], [00, [\ ], [1, 00, 00]]], [0, 2^m-1,], Q_1, \ldots, Q_l]$, (4.9)

где l — некоторое н. ч., $Q_1, Q_2, \ldots, Q_l$ — некоторые сообщения ЯМРФ. Тогда если $l\neq 1$ или если Q_1 имеет размерность, отличную от 2^m-1, то сообщению X поставим в соответствие сообщение $[1, 0, 1]$.

Если же $l=1$ и размерность Q_1 равна 2^m-1, то сообщению X поставим в соответствие эквивалентное ему сообщение, получаемое из X подстановкой Q_1 вместо вхождения (4.9).

Т. к. в произвольном фиксированном сообщении X может быть конечное число вхождений слов типа (4.9), то произведя конечное число подстановок вышеуказанного типа, мы придем к m-правильному сообщению, эквивалентному данному и имеющему меньшую длину.

Рассмотрим н. а. $\mathbf{B}_m$ в A_0^{ca}, перерабатывающий каждое н. ч. n в натуральное число, равное количеству сообщений языка (4.8′) длины n. Легко видеть, что

$$\forall n\,(n \leqslant 41+m \supset \mathbf{B}_m(n)=\mathbf{A}(n)),$$

$$\forall n\Bigg(n \geqslant 42+m \supset \mathbf{B}_m(n)=(n-4)\,2^{n-4}+\mathbf{B}_m(n-5)+$$

$$+\sum_{i+j=n-6}\mathbf{B}_m(i)\,\mathbf{B}_m(j)+\sum_{j=1}^{n}\ \sum_{i+i_1+\cdots+i_j=n-j-5}\mathbf{B}_m(i)\,\mathbf{B}_m(i_1)\cdots\mathbf{B}_m(i_j)-$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\ \sum_{i_1+\cdots+i_j=n-(41+m+j)}\mathbf{B}_m(i_1)\cdots\mathbf{B}_m(i_j)\Bigg). \qquad (4.10)$$

Введем в рассмотрение следующий конструктивный степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{B}_m(k)\,z^k. \qquad (4.11)$$

Нетрудно убедиться в том, что ряд (4.11) расходится при $|z| \geqslant \frac{1}{2}$. Действительно, для любого н. ч. l и любых сообщений $Q_1, \ldots, Q_l$ языка (4.8′) сообщению

$$[00,\ [01,\ [1,\ 0,\ 0],\ [00,\ [\ ],\ [1,\ 00,\ 00]]].\ [0,\ 2^m-1,],\ Q_1, \ldots, Q_l]$$

можно поставить в соответствие сообщение той же длины

$$[C0,\ [01,\ [1,\ 0,\ 0],\ [00,\ [\ ],\ [1,\ 00,\ 00]]],\ [0,\ 2^m,],\ Q_1, \ldots, Q_l],$$

откуда следует, что

$$\sum_{j=1}^{n}\ \sum_{i+i_1+\cdots+i_j=n-j-5}\mathbf{B}_m(i)\,\mathbf{B}_m(i_1)\cdots\mathbf{B}_m(i_j) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{j=1}^{n}\ \sum_{i_1+\cdots+i_j=n-(41+m+j)}\mathbf{B}_m(i_1)\cdots\mathbf{B}_m(i_j).$$

Поэтому, исходя из рекуррентного соотношения для $\mathbf{B}_m(n)$, мы получаем, что

$$\forall n\,(n \geqslant 5 \supset \mathbf{B}_m(n) \geqslant 2^{n-4}),$$

откуда следует требуемое.

С другой стороны, $\forall n(\mathbf{B}_m(n) \leqslant 5^n)$, поэтому ряд (4.11) сходится при $|z| < \frac{1}{5}$. Пусть FR-число R таково, что при $|z| < R$ ряд (4.11) сходится. Обозначим через F_m КФКП такую, что при $|z| < R$

$$F_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{B}_m(n) z^n.$$

Используя равенства (4.10), нетрудно доказать, что КФКП F_m при $|z| < R$ удовлетворяет следующему условию

$$-z^7 F_m^3(z) + (z^6 + z) F_m^2(z) +$$

$$+\left(z^5 - z^3 - 1 - \frac{2z^6}{(1-2z)^2} - z^{42+m}\right) F_m(z) + z^3 + \frac{2z^5}{(1-2z)^2} = 0. \quad (4.12)$$

Обозначим через G_m КФКП, определенную в кольце $0 < |z| < R$ и такую, что

$$G_m(z) = F_m(z) - \frac{1+z^5}{3z^6}.$$

Очевидно, что при $0 < |z| < R$ КФКП G_m удовлетворяет приведенной форме уравнения (4.12), а именно

$$G_m^3(z) + P_m(z) G_m(z) + Q_m(z) = 0,$$

где P_m и Q_m — КФКП, такие, что при всяком z, принадлежащем кольцу $0 < |z| < \frac{1}{2}$,

$$P_m(z) = P(z) + z^{35+m}, \qquad Q_m(z) = Q(z) + \frac{z^{29+m}(1+z^5)}{3}. \quad (4.13)$$

Определение 7. Пусть $Я$ — некоторый алгорифмический язык, н. а. С в $A_0^{\text{са}}$ перерабатывает каждое н. ч. k в натуральное число, равное количеству сообщений длины k языка $Я$. Радиус сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{C}(k) z^k$ (если он существует) будем называть *радиусом сходимости языка $Я$.*

Мы сейчас перейдем к доказательству квазиосуществимости радиусов сходимости ЯМРФ и подъязыков $Я_m$ при $m > 0$. Это доказательство основывается на двух леммах.

Определение 8. Пусть КФКП P и Q аналитичны и равномерно непрерывны в круге K. Будем говорить, что тройка КФКП F_1, F_2, F_3 удовлетворяет условию (P, Q) в круге K, если эти функции аналитичны и равномерно непрерывны в круге K, удовлетворяют в этом круге условиям:

1) $F_i^3(z)+P(z)F_i(z)+Q(z)=0, \qquad (i=1, 2, 3)$

2) $\forall ij\,(1\leqslant i\leqslant 3 \,\&\, 1\leqslant j\leqslant 3 \,\&\, \neg(i=j)\supset \neg(F_i(z)=F_j(z)))$

и всякая КФКП F, удовлетворяющая в круге K условию

$$F^3(z)+P(z)F(z)+Q(z)=0,$$

совпадает в том же круге с одной из функций F_i $(i=1, 2, 3)$.

Лемма 3. *Пусть КФКП P и Q аналитичны и равномерно непрерывны в круге $|z-z_0|<r$ и пусть δ — положительное рациональное число, такое, что в любой точке z указанного круга имеет место неравенство*

$$|27Q^2(z)+4P^3(z)|\geqslant\delta, \tag{4.14}$$

Тогда существует тройка КФКП H_1, H_2, H_3, удовлетворяющая условию (P, Q) в круге $|z-z_0|<r$.

Доказательство. Введем в рассмотрение КФКП Δ, определенную в круге $|z-z_0|\leqslant r$ и такую, что в любой точке z этого круга

$$\Delta(z)=-27Q^2(z)-4P^3(z).$$

Т. к. согласно условию (4.14), при $|z-z_0|<r$ $|\Delta(z)|\geqslant\delta$, то нетрудно построить аналитическую и равномерно непрерывную функцию Δ', определенную в круге $|z-z_0|<r$ и такую, что в любой точке z этого круга

$$(\Delta'(z))^2=\Delta(z).$$

Рассмотрим, далее, КФКП h_1 и h_2, определяемые в круге $|z-z_0|\leqslant r$ следующим образом:

$$h_1(z)=-\frac{Q(z)}{2}+\Delta'(z),$$

$$h_2(z)=-\frac{Q(z)}{2}-\Delta'(z).$$

Ясно, что в указанном круге h_1 и h_2 аналитичны и равномерно непрерывны. Поэтому существуют такие рациональные числа $\delta_1>0$ и $\delta_2>0$, что для любых точек z_1 и z_2 из круга $|z-z_0|\leqslant r$ имеет место

$$|z_1-z_2|\leqslant\delta_i\supset|h_i(z_1)-h_i(z_2)|<\frac{\sqrt{\delta_i}}{3}. \qquad (i=1, 2) \tag{4.15}$$

Пусть $\eta=\min(\delta_1, \delta_2)$.

Докажем, что в любом круге K радиуса $\nu\leqslant\eta$, погруженном в данный круг $|z-z_0|\leqslant r$, может быть построена тройка КФКП F_1, F_2, F_3, удовлетворяющая условию (P, Q).

Итак, пусть $\overline{z}$ — точка круга $|z_0 - z| \leqslant r$, FR — число $\nu \leqslant \eta$ и круг $|\overline{z} - z| \leqslant \nu$ лежит внутри круга $|z_0 - z| \leqslant r$. Согласно (4.14), при $|z - z_0| \leqslant r$ имеем

$$|h_1(z) - h_2(z)| \geqslant 2\sqrt{\delta}.$$

Отсюда следует, что существует н. ч. i_0, такое, что

$$|h_{i_0}(\overline{z})| > \frac{2\sqrt{\delta}}{3}.$$

Используя (4.15), получаем, что в круге $|z - \overline{z}| \leqslant \nu$

$$|h_{i_0}(z)| > \frac{\sqrt{\delta}}{3}.$$

Согласно этому неравенству нетрудно убедиться в том, что существует равномерно непрерывная аналитическая функция α, определенная в круге $|z - \overline{z}| \leqslant \nu$ и такая, что в любой точке z этого круга

$$\alpha^3(z) = h_{i_0}(z).$$

Очевидно, что всюду в круге $|z - \overline{z}| \leqslant \nu$ $\alpha(z) \neq 0$.

Построим КФКП F_1, F_2, F_3, определенные в круге $|z - \overline{z}| \leqslant \nu$ и такие, что в любой точке z этого круга

$$F_1(z) = \alpha(z) - \frac{P(z)}{3\alpha(z)},$$

$$F_2(z) = \omega\alpha(z) - \omega^2 \frac{P(z)}{3\alpha(z)},$$

$$F_3(z) = \omega^2\alpha(z) - \omega \frac{P(z)}{3\alpha(z)},$$

где через ω обозначено KFR — число $\left(-\frac{1}{2}\right) \sigma \frac{\sqrt{3}}{2}$ (см. [12]). Докажем, что тройка F_1, F_2, F_3 удовлетворяет условию (P, Q) в круге $|z - \overline{z}| \leqslant \nu$. Действительно, нетрудно убедиться в аналитичности и равномерной непрерывности этих функций в указанном круге. Кроме того, в любой точке $\breve{z}$ круга $|z - \overline{z}| \leqslant \nu$

$$F_1(\breve{z}) \neq F_2(\breve{z}),$$

$$F_1(\breve{z}) \neq F_3(\breve{z}),$$

$$F_2(\breve{z}) \neq F_3(\breve{z}).$$

Это следует из того факта, что $\Delta(\bar z) \neq 0$, а в этом случае $F_1(\bar z)$, $F_2(\bar z)$ и $F_3(\bar z)$ являются отличными друг от друга корнями кубического уравнения

$$H^3(\bar z) + P(\bar z)\, H(\bar z) + Q(\bar z) = 0.$$

Предположим теперь, что КФКП H удовлетворяет в круге $|z - \bar z| \leqslant \nu$ условию $H^3(z) + P(z)\,H(z) + Q(z) = 0$. Очевидно, что в каждой точке этого круга $H(z)$ совпадает с одной из функций F_1, F_2, F_3. Следовательно, можно построить натуральнозначную КФКП I в круге $|z - \bar z| \leqslant \nu$, такую, что в любой точке z этого круга

$$I(z) = i \equiv H(z) = F_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

Согласно известному следствию из теоремы Маркова (см. напр., лемму 2.11 из [13]) функция I должна быть постоянной в круге $|z - \bar z| \leqslant \nu$, что означает совпадение H с одной из функций F_i ($i = 1,\ 2,\ 3$) во всем круге $|z - \bar z| \leqslant \nu$. Итак, тройка F_1, F_2, F_3 удовлетворяет условию $(P,\ Q)$ в круге $|z - \bar z| \leqslant \nu$.

Пусть тройка КФКП $\bar F_1$, $\bar F_2$, $\bar F_3$ удовлетворяет условию $(P,\ Q)$ в круге $|z - \bar z| \leqslant \nu_1$, тройка КФКП $\bar{\bar F}_1$, $\bar{\bar F}_2$, $\bar{\bar F}$ удовлетворяет условию $(P,\ Q)$ в круге $|z - \bar{\bar z}| \leqslant \nu_2$, и круги $|z - \bar z| \leqslant \nu_1$ и $|z - \bar{\bar z}| \leqslant \nu_2$ имеют больше одной общей точки.

Рассмотрим произвольную точку z_1, являющуюся внутренней для обоих кругов. Тогда существует FR-число ν, такое, что круг $|z - z_1| \leqslant \nu$ погружен одновременно в круг $|z - \bar z| \leqslant \nu_1$, и в круг $|z - \bar{\bar z}| \leqslant \nu_2$. Согласно доказанному, существует тройка КФКП F_1, F_2, F_3, удовлетворяющая условию $(P,\ Q)$ в круге $|z - z_1| \leqslant \nu$. В силу единственности этих функций, существуют перестановки $(k_1,\ k_2,\ k_3)$ и $(l_1,\ l_2,\ l_3)$ индексов $(1,\ 2,\ 3)$, такие, что

$$F_i(z_1) = \bar F_{k_i}(z_1) = \bar{\bar F}_{l_i}(z_1). \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

Пользуясь вышеуказанным следствием из теоремы Маркова, легко доказать, что перестановки $(k_1,\ k_2,\ k_3)$ и $(l_1,\ l_2,\ l_3)$ индексов $(1,\ 2,\ 3)$ не зависят от точки z_1, т. е. остаются постоянными для любой точки, внутренней для обоих кругов.

Построим, наконец, искомую тройку КФКП H_1, H_2, H_3, удовлетворяющую условию $(P,\ Q)$ в круге $|z - z_0| \leqslant r$. Пусть $\bar z$ — произвольная внутренняя точка круга $|z - z_0| \leqslant r$, ν_1 — расстояние ее от окружности этого круга и $\nu = \min(\eta,\ \nu_1)$. Соединим точку $\bar z$ с точкой z_0 прямой линией. На этой прямой построим точки $z_1, z_2, \ldots, z_k$ $\left(k = \left[\dfrac{|\bar z - z_0|}{\nu}\right]\right)$, такие, что

$$z_i = z_0 + i\,\frac{z - z_0}{|z - z_0|}\cdot\nu \qquad (i = 1 \ldots k)$$

Через K_i обозначим круг $|z-z_i|\leqslant \nu$ $(i=1\dots k)$. Очевидно, что точка $\bar{z}$ = внутренняя для круга K_k. Для каждого $1\leqslant i\leqslant k$ построим тройку КФКП F_{1i}, F_{2i}, F_{3i}, удовлетворяющих условию (P, Q) в круге K_i. Построим также тройку КФКП F_{10}, F_{20}, F_{30}, удовлетворяющую условию (P, Q) в круге $|z-z_0|\leqslant \eta$. Соответствующей переиндексацией можно добиться того, что для любой точки z, являющейся внутренней для кругов K_i и K_{i+1} $(i=0, \dots, k-1)$, имеет место следующее

$$F_{ji}(z)=F_{ji+1}(z) \qquad (j=1,\ 2,\ 3).$$

Полагаем

$$H_j(\bar{z})=F_{jk}(\bar{z}) \qquad (j=1,\ 2,\ 3).$$

Нетрудно убедиться в том, что КФКП H_1, H_2, H_3 являются тройкой фракций, удовлетворяющих условию (P, Q) в круге $|z-z_0|\leqslant r$.

Лемма 4. *Пусть имеем конструктивный степенной ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} C(k)\,z^k$ *и пусть существуют KFR-числа* y_1 *и* y_2 *такие, что* $S\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} C(k)\,z^k,\ y_1\right)$ и $\urcorner S\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} C(k)\,z^k,\ y_2\right)$.

Пусть, наконец, КФКП Φ, *определяемая в круге* $|z|<|y_1|$ *следующим образом*

$$\Phi(z)=\sum_{k=0}^{\infty} C(k)\,z^k,$$

удовлетворяет условию

$$P_0(z)\,\Phi^3(z)+P_1(z)\,\Phi^2(z)+P_2(z)\,\Phi(z)+P_3(z)=0, \qquad (4.17)$$

где P_0, P_1, P_2, P_3 — *рациональные функции, определенные в круге* $|z|<|y_2|$, *причем* P_0 *нигде в кольце* $0<|z|<|y_2|$ *в нуль не обращается. Тогда квазисуществимо FR-число* R, *являющееся радиусом сходимости вышеуказанного ряда.*

Доказательство. В силу условия леммы дискриминант Δ приведенной формы уравнения (4.17) определен в кольце $0<|z|<|y_2|$ и имеет в этом кольце вид

$$\Delta(z)=-27\,Q^2(z)-4P^3(z),$$

где P и Q — рациональные функции.

Нетрудно убедиться в том, что квазиосуществима система KFR-чисел

$$z_1,\ z_2,\ \dots,\ z_m \qquad (4.18)$$

такая, что

$$|z_1|=|y_1|, \qquad |z_m|=|y_2|,$$

$$\forall i\,(1\leqslant i\leqslant m\supset |z_i|<|z_{i+1}|), \qquad (4.19)$$

$$\forall z\,(|y_1|<|z|<|y_2|\,\&\,\Delta(z)=0\supset \urcorner\urcorner\,\exists i\,(1\leqslant i\leqslant m\,\&\,|z|=|z_i|)).$$

Допустим, что мы имеем систему (4.18), удовлетворяющую условиям (4.19). Тогда

$$\neg\neg \exists i \Big(1 \leqslant i \leqslant m \,\&\, \forall z \Big(|z| < |z_i| \supset S\Big(\sum_{k=0}^{\infty} C(z)\, z^k,\ z\Big)\Big) \,\&$$

$$\forall j \Big(i < j \leqslant m \supset \neg\, \forall z \Big(|z| < |z_j| \supset S\Big(\sum_{k=0}^{\infty} C(k)\, z^k,\ z\Big)\Big)\Big)\Big). \qquad (4.20)$$

Итак, предположим, что z_i таково, что

$$\forall z \Big(|z| < |z_i| \supset S\Big(\sum_{k=0}^{\infty} C(k)\, z^k,\ z\Big)\Big), \qquad (4.21)$$

$$\forall j \Big(i < j \leqslant m \supset \neg\, \forall z \Big(|z| < |z_j| \supset S\Big(\sum_{k=0}^{\infty} C(k)\, z^k,\ z\Big)\Big)\Big). \qquad (4.22)$$

Докажем, что $|z_i|$ есть радиус сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} C(k)\, z^k$. Рассмотрим 2 случая: 1) $|z_i| = |y_2|$. Учитывая, что в силу одного из условий леммы ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} C(k)\, z^k$ расходится при $|z| \geqslant |y_2|$, из (4.21) получаем, что $|y_2|$ есть радиус сходимости. 2) $|z_i| < |y_2|$. Учитывая (4.21), достаточно доказать, что

$$\forall z \Big(|z| > |z_i| \supset \neg S\Big(\sum_{k=0}^{\infty} C(k)\, z^k,\ z\Big)\Big).$$

Предположим противное, т. е. пусть существует точка z_0, такая, что

$$|z_0| > |z_i| \,\&\, S\Big(\sum_{k=0}^{\infty} C(k)\, z^k,\ z_0\Big). \qquad (4.23)$$

Очевидно, что $|z_0| < |z_{i+1}|$, т. к. в противном случае мы имели бы $S\Big(\sum\limits_{k=0}^{\infty} C(k)\, z^k,\ z\Big)$ при любом z, таком что $|z| < |z_{i+1}|$, что противоречит (4.22). Из (4.23) следует, что

$$\forall z \Big(|z| < |z_0| \supset S\Big(\sum_{k=0}^{\infty} C(k)\, z^k,\ z\Big)\Big).$$

Поэтому в круге $|z| < |z_0|$ существует аналитическая функция F, такая, что при любом z из вышеуказанного круга

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C(k)\, z^k \qquad (4.24)$$

Зафиксируем некоторое положительное рациональное число ε, такое, что

$$\varepsilon < \min(|z_0| - |z_l|, \ |z_{l+1}| - |z_0|). \tag{4.25}$$

Ясно, что $|z_l| + \varepsilon \leqslant |z_0| \leqslant |z_{l+1}| - \varepsilon$. Докажем, что в круге $|z| < |z_{l+1}| - \varepsilon$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} C(k) z^k$ сходится. Рассмотрим окружность

$$|z| = \frac{|z_l| + |z_{l+1}|}{2}.$$

На этой окружности построим точки

$$u_1, u_2, \dots, u_p$$

так, чтобы для любой точки z из кольца

$$|z_l| + \varepsilon \leqslant |z| \leqslant |z_{l+1}| - \varepsilon$$

существовало бы н. ч. j, такое, что $1 \leqslant j \leqslant p$ и z принадлежало бы кругу $|z - u_j| < \frac{|z_{l+1}| - |z_l| - \varepsilon}{2}$. Через K_j обозначим круг $|z - u_j| < \frac{|z_{l+1}| - |z_l| - \varepsilon}{2}$ $(j = 1, \dots, p)$. Нетрудно убедиться в том, что все точки любого круга K_j $(j = 1, \dots, p)$ $\frac{\varepsilon}{2}$ — удалены от окружностей $|z| = |z_l|$ и $|z| = |z_{l+1}|$. Поэтому в каждом круге K_j $(j = 1, \dots, p)$ любая точка z отстоит от любого нуля дискриминанта Δ на расстоянии, не меньшем, чем $\frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда следует, что существует такое положительное рациональное число δ, что для любого круга K_j $(j = 1, \dots, p)$ и любой точки $z \in K_j$

$$\Delta(z) \geqslant \delta.$$

Согласно лемме 3, для каждого j, такого, что $1 \leqslant j \leqslant p$, построим тройку КФКП $\Phi_{j1}, \Phi_{j2}, \Phi_{j3}$, удовлетворяющих условию (P, Q) в круге K_j.

Согласно этой же лемме

$$\forall j (1 \leqslant j \leqslant p \supset \exists i_0 (1 \leqslant i_0 \leqslant 3 \,\&\, \forall z (|z| < |z_0| \,\&\, z \in K_j \supset \Phi_{ji_0}(z) = F(z)))).$$

Соответствующей перестановкой индексов у функций $\Phi_{j1}, \Phi_{j2}, \Phi_{j3}$ $(j = 1, \dots, p)$ можно добиться того, чтобы

$$\forall j (1 \leqslant j \leqslant p \supset \forall z (|z| < |z_0| \,\&\, |z \in K_j \supset \Phi_{j1}(z) = F(z))).$$

Нетрудно убедиться в том, что в круге $|z| \leqslant |z_{l+1}| - \varepsilon$ можно построить КФКП H, удовлетворяющую следующим условиям

$$H(z) = \begin{cases} F(z), & \text{если } |z| \leqslant |z_0|, \\ \Phi_{j1}(z), & \text{если } z \in K_j. \end{cases} \tag{4.26}$$

Очевидно, что $H(z)$ — аналитическая функция. Так как при любом рациональном положительном числе η $F(z)$ равномерно непрерывна в круге $|z| \leqslant |z_0| - \eta$, и при любом j, таком, что $1 \leqslant j \leqslant p$, $\Phi_{\jmath}$ равномерно непрерывна в круге K_j, то нетрудно видеть, что $H(z)$ — равномерно непрерывна в круге $|z| \leqslant |z_{i+1}| - \varepsilon$. Поэтому легко убедиться в том, что $H(z)$ в вышеуказанном круге разлагается в ряд Тейлора

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H^{(k)}(0)}{k!} z^k.$$

Однако, согласно (4.26), для любого н. ч. k

$$H^{(k)}(0) = F^{(k)}(0).$$

Следовательно, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} z^k \tag{4.27}$$

сходится в круге $|z| \leqslant |z_{i+1}| - \varepsilon$. Из (4.24) и (4.27) следует, что для любого положительного рационального числа ε, удовлетворяющего условию (4.25), ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathrm{C}(k) z^k$ сходится в круге $|z| \leqslant |z_{i+1}| - \varepsilon$.

Рассмотрим теперь произвольную $\bar{z}$, такую, что

$$|z_0| \leqslant |\bar{z}| < |z_{i+1}|.$$

Зафиксируем положительное рациональное число ε так, чтобы

$$\varepsilon < \min(|z_0| - |z_i|, |z_{i+1}| - |\bar{z}|). \tag{4.28}$$

Ясно, что ε, выбранное таким образом, удовлетворяет условию (4.25). Из (4.27) следует, что

$$|z_i| + \varepsilon \leqslant |\bar{z}| \leqslant |z_{i+1}| - \varepsilon.$$

Согласно вышеуказанному, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathrm{C}(k) z^k$ сходится в круге $|z| \leqslant$ $\leqslant |z_{i+1}| - \varepsilon$. Отсюда, в частности, следует сходимость этого ряда в точке $\bar{z}$. Итак,

$$\forall z \left(|z| < |z_{i+1}| \supset S\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{C}(k) z^k, z \right) \right),$$

что противоречит (4.22). Лемма доказана.

Следствие 1. Квазиосуществим радиус сходимости языка ЯМРФ.

Следствие 2. При каждом н. ч. $m > 0$ квазиосуществим радиус сходимости языка $Я_m$.

§ 5. Доказательство основной теоремы

Теорема 3. *Пусть* $\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{C}(k) z^k$ — *конструктивный степенной ряд, такой, что для всякого н. ч. k $\mathrm{C}(k)$ есть неотрицательное FR-число, пусть FR-число R — его радиус сходимости и КФКП Φ, определяемая в круге $|z|<R$ равенством*

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{C}(k) z^k,$$

удовлетворяет в указанном круге условию

$$P_0(z)\Phi^3(z) + P_1(z)\Phi^2(z) + P_2(z)\Phi(z) + P_3(z) = 0, \tag{5.1}$$

где P_i при $0 \leqslant i \leqslant 3$ суть КФКП, аналитичные и равномерно непрерывные в некотором круге $|z|<R^*$ при $R^*>R$, причем P_0 при некоторых н. ч. n и FR-числе c в круге $|z|<R^*$ удовлетворяет условию

$$|P_0(z)| \geqslant c|z|^n.$$

Пусть, наконец, КФКП Δ — дискриминант приведенной формы уравнения (5.1). Тогда

$$\Delta(R) = 0.$$

Доказательство. В силу условия теоремы существуют КФКП P и Q, аналитические и равномерно непрерывные в кольце $0<|z|<R^*$ и такие, что для любого z из указанного кольца

$$\Delta(z) = -27Q^2(z) - 4P^3(z).$$

Введем в рассмотрение КФКП G, такую, что при любом z из кольца $0<|z|<R$

$$G(z) = \Phi(z) - \frac{P_1(z)}{3P_0(z)}.$$

Так как согласно условию теоремы $P_0(z) \neq 0$ при $0<|z|<R$, то КФКП G аналитична в этом кольце. Теорему будем доказывать от противного. Предположим, что $\Delta(R) \neq 0$. В силу непрерывности функции Δ в точке $z=R$ существует такое рациональное число $\varepsilon>0$, что $\varepsilon<\min(R, R^*-R)$ и для любой точки z, принадлежащей кругу $|z-R|<\varepsilon$,

$$|\Delta(z)| > \frac{|\Delta(R)|}{2}.$$

Тогда, согласно лемме 3 существует тройка КФКП H_1, H_2, H_3, удовлетворяющая условию (P, Q) в круге $|z-R|<\varepsilon$, причем существует такое н. ч. i_0, что для любой точки z круга $|z-R|<\varepsilon$, принадлежащей кольцу $0<|z|<R$, имеет место следующее равенство

$$G(z)=H_{i_0}(z).$$

Введем в рассмотрение КФКП J, определяемую в круге $|z-R|<\varepsilon$ следующим образом

$$J(z)=H_{i_0}(z)+\frac{P_1(z)}{3P_0(z)}.$$

Ясно, что J — аналитическая и равномерно непрерывная функция в круге $|z-R|<\varepsilon$ и, кроме того, в любой точке z этого круга, принадлежащей кольцу $0<|z|<R$

$$J(z)=\Phi(z). \tag{5.2}$$

Рассмотрим круг $\left|z-\left(R-\frac{\varepsilon}{4}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\cdot$ В этом круге КФКП J аналитична и равномерно непрерывна. Поэтому она в том же круге разлагается в ряд Тейлора

$$J(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{J^{(k)}\left(R-\frac{\varepsilon}{4}\right)}{k!}\left(z-\left(R-\frac{\varepsilon}{4}\right)\right)^k\cdot$$

Но для любого н. ч. k, согласно (5.2), $J^{(k)}\left(R-\frac{\varepsilon}{4}\right)=\Phi^{(k)}\left(R-\frac{\varepsilon}{4}\right)\cdot$

Следовательно, ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Phi^{(k)}\left(R-\frac{\varepsilon}{4}\right)}{k!}\left(z-\left(R-\frac{\varepsilon}{4}\right)\right)^k$ сходится в круге $\left|z-\left(R-\frac{\varepsilon}{4}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\cdot$ Отсюда, в частности, следует сходимость этого ряда в точке $z=R+\frac{\varepsilon}{8}$, что противоречит лемме 2. Теорема доказана.

В § 4 мы рассмотрели семейство подъязыков $\{Я_m\}$ языка многоместных рекурсивных функций, зависящее от натурального параметра m $(m>0)$. Для этих подъязыков верно следующее утверждение.

Теорема 4. *Невозможно, чтобы при любом н. ч. m, таком что $1\leqslant m\leqslant 3$, радиус сходимости языка $Я_m$ совпадал бы с радиусом сходимости ЯМРФ.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть R — радиус сходимости ЯМРФ и одновременно радиус сходимости $Я_m$ при $m=1, 2, 3$. Из изложенного в § 4 следует, что $R<\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{12}}\cdot$ Обозначим через Δ (соответственно, Δ_m) — дискриминант приведенной формы уравнения (4.6) (соответственно, уравнения (4.12)). Т. к. коэффициенты уравнений (4.6) и (4.12) удовлетворяют условиям теоремы 3, то

$$\Delta(R) = 0, \tag{5.3}$$

$$\forall m\,(1 \leqslant m \leqslant 3 \supset \Delta_m(R) = 0).$$

Используя равенства (4.13) и (5.3), получим, что для любого н. ч. m, такого что $1 \leqslant m \leqslant 3$, имеет место следующее

$$-27S(R)(2Q(R) + S(R)R^m) - 4T(R)(3P^2(R) +$$
$$+ 3P(R)T(R)R^m + T^2(R)R^{2m}) = 0, \tag{5.4}$$

где КФКП S и T определяются в круге $|z| < \frac{1}{2}$ равенствами

$$S(z) = z^{35},$$

$$T(z) = \frac{1}{3}z^{29}(1 + z^5).$$

Левую часть равенства (5.4) обозначим через $M(m)$. Итак,

$$\forall m\,(1 \leqslant m \leqslant 3 \supset M(m) = 0).$$

Отсюда следует, что

$$M(1) - M(2) = 0,$$

$$M(1) - M(3) = 0,$$

т. е.

$$27T^2(R) + 4S(R)[3P(R)S(R) + S^2(R)R(R+1)] = 0,$$

$$27T^2(R) + 4S(R)[3P(R)S(R) + S^2(R)R(R^2+1)] = 0,$$

Вычитывая из второго равенства первое, получим

$$S^3(R)R^2(R-1) = 0.$$

Т. к. $R \neq 0$, $R \neq 1$ и $S(R) \neq 0$, то мы получили противоречие, что и доказывает теорему.

Основная теорема. ЯМРФ не является асимптотически оптимальным.

Доказательство. Согласно теореме 4 квазиосуществим язык $Я_m$ $(1 \leqslant m \leqslant 3)$, радиус сходимости которого больше радиуса сходимости ЯМРФ. Итак, пусть R_1 — радиус сходимости этого языка $Я_m$, R — радиус сходимости ЯМРФ. Тогда, очевидно,

$$R_1 > R.$$

Однако, по лемме 1

$$\overline{\lim}\sqrt[k]{\mathbf{A}(k)} = \frac{1}{R},$$

$$\overline{\lim}\sqrt[k]{\mathbf{B}(k)} = \frac{1}{R_1}.$$

откуда следует, что FR-числа $\frac{1}{R}$ и $\frac{1}{R_1}$ удовлетворяют всем трем условиям теоремы 1. Следовательно, ЯМРФ не является асимптотически оптимальным. Теорема доказана.

Ն. Պ. ՏԵՐ-ԶԱՔԱՐՅԱՆ

ԲԱԶՄԱՏԵՂԱՆԻ ՌԵԿՈՒՐՍԻՎ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԼԵԶՎԻ ԷՆՏՐՈՊԻԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հետազոտվում է բազմատեղանի ռեկուրսիվ ֆունկցիաների լեզուն և ապացուցվում է, որ նա մուլտիպլիկատիվ օպտիմալ է. բայց ասիմպտոտիկ օպտիմալ չէ։ Ապացույցը հիմնվում է ընդհանուր թեորեմայի վրա, որը վերաբերվում է ալգորիթմիկ լեզուների ասիմպտոտիկ օպտիմալությանը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Клини С. К.* Введение в метаматематику. Изд-во иностранной литературы, М., 1957.
2. *Тер-Захарян Н. П.* Об энтропийных свойствах алгорифмических языков. Исследования по теории алгорифмов. М., 1972.
3. *Тер-Захарян Н. П.* О языке многоместных рекурсивных функций. ДАН СССР, т. 210, № 3, 541—542, 1973.
4. *Мальцев А. А.* Алгорифмы и рекурсивные функции. М., 1965.
5. *Цейтин Г. С.* Алгорифмические операторы в конструктивных пространствах. Труды мат. ин-та им. Стеклова, LXVII, М., 1962.
6. *Детловс В. К.* Эквивалентность нормальных алгорифмов и рекурсивных функций. Труды мат. ин-та им. Стеклова, LXVII, М., 1958.
7. *Хачатрян М. А.* О конструктивных числовых рядах. Труды ВЦ АН Арм. ССР, вып. 5, 1968.
8. *Шанин А. Н.* Конструктивные числа и функциональные пространства. Труды мат. ин-та им. Стеклова, LXVII, М., 1972.
9. *Марков А. А.* О непрерывности конструктивных функций. Успехи мат. наук, IX, № 3 (61), 226—230 (1954).
10. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. Изд. «Наука», М., 1968.
11. *Маркушевич А. И.* Краткий курс теории аналитических функций. Гостехиздат. М., 1957.
12. *Манукян С. Н.* О конструктивных кривых и криволинейных интегралах от функции комплексной переменной. Изв. АН Арм. ССР, том IV, № 2 (1969).
13. *Заславский И. Д., Манукян С. Н.* О разбиениях плоскости конструктивными кривыми. Труды ВЦ АН Арм. ССР и ЕрГУ, т. 5, 1968.