Д. Г. АСАТРЯН

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ РАЗЛИЧЕНИЯ ДВУХ СИГНАЛОВ

Рассматривается следующая задача выбора решения. В соответствии с некоторым законом λ порождается бинарная последовательность сигналов, длина которой N. В канале связи на каждый сигнал независимо накладывается стационарный аддитивный шум с нулевым средним. При условии, что наблюдателю известны некоторые свойства закона λ, требуется построить правило решения относительно каждого члена последовательности сигналов, качество работы которого определяется средним числом элементов последовательности, где решение было ошибочным.

Если сигналы порождаются независимо друг от друга, то нетрудно указать оптимальное пороговое правило обработки принятой реализации в смысле выбранного критерия (байесовское правило). Если же закон λ таков, что существует в определенном смысле связь между соседними сигналами, то целесообразно использовать другое правило выбора решения, которое исправляет „неупорядоченность" появления сигналов. Найденное правило достаточно простое и равномерно лучше байесовского правила в некотором классе законов λ.

Построению и исследованию свойств указанного решающего правила и посвящена настоящая статья.

Сама задача поставлена Ш. А. Губерманом и возникла в связи с некоторыми вопросами геологической разведки.

1°. Имеются два m-мерных сигнала $s_j \in R_m$ $(j=0, 1)$, $s_0 \neq s_1$, где R_m-вещественное m-мерное пространство. Предположим, что по каналу связи передается последовательность s, состоящая из N векторов s_j: $s=(s(1), s(2), \cdots, s(N))$, образованная в соответствии с некоторой последовательностью $\lambda=(\lambda(1), \lambda(2), \cdots, \lambda(N))$, $\lambda \in \Lambda_N$ нулей и единиц, где Λ_N-множество всех последовательностей нулей и единиц длины N, а

$$s(n)=[1-\lambda(n)]\, s_0+\lambda(n)\, s_1, \quad n=1, 2, \cdots, N. \tag{1}$$

Пусть в канале связи действует аддитивный стационарный m-мерный шум $\xi=(\xi(1), \xi(2), \cdots, \xi(N))$, $\xi(n) \in R_m$ с нулевым математическим ожиданием, с независимыми по n значениями и с плотностью распределения $f(x)$ из некоторого множества F плотностей распределения ($x \in R_m$). Тогда на вход приемного устройства поступает последовательность $\eta = (\eta(1), \eta(2), \cdots, \eta(N))$, где

$$\eta = s + \xi. \tag{2}$$

Задача приемного устройства состоит в определении значений реализации $\lambda \in \Lambda_N$ по наблюдаемой реализации η наилучшим, в некотором смысле, образом.

Будем предполагать, что приемное устройство вырабатывает решение $\gamma = \gamma(n, \eta, \theta) = 0, 1$ в каждой точке n, $1 \leqslant n \leqslant N$, в зависимости от наблюдаемой реализации η. Здесь $\theta = (\theta(1), \theta(2), \cdots, \theta(k))$ — вектор параметров приемного устройства, принадлежащий подмножеству Θ пространства R_k. $\gamma(n, \eta, \theta)$ называется решающим правилом.

Обозначим E — пространство наблюдений η, $\Gamma(N, E, \Theta)$ — множество всех решающих правил $\gamma(n, \eta, \theta)$ μ — распределение вероятностей на Λ_N из некоторого класса распределений $M(\Lambda_N)$. Решающее правило $\gamma^* \in \Gamma'(N, E, \Theta) \subset \Gamma(N, E, \Theta)$ назовем оптимальным в Γ' (в смысле критерия минимума среднего риска)*), если выполняется условие

$$\Phi(f, \mu, \gamma^*) \leqslant \Phi(f, \mu, \gamma), \quad \gamma \in \Gamma'(N, E, \Theta) \tag{3}$$

где $\Phi(f, \mu, \gamma)$ — средний риск, определяемый формулой

$$\Phi(f, \mu, \gamma) = M\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |\lambda(n) - \gamma(n, \eta, \theta)|\right\}. \tag{4}$$

В этой формуле математическое ожидание (м. о.) берется по всем реализациям λ и η. Значение θ^*, при котором $\gamma^* = \gamma(n, \eta, \theta^*)$, называется оптимальным. В связи с тем, что в формуле (4) отличны от нуля только те слагаемые, для которых $\lambda(n) \neq \gamma(n, \eta, \theta)$, различаются два случая принятия ошибочных решений (два рода ошибок):

$$\text{A)} \quad \gamma(n, \eta, \theta) = 1 \quad \text{при} \quad \lambda(n) = 0,$$

$$\text{B)} \quad \gamma(n, \eta, \theta) = 0 \quad \text{при} \quad \lambda(n) = 1.$$

Обозначим $P_j[\lambda(n); \gamma(n, \eta, \theta)] = P\{\lambda(n) = j; \ \gamma(n, \eta, \theta) = 1 - j\}$, ($j = 0, 1$), где $P\{\cdot\}$ — вероятность события $\{\cdot\}$. Тогда формула (4) примет вид

$$\Phi(f, \mu, \gamma) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=0}^{1} P_j[\lambda(n); \gamma(n, \eta, \theta)]. \tag{5}$$

---

*) Здесь предполагается, что потери при ошибках I и II рода одинаковы и равны N^{-1}.

2°. В этом пункте мы найдем решающее правило γ^*, удовлетворяющее (3) в предположении, что члены последовательности λ порождаются независимо друг от друга. Будем предполагать, что распределение μ, а также истинные значения $\lambda(n)$ не известны наблюдателю. Плотность распределения $f(x)$ шума ξ и м. о. числа точек n, где $\lambda(n)$ принимает одно и то же значение, предполагаются известными. Будем ограничиваться рассмотрением только нерандомизированных решающих правил.

Для простоты рассмотрим случай одномерных сигналов ($m=1$). Пусть, для определенности, $s_0 < s_1$. Класс $\Gamma_1(N, E, \Theta)$ мы определим как множество всех решающих правил $\gamma_1(n, \eta, \theta)$, зависящих от одного параметра, вида

$$\gamma_1(n, \eta, \theta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \eta(n) \geqslant \theta, \\ 0, & \text{если } \eta(n) < \theta. \end{cases} \tag{6}$$

Здесь параметр θ называется порогом. Класс $\Gamma_1(N, E, \Theta)$, очевидно, совпадает с известным классом байесовских правил ([1], [2]). Обозначим

$$f_j(x) = f(x - s_j); \qquad p_j = p_j(\theta) = p\{\gamma_1 = 1 - j \mid \lambda(n) = j\};$$

$$a_j(n) = P\{\lambda(n) = j\}, \qquad (j = 0, 1).$$

Тогда, очевидно, в рассматриваемом случае

$$P_j[\lambda(n); \gamma_1(n, \eta, \theta)] = a_j(n)\, p_j(\theta) \qquad (j = 0, 1),$$

где $p_j(\theta)$ не зависит от n и вычисляется по формулам

$$p_0(\theta) = \int_\theta^\infty f_0(x)\,dx, \qquad p_1(\theta) = \int_{-\infty}^\theta f_1(x)\,dx. \tag{7}$$

Подставляя формулы (7) в (5), получаем

$$\Phi(f, \mu, \gamma_1) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{1} p_j(\theta) \sum_{n=1}^{N} a_j(n).$$

Последняя сумма является м.о. числа точек, где $\lambda(n) = j$. Обозначив $\alpha_j^N \cdot N = \sum_{n=1}^{N} a_j(n)$ и заметив, что $\sum_{j=0}^{1} \alpha_j^N = 1$, получаем окончательно

$$\Phi(f, \mu, \gamma_1) = \alpha_0^N p_0(\theta) + (1 - \alpha_0^N)\, p_1(\theta). \tag{8}$$

Можно доказать, что если $f(x)$ — функция с монотонным отношением правдоподобия, т. е. для любых $x < x'$, $y < y'$

$$\frac{f(x - y')}{f(x - y)} \leqslant \frac{f(x' - y')}{f(x' - y)}, \tag{9}$$

то существует правило $\gamma_1(n, \eta, \theta^*)$, где θ^* определяется из уравнения

$$\alpha_0^N f_0(\theta^*) = (1-\alpha_0^N) f_1(\theta^*). \tag{10}$$

Очевидно, что в случае, когда $\alpha_0^N = 0{,}5$ и $f(x)$ — четная функция,

$$\theta^* = \frac{s_0 + s_1}{2}. \tag{11}$$

3°. Будем предполагать теперь, что имеется достаточно много точек n $(2 \leqslant n \leqslant N-1)$ таких, что $\lambda(n-1) = \lambda(n) = \lambda(n+1)$. Такие точки будем называть точками, расположенными упорядоченно или упорядоченными точками последовательности λ. Ниже мы построим класс решающих правил $\Gamma_2(N, E, \Theta)$, имеющих простую структуру и обеспечивающих меньший средний риск по сравнению с правилами (6), в некотором классе распределений μ.

Определим коэффициент упорядоченности $x(\mu, N)$ последовательности $\lambda(n)$ формулой

$$x(\mu, N) = \frac{1}{N}\omega(\mu, N), \tag{12}$$

где $\omega(\mu, N)$ — м. о. числа упорядоченных точек последовательности $\lambda(n)$ на отрезке $[1, N]$. Из формулы (12) следует, что при $0 < \alpha_0^N < 1$ $0 \leqslant x(\mu, N) < 1$.

Теперь можно приступить к построению класса $\Gamma_2(N, E, \Theta)$. Определим решающее правило $\gamma_2(n, \eta, \theta)$ формулой

$$\gamma_2(n, \eta, \theta) = \begin{cases} 1, \text{ если } & \varphi_2(n, \eta, \theta) > 2 \\ 0, \text{ если } & \varphi_2(n, \eta, \theta) < 2 \end{cases} \tag{13}$$

при $n = 2, \cdots, N-1$ и

$$\gamma_2(1, \eta, \theta) = \gamma_1(1, \eta, \theta), \quad \gamma_2(N, \eta, \Theta) = \gamma_1(N, \eta, \theta),$$

где

$$\varphi_2(n, \eta, \theta) = \gamma_1(n-1, \eta, \theta) + \gamma_1(n, \eta, \theta) + \gamma_1(n+1, \eta, \theta),$$

$$\gamma_1(n, \eta, \theta) \in \Gamma_1(N, E, \Theta).$$

Формула (13) означает, что предварительно к реализации η применяется решающее правило $\gamma_1(n, \eta, \theta) \in \Gamma_1(N, E, \Theta)$, определенное формулой (6), затем к последовательности $\gamma_1(n, \eta, \theta)$ $(n = 1, 2, \cdots, N)$ применяется решающее правило γ_2. Несложными вычислениями, приведенными в приложении, можно показать, что

$$\Phi(f, \mu, \gamma_2) = \alpha_0^N(3p_0^2 - 2p_0^3) + (1-\alpha_0^N)(3p_1^2 - 2p_1^3) +$$
$$+ [b(001) + b(100)]\, 2p_0 q_0 (1 - p_0 - p_1) + b(101)[1 -$$
$$- 2p_0 + 2p_0 q_0 (p_1 - p_0)] + [b(110) + b(011)]\, 2p_1 q_1 (1 -$$
$$- p_0 - p_1) + b(010)[1 - 2p_1 + 2p_1 q_1 (p_0 - p_1)] +$$

$$+\frac{2}{N}\left[d_0p_0q_0(1-2p_0)+(1-d_0)p_1q_1(1-2p_1)\right], \qquad (14)$$

где $2d_0=a_0(1)+a_0(N)$, $p_j+q_j=1$ $(j=0,1)$, $b(i\,j\,k)$ — м. о. числа комбинаций вида i, j, k, встречающихся в последовательности $\lambda(n)$, отнесенное к N. Для нахождения оптимального решающего правила $\gamma_2(n,\eta,\theta^*)$ нужно решить уравнение $\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi(f,\mu,\gamma_2)=0$ относительно θ, при условии

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Phi(f,\mu,\gamma_2)>0.$$

В некоторых частных случаях формула (14) упрощается. Например, при достаточно больших N, достаточно близких к 1 значениям $\varkappa(\mu,N)$, и при фиксированной функции $f(x)$ в (14) можно пренебречь слагаемыми, начиная с третьего. В таком случае получим

$$\Phi(f,\mu,\gamma_2)\cong\alpha_0^N(3p_0^2-2p_0^3)+(1-\alpha_0^N)(3p_1^2-2p_1^3). \qquad (15)$$

Уравнение для оптимального порога имеет вид

$$\alpha_0^N f_0(\theta^*)p_0(\theta^*)q_0(\theta^*)=(1-\alpha_0^N)f_1(\theta^*)p_1(\theta^*)q_1(\theta^*). \qquad (16)$$

Анализируя формулу (16) и вторую производную функции (15), можно убедиться в том, что для существования оптимального порога θ^* достаточно, чтобы $f(x)$ была функцией с монотонным отношением правдоподобия, т. е., чтобы выполнялось (9).

Остановимся подробнее на другом частном случае. Рассмотрим класс $F_0\subset F$ плотностей распределения таких, что при $f\in F_0$

1. $f(x)=f(-x)$ при любом x,

2. $f(x)$ — функция с монотонным отношением правдоподобия, а также класс $M_0\subset M(\Lambda_N)$ распределений таких, что при $\mu\in M_0$

$$P\{\lambda(1),\cdots,\lambda(N)\}=P\{1-\lambda(1),\cdots,1-\lambda(N)\}.$$

Очевидно, при $\mu\in M_0$ имеем

3. $a_j(n)=0{,}5$ при любом j и n,

4. $b(101)=b(010)=b$,

5. $b(001)+b(100)=b(110)+b(011)$.

Если выполняются эти условия, то с учетом формулы (П-6) приложения формула (14) принимает вид

$$\Phi(f,\mu,\gamma_2)=0,5\,(3p_0^2-2p_0^3)+0,5\,(3p_1^2-2p_1^3)+$$
$$+2b\,[(1-p_0-p_1)(1-p_0q_0-p_1q_1)+(p_1-p_0)(p_0q_0-p_1q_1)]+$$
$$+(1-\varkappa)(p_0q_0+p_1q_1)(1-p_0-p_1)+\frac{1}{N}[p_0q_0(1-2p_0)+p_1q_1(1-2p_1)].$$

Теорема 1. Если выполняются условия (1) — (5), то оптимальный порог θ^* существует, не зависит от коэффициента связности и равен $\theta^* = \frac{s_0 + s_1}{2}$.

Доказательство получается дифференцированием (17), если заметить, что $f_0(\theta^*) = f_1(\theta^*)$, $p_0(\theta^*) = p_1(\theta^*)$, $f_0'(\theta^*) = -f_1'(\theta^*)$. Из этих же замечаний следует, что

$$\Phi(f, \mu, \gamma_2^*) = 3p_0^2 - 2p_0^3 + 2(1-\varkappa)p_0q_0(1-2p_0) +$$

$$+ 2b(1-2p_2)(1-2p_0q_0) + \frac{2}{N}p_0q_0(1-2p_0), \tag{18}$$

где $p_j = p_j(\theta^*)$.

Будем говорить, что решающее правило γ_2 равномерно лучше решающего правила γ_1 на $F \times M$, если $\Phi(f, \mu, \gamma_2) \leqslant \Phi(f, \mu, \gamma_1)$ для всех $f \in F$ и $\mu \in M$ и $\Phi(f, \mu, \gamma_2) < \Phi(f, \mu, \gamma_1)$ хотя бы для одной пары $f \in F$ и $\mu \in M$.

Лемма 1. Пусть выполняются условия (1)—(5). Тогда для каждой $f \in F_0$ существует $\mu \in M_0$ такое, что $\Phi(f, \mu, \gamma_2^*) \leqslant \Phi(f, \mu, \gamma_1^*)$, где γ_1^* определяется в (6), а γ_2^* — в (13).

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\Phi_0 = \Phi(f, \mu, \gamma_1^*) - \Phi(f, \mu, \gamma_2^*).$$

Из теоремы 1 имеем $\theta^* = \frac{1}{2}(s_0 + s_1)$. Из (8) при $\alpha_0^N = 0{,}5$ получаем

$$\Phi(f, \mu, \gamma_1^*) = p_0(\theta^*). \tag{19}$$

Тогда из (18) и (19) следует, что

$$\Phi_0 = (1-2p_0)\left[p_0q_0 - 2(1-\varkappa)p_0q_0 - 2b(1-2p_0q_0) - \frac{2}{N}p_0q_0\right].$$

Если при фиксированном f распределение μ такое, что

$$\varkappa(\mu, N) \geqslant 0{,}5 + 2b\left(\frac{1}{2p_0q_0} - 1\right) + \frac{1}{N}, \tag{20}$$

то $\Phi_0 \geqslant 0$.

Обозначим через Ω_0 множество всех пар $f \in F_0$, $\mu \in M_0$, для которых выполняется (20).

Теорема 2. Решающее правило γ_2^* равномерно лучше решающего правила γ_1^* на Ω_0.

Доказательство следует из леммы 1.

Следует пояснить появление b в формуле (20). Если $b > 0$, то даже в случае, когда шум отсутствует, решающее правило $\gamma_2(n, \eta, \theta)$ совершает ошибки, т. е. $\Phi(f, \mu, \gamma_2) > 0$. Однако, при $b > 0$ средний риск тем слабее зависит от b, чем больше действие шума, т. е. чем больше $p_0(\theta^*)$.

Таким образом, выигрыш от применения решающих правил $\gamma_2(n, \eta, \theta)$ вместо решающих правил $\gamma_1(n, \eta, \theta)$ получается за счет наличия упорядоченных точек в последовательности λ.

4°. В этом пункте рассматривается некоторое обобщение решающих правил $\gamma_2(n, \eta, \theta)$.

Определим решающее правило $\gamma_r(n, \eta, \theta)$ $(r > 1)$ следующим образом:

$$\gamma_r(n, \eta, \theta) = \begin{cases} 1, \text{ если } & \varphi_r(n, \eta, \theta) \geqslant 2 \\ 0, \text{ если } & \varphi_r(n, \eta, \theta) < 2 \end{cases}$$

при $n = 2, \cdots, N-1$ и

$$\gamma_r(1, \eta, \theta) = \gamma_1(1, \eta, \theta), \; \gamma_r(N, \eta, \theta) = \gamma_1(N, \eta, \theta),$$

где

$$\varphi_r(n, \eta, \theta) = \gamma_{r-1}(n-1, \eta, \theta) + \gamma_{r-1}(n, \eta, \theta) + \gamma_{r-1}(n+1, \eta, \theta).$$

Применение решающего правила $\gamma_r(n, \eta, \theta)$ к реализации η означает, что сначала к реализации η применяется решающее правило $\gamma_1(n, \eta, \theta)$, затем к последовательности $\gamma_1(n, \eta, \theta)$ применяется решающее правило $\gamma_2(n, \eta, \theta)$ и т. д. и к последовательности $\gamma_{r-1}(n, \eta, \theta)$ применяется решающее правило $\gamma_r(n, \eta, \theta)$.

Назовем точку $1 < n < N$ неупорядоченной точкой последовательности $\Psi(n)$, состоящей из нулей и единиц, если

$$\Psi(n-1) = \Psi(n+1) \neq \Psi(n).$$

Теорема 3. Для каждой реализации $\eta \in E$ существует $r(\eta) \leqslant \left[\frac{N}{2}\right]$ такое, что $\gamma_{r(\eta)}(n, \eta, \theta) = \gamma_{r(\eta)+k}(n, \eta, \theta)$ для любого целого $k > 0$.

Доказательство. Последовательности $\gamma_{r(\eta)}(n, \eta, \theta)$ и $\gamma_{r(\eta)+1}(n, \eta, \theta)$ отличаются только числом неупорядоченных точек. Обозначим $W_N[\gamma_{r(\eta)}(n, \eta, \theta)]$ — число неупорядоченных точек в реализации последовательности $\gamma_{r(\eta)}$. Тогда, очевидно, $W_N[\gamma_{r(\eta)}(n, \eta, \theta)] \geqslant W_N[\gamma_{r(\eta)+1}(n, \eta, \theta)]$, и существование $r(\eta)$ следует из конечности N.

Неравенство $r(\eta) \leqslant \left[\frac{N}{2}\right]$ следует из того факта, что $\max\limits_{\eta} r(\eta)$ достигается на реализации η, для которой $\gamma_1(n, \eta, \theta)$ имеет вид $\cdots 01010101 \cdots$.

Лемма 2. Пусть выполняются условия (1) — (5) предыдущего пункта. Тогда для каждой $f \in F_0$ существует $\mu \in M_0$ такое, что

$$\Phi(f, \mu, \gamma_r) > \Phi(f, \mu, \gamma_{r+1})$$

при любом $0 < r < \left[\frac{N}{2}\right]$.

Доказательство. При $r = 1$ лемма 2 совпадает с теоремой 2. Пусть лемма верна при некотором $1 < r < \left[\frac{N}{2}\right]$. Докажем, что она верна также при $r+1 < \left[\frac{N}{2}\right]$. Очевидно, можно рассматривать последовательность $\gamma_{r+1}(n, \tau, \theta)$ как исходную, с коэффициентом $\varkappa(\mu, N)$, удовлетворяющим условию (20). Из индуктивного предположения следует, что $\gamma_{r+1}(n, \tau, \theta)$ в среднем ближе к последовательности $\lambda(n)$, чем $\gamma_1(n, \tau, \theta)$, что оправдывает такое рассмотрение. Так как выполнены условия теоремы 2, то при применении решающего правила $\gamma_{r+2}(n, \tau, \theta)$ получим

$$\Phi(f, \mu, \gamma_{r+1}) > \Phi(f, \mu, \gamma_{r+2}).$$

Лемма доказана.

Из леммы 2 следует

Теорема 4. Решающее правило $\gamma^{*}_{\left[\frac{N}{2}\right]}$ равномерно лучше решающего правила γ^{*}_1 на Ω_0.

5°. Рассмотрим два примера.

Пример 1. Предположим, что $N = 2kN_0$ (k — фиксированное целое) и $\lambda(n)$ — последовательность, с вероятностью 1 равная нулю при $2iN_0 + 1 \leqslant n \leqslant (2i+1) N_0$ $(i = 0, 1, \cdots, k-1)$ и единице в остальных точках $1 \leqslant n \leqslant N$. Очевидно, в этом случае $b = 0$, а коэффициент упорядоченности удовлетворяет следующим условиям:

$$1. \text{ При } N_0 = 1 \quad \varkappa(\mu, N) = 0.$$

$$2. \text{ При } N_0 > 1 \quad \varkappa(\mu, N) = 1 - \frac{2}{N_0}.$$

Тогда, очевидно, удовлетворяются условия леммы 1. Подставляя в формулу (20) значения b и $\varkappa(\mu, N)$, получим, что для того, чтобы решающее правило γ^{*}_2 было равномерно лучше решающего правила γ^{*}_1 на Ω_0, должно выполняться условие $N_0 > 4 + \frac{1}{k}$.

Пример 2. Последовательность $\lambda(n)$ образует цепь Маркова с двумя состояниями (0 и 1), с начальным распределением (0,5; 0,5) и с матрицей переходных вероятностей (π_{ij}), $\pi_{ii} = \pi$, $\pi_{ij} = 1 - \pi$ $(i \neq j)$. Очевидно, в этом случае выполняются соответствующие условия леммы 1, причем

$$\varkappa(\mu, N) = \frac{N-2}{N}\pi^2, \quad 2b = \frac{N-2}{N}(1-\pi)^2.$$

Условие (20) принимает вид

$$\frac{\pi^2 - \dfrac{N}{2(N-2)}}{(1-\pi)^2} > \frac{1}{2p_0 q_0} - 1.$$

При больших N получаем

$$\frac{2\pi^2 - 1}{2(1-\pi)^2} > \frac{1}{2p_0 q_0} - 1. \tag{21}$$

Нетрудно видеть, что правая часть неравенства (21) не меньше 1. Отсюда получаем минимальное значение π, при котором может выполняться (21), равное 0, 75.

6°. Полученные результаты обобщаются на случай многомерных сигналов. В этом случае в качестве решающего правила (6) нужно рассматривать решающее правило

$$\gamma_1(n, \eta, g) = \begin{cases} 1, \text{ если } & g[\eta(n)] \geqslant 0 \\ 0, \text{ если } & g[\eta(n)] < 0, \end{cases}$$

где g — линейная дискриминантная функция от координат вектора из R_m. Это эквивалентно тому, что мы в пространстве R_m проводим гиперплоскость G и принимаем решение $\gamma_1(n, \eta, g) = 0$ или 1 в зависимости от того, в какую сторону от G попало наблюдение $\eta(n)$ в точке n. В этом случае число независимых параметров приемного устройства $k = m$. Условные вероятности $p_0(g)$ и $p_1(g)$ вычисляются по формулам

$$p_0(g) = \int\limits_{g(x)<0} f_0(x)\, dx, \quad p_1(g) = \int\limits_{g(x)>0} f_1(x)\, dx \quad (x \in R_m).$$

Предположим, что m-мерная плотность распределения $f(x)$ обладает симметричностью в том смысле, что $f(x)$ монотонно зависит только от расстояния σ точки x от начала координат. В таком случае мы можем рассматривать плотность $f_j(x)$ $(j = 0, 1)$ как функцию $h_j(\delta)$, монотонно зависящую от расстояния δ точки x до вектора s_j $(j = 0,1)$. Заменив $f_j(x)$ через $h_j(\delta)$, можем написать

$$p_0(g) = H_0(\delta_0) = \int\limits_{\delta_0}^{\infty} h_0(z)\, dz, \; p_1(g) = H_1(\delta_1) = \int\limits_{\delta_1}^{\infty} h_1(z)\, dz, \tag{22}$$

где δ_j — расстояние вектора s_j от гиперплоскости G. Нетрудно получить, что если β — угол между нормалью гиперплоскости G и вектором $s_1 - s_0$, l — расстояние между s_0 и s_1, то $\delta_1 = l\cos\beta - \delta_0$.

Очевидно, $H_0(\delta_0)$ не зависит от β, а $H_1(\delta_1)$ при фиксированном δ_0 достигает минимума при $\beta = 0$, т. е. когда гиперплоскость G ортогональна к вектору $s_1 - s_0$. Отсюда следует, что если существуют оптимальные решающие правила, то соответствующие им гиперплоскости должны быть ортогональны к вектору $s_1 - s_0$. Поэтому нахождение оптимальных, в смысле (3), решающих правил эквивалентно нахождению расстояния δ_0^*, минимизирующего средний риск $\Phi(f, \nu, \gamma)$, если вероятности $p_j(g)$ вычисляются по формуле (22), где $\delta_1 = l - \delta_0$. Таким образом, задача свелась к одномерному случаю, следовательно, все полученные выше результаты без изменений могут быть получены и в случае $m > 1$.

Автор выражает признательность Ш. А. Губерману за постановку задачи и В. Л. Стефанюку за полезное обсуждение результатов.

Приложение. Доказательство формулы (14). Вычислим вероятности $P_j[\lambda(n); \gamma_2(n, \gamma, \theta)]$. Для этого рассмотрим три последовательных значения последовательности $\lambda(n)$ в точках $n-1$, n, $n+1$. Обозначим $p_n(i, j, k) = P\{\lambda(n-1) = i; \lambda(n) = j; \lambda(n+1) = k\}$, $P\{\cdot | ijk\} = P\{\cdot | \lambda(n-1) = i; \lambda(n) = j; \lambda(n+1) = k\}$ $(i, j, k = 0, 1)$. Очевидно, при $n = 2, \cdots, N-1$, $j = 0, 1$

$$P_0[\lambda(n); \gamma_2(n, \gamma, \theta)] = \sum_{i,\,k=0}^{1} p_n(i, 0, k)\, P\{\varphi_2(n, \gamma, \theta) > 2 | i\,0\,k\},$$

$$P_1[\lambda(n); \gamma_2(n, \gamma, \theta)] = \sum_{i,\,k=0}^{1} p_n(i, 1, k)\, P\{\varphi_2(n, \gamma, \theta) < 2 | i\,1\,k\}. \quad (\Pi-1)$$

Событие $\{\varphi_2(n, \gamma, \theta) > 2 | \lambda(n) = 0\}$ (соответственно событие $\{\varphi_2(n, \gamma, \theta) < 2 | \lambda(n) = 1\}$) происходит тогда, когда $\gamma_1(n, \gamma, \theta)$ в последовательных точках $n-1$, n, $n+1$ принимает значения вида 001, 101, 110, 111 (соответственно 100, 010, 001, 000). При фиксированной комбинации значений $\lambda(n)$ случайные величины $\gamma_1(n-1, \gamma, \theta)$, $\gamma_1(n, \gamma, \theta)$, $\gamma_1(n+1, \gamma, \theta)$ попарно независимы в силу независимости значений шума по n. Отсюда легко получить все условные вероятности, входящие в формулы (П — I):

$$\begin{aligned}
P\{\varphi_2(n, \gamma, \theta) > 2 | 000\} &= 3p_0^2 - 2p_0^3,\\
P\{\varphi_2(n, \gamma, \theta) > 2 | 001\} = P\{\varphi_2(n, \gamma, \theta) > 2 | 100\} &= p_0^2 - 2p_0 q_0 q_1,\\
P\{\varphi_2(n, \gamma, \theta) > 2 | 101\} &= q_0^2 + 2p_0 p_1 q_1,\\
P\{\varphi_2(n, \gamma, \theta) < 2 | 111\} &= 3p_1^2 - 2p_1^3,\\
P\{\varphi_2(n, \gamma, \theta) < 2 | 110\} = P\{\varphi_2(n, \gamma, \theta) < 2 | 011\} &= p_1^2 - 2p_1 q_0 q_1,\\
P\{\varphi_2(n, \gamma, \theta) < 2 | 010\} &= q_1^2 + 2p_0 p_1 q_0,
\end{aligned} \quad (\Pi-2)$$

где через p_j обозначены вероятности $p_j(\theta)$, определенные формулой (7), $q_j = 1 - p_j$, $j = 0, 1$.

Подставляя (П — 2) в (П — 1), получим

$$P_j[\lambda(n);\ \gamma_2(n, \eta, \theta)] = p_n(j, j, j)\,(3\,p_j^2 - 2\,p_j^3) + [p_n(j, j, 1-j) + p_n(1-j, j, j)]\,(p_j^2 + 2\,p_j\,q_j\,q_{1-j}) + p_n(1-j, j, 1-j)\,(q_j^2 + 2\,p_j\,p_{1-j}\,q_j),\ n = 2, \cdots, N-1, \qquad (\text{П}-3)$$

$$P_j[\lambda(1);\ \gamma_2(1, \eta, \theta)] = a_j(1)\,p_j\,,\ P_j[\lambda(N);\ \gamma_2(N, \eta, \theta)] = a_j(N)\,p_j\,.$$

Далее, замечая, что при $n = 2, \cdots, N-1, j = 0, 1$

$$p_n(j, j, j) + p_n(j, j, 1-j) + p_n(1-j, j, j) + p_n(1-j, j, 1-j) = a_j(n),$$

можем переписать формулы (П — 3) в виде

$$P_j[\lambda(n);\ \gamma_2(n, \eta, \theta)] = a_j(n)\,(3\,p_j^2 - 2p_j^3) + [p_n(j, j, 1-j) + p_n(1-j, j, j,)]\,2\,p_j\,q_j\,(1 - p_0 - p_1) + p_n(j, 1-j, j)\,[1 - 2\,p_{1-j} + 2\,p_{1-j}\,q_{1-j}\,(p_j - p_{1-j})], \qquad (\text{П}-4)$$

$$P_j[\lambda(1);\ \gamma_2(n, \eta, \theta)] = a_j(1)\,p_j,\ P_j[\lambda(N);\ \gamma_2(N, \eta, \theta)] = a_j(N)\,p_j.$$

Подставляя (П—4) в (5) и обозначая

$$b(i, j, k) = \sum_{n=2}^{N-1} p_n(i, j, k),\ 2d_0 = a_0(1) + a_0(N),$$

получим

$$\Phi(f, \mu, \gamma_2) = \alpha_0^N\,(3\,p_0^2 - 2\,p_0^3) + (1 - \alpha_0^N)\,(3\,p_1^2 - 2\,p_1^3) + [b(001) + b(100)]\,2p_0\,q_0\,(1 - p_0 - p_1) + b(101)\,[1 - 2\,p_0\,q_0\,(p_1 - p_0)] + [b(110) + b(011)]\,2\,p_1\,q_1\,(1 - p_0 - p_1) + b(010)\,[1 - 2\,p_1 + 2\,p_1\,q_1\,(p_0 - p_1)] + \frac{2}{N}[d_0\,p_0\,q_0\,(1 - 2\,p_0) + (1 - d_0)\,p_1\,q_1\,(1 - 2\,p_1)]. \qquad (\text{П}-5)$$

Легко видеть, что

$$1 - \varkappa(\mu, N) = b(001) + b(100) + b(101) + b(010) + b(110) + b(011) + \frac{2}{N}\,. \qquad (\text{П}-6)$$

Դ. Գ. ԱՍԱՏՐՅԱՆ

ԵՐԿՈՒ ԱԶԴԱՆՇԱՆՆԵՐԻ ՏԱՐԲԵՐՄԱՆ ՄԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է հետևյալ խնդիրը։ Հաղորդվում է երկու ազդանշաններից բաղկացած՝ որոշ λ-օրինաչափության օգնությամբ կառուցված N անդամ

ունեցող հաջորդականության։ Այդ հաջորդականության յուրաքանչյուր անդամ ընդունվում է դիտորդի կողմից, ստացիոնար աղմուկով անկախորեն աղավաղված ձևով։ Պահանջվում է կառուցել հաջորդականության յուրաքանչյուր անդամի նկատմամբ որոշիչ կանոն, եթե դիտորդին հայտնի են λ-օրինաչափության որոշ հատկություններ։

Ցույց է տրվում, որ եթե λ-ն այնպիսին է, որ հաջորդականության անդամները իրարից ստոխաստիկորեն անկախ են, ապա լավագույն որոշիչ կանոնը համընկնում է Բայեսի կանոնի հետ։ Եթե հաջորդականության անդամները միմյանցից անկախ չեն, ապա նպատակահարմար է օգտագործել մի այլ որոշիչ կանոն, որը λ-օրինաչափությունների մի դասի համար հավասարաչափ ավելի լավ է, քան Բայեսի կանոնը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Д. Блекуэлл, М. А. Гиршик.* Теория игр и статистических решений. М., 1958.
2. *Т. Андерсон.* Введение в многомерный статистический анализ. М., 1963.