ПРИЛОЖЕНИЕ

Л. Э. Я. БРАУЭР

ИНТУИЦИОНИСТСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ЖОРДАНА О КРИВЫХ*

§ 1. Под *плоским точечным видом* мы понимаем вид, каждый член которого есть точка плоскости**.

Под *замкнутой непрерывной кривой* S мы понимаем плоский точечный вид, являющийся однозначным образом границы квадрата K, взятой с определенным направлением вращения (и рассматриваемой как точечный вид).

Согласно работе, опубликованной в настоящих Трудах*** (см. том XXVII, стр. 193), всякая замкнутая непрерывная кривая S является *равномерно непрерывным* образом границы квадрата K.

Под *жордановой кривой* J мы понимаем замкнутую непрерывную кривую, которая, будучи рассматриваемой как отображение границы квадрата K, обладает непрерывным обратным (разумеется, однозначным и, согласно т. XIII, № 2, стр. 4 Трудов Академии***, также равномерно непрерывным) отображением.

Из указанных соотношений между J и K следует, что для любого ε существует такое ε_1, сходящееся (т. е. позитивно-сходящееся) к нулю вместе с ε, что для любых точек A и B кривой J, расстояние между которыми**** $<\varepsilon$, оказывается, что расстояние между соответствующими точками A' и B' границы квадрата K меньше ε_1; таким

---

* Prof. *L. E. J. Brouwer,* Intuitionistischer Beweis des Jordanschen Kurvensatzes. Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Proceeding of the section of sciences, Vol. XXVIII, № 5, pp. 503—508. Communicated at the meeting of June 27, 1925.

** Мы будем пользоваться терминологией русского перевода книги А. Гейтинга „Интуиционизм" (М., изд-во „Мир", 1965). В соответствии с этим термин „Punktkern" переводится как „точка", а термин „Punkt" — как „точечный генератор". В отдельных случаях, когда это не приводит к недоразумениям, термин „Punkt" переводится как „точка" по стилистическим соображениям. *Прим. перев.*

*** Имеются в виду Труды Нидерландской Академии наук в Амстердаме, в которых напечатана работа Л. Э. Я. Брауэра. *Прим. перев.*

**** Формула $a>b$ (a больше b), где a и b суть действительные числа, означает здесь, что может быть указано натуральное число n, такое, что $a-b \geqslant 2^{-n}$.

образом, диаметр одной из дуг $A'B'$ на K меньше ε_1, и тем самым диаметр одной из дуг* AB кривой J меньше ε_2, где ε_2 сходится к нулю вместе с ε_1 и ε.

Пусть теперь ε выбрано таким образом, что соответствующее ε_2 меньше трети диаметра J, и пусть A, B и C суть три таких точки кривой J, что $\rho(A, C) < \frac{1}{2}\varepsilon$ и $\rho(C, B) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Тогда или можно указать дугу кривой J с диаметром, меньшим ε_2, содержащую точки A, B, C, или можно установить, что расстояние между любыми двумя точками среди A, B, C больше нуля. В последнем случае пусть $A\alpha B$ есть дуга кривой J диаметра $< \varepsilon_2$; точка C или (I) должна принадлежать этой дуге, или (II) должна отстоять от нее на расстояние > 0. В случае (I) снова указана дуга кривой J с диаметром $< \varepsilon_2$, содержащая точки A, B, C; в случае (II) мы рассмотрим два подслучая: (II_1) имеется дуга $A\alpha B\beta C$, содержащая точку B, с диаметром, меньшим ε_2; (II_2) имеется дуга $C\gamma A$ кривой J с диаметром $< \varepsilon_2$, от которой точка B удалена на положительное расстояние. В подслучае (II_2) дуга CB, от которой A удалена на положительное расстояние, имеет диаметр $> \varepsilon_2$**, так что диаметр дуги $C\gamma A\alpha B$ кривой J должен быть меньше ε_2, и снова существует дуга кривой J с диаметром $< \varepsilon_2$, содержащая A, B и C. Таким образом, для любых точек A, B, C кривой J из предположений $\rho(A, C) < \frac{1}{2}\varepsilon$ и $\rho(C, B) < \frac{1}{2}\varepsilon$ *всегда* следует существование дуги кривой J, содержащей точки A, B, C и обладающей диаметром, меньшим ε_2.

Пусть теперь дана $\frac{1}{2}\varepsilon$-цепь*** на кривой J. Если мы *по всяким двум* следующим друг за другом точечным генераторам этой цепи построим соединяющую их дугу кривой J с диаметром $< \varepsilon_2$, то мы получим некоторое целое (положительное, отрицательное или нулевое) общее количество оборотов данной цепи по кривой J, которое мы будем называть ***порядком******* цепи.

---

* Говоря об „одной из дуг $A'B'$“ (или AB), автор имеет в виду одну из двух частей, на которые точки A' и B' (соответственно, A и B) делят границу квадрата K (кривую J); под диаметром (Breite) дуги автор, по-видимому, понимает точную верхнюю границу длин хорд, концы которых лежат на данной дуге (существование диаметра равномерно-непрерывной дуги может быть доказано интуиционистски). *Прим. перев.*

** В противном случае оказалось бы, что диаметр кривой J меньше $3\varepsilon_2$, а это противоречит выбору ε. *Прим. перев.*

*** Под $\frac{1}{2}\varepsilon$-*цепью* на кривой J автор понимает, по-видимому, систему точечных генераторов $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$, принадлежащих кривой J, и таких, что $\rho(Z_i, Z_{i+1}) < \frac{\varepsilon}{2}$ при $1 \leq i < n$, и $\rho(Z_n, Z_1) < \frac{\varepsilon}{2}$. *Прим. перев.*

**** Интуиционистское определение порядка цепи строится на основе рассмотрения обратного отображения J на K. *Прим. перев.*

На основе результатов предшествующего абзаца мы можем утверждать, что *порядок* $\frac{1}{2}\varepsilon$*-цепи кривой* J *не меняется** *при* $\frac{1}{2}\varepsilon$*-сдвиге в* J.

§ 2. Пусть P—точечный генератор, *вполне удаленный* от кривой J, т. е. удаленный от J на положительное расстояние. Выберем $\varepsilon'' < \frac{1}{2}\varepsilon$ таким образом, что $\rho(P, J) \geqslant \varepsilon'' > 0$. Пусть ε' — такое число $< \frac{1}{2}\varepsilon''$, что для любых точек A и B кривой J, удаленных друг от друга на расстояние ε', диаметр одной из дуг AB кривой J меньше ε''. Пусть, далее, $\varkappa^\circ$ есть ε'-цепь на кривой K, которая является *канонической*, т. е. пробегает J в точности один раз в положительном направлении без перемен направления; пусть, кроме того, $\varkappa_2$ есть произвольная ε'-цепь на J. Тогда $\varkappa_2$ может быть *канонизирована относительно* $\varkappa^\circ$ при помощи конечного числа ε''-сдвигов, т. е. $\varkappa_2$ может быть превращена указанным образом в цепь $\varkappa_3$, которая состоит из такого целого числа (положительного, отрицательного или нулевого) следующих друг за другом цепей $\varkappa^\circ$, которое совпадает с порядком** цепи $\varkappa_2$.

Пусть Q есть квадрат, такой, что P и J содержатся внутри его и отстоят от его границы на расстояние $> \varepsilon''$. Разложим Q на конгруэнтные гомотетичные*** квадраты q с длиной сторон $< \frac{1}{16}\varepsilon'$. Среди этих q-квадратов выберем такой подвид τ'', которому**** принадлежат все q-квадраты, лежащие на расстоянии $> \frac{1}{4}\varepsilon'$ от кривой J, и вместе с тем такой, что все принадлежащие ему квадраты лежат на расстоянии $> \frac{1}{8}\varepsilon'$ от кривой J. Подвид τ' дополним затем q-квадратами, лежащими в областях, дополнительных к τ' и не содержащих кривой J; все такие квадраты отстоят от J на расстояние, большее $\frac{1}{8}\varepsilon'$. После такого дополнения τ' превратится в вид q-квадратов τ, который обладает внутри Q лишь одной дополнительной об-

* Имеется в виду, по-видимому, следующее утверждение. Пусть $Z_1, Z_2, \cdots, Z_{i-1}, Z_i, Z_{i+1}, \cdots, Z_n$ и $Z_1, Z_2, \cdots, Z_{i-1}, Z'_i, Z_{i+1}, \cdots, Z_n$ — две $\frac{\varepsilon}{2}$-цепи в J, такие, что $\rho(Z_i, Z'_i) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда порядки этих цепей равны. *Прим. перев.*

** Такая „канонизация" должна проводиться не только посредством сдвигов, но и посредством устранения и введения повторений точек. *Прим. перев.*

*** Т. е. одинаково расположенные. *Прим. перев.*

**** Вместо τ'' должно быть, по-видимому, τ'. *Прим. перев.*

ластью, содержит все квадраты, лежащие от кривой J на расстоянии, большем $\frac{1}{4}\varepsilon'$, и таков, что все квадраты, принадлежащие τ, лежат на расстоянии, большем $\frac{1}{8}\varepsilon'$ от кривой J.

Пусть β^0 есть максимальная область, содержащая P и вся покрытая квадратами из τ. Часть границы β^0, не лежащая на границе Q, является связной (это справедливо не только для β^0, но даже и для всякой максимальной области, покрытой квадратами из τ), и каждая ее точка отстоит от J на расстояние $<\frac{3}{8}\varepsilon'$ и $>\frac{1}{8}\varepsilon'$. Мы будем различать теперь два случая.

1. Граница Q не содержится в границе β^0. Пусть $\varkappa'$ есть цепь, лежащая на границе π области β^0, каноническая на π и состоящая из точечных генераторов угловых точек q-квадратов, расположенных друг за другом в положительном направлении на расстояниях, равных $\frac{1}{16}\varepsilon'$. По отношению к этой цепи $\varkappa'$ (т. е. по отношению к замкнутой полигональной линии, построенной из отрезков, соединяющих последовательные точки цепи $\varkappa'$) точечный генератор P, обладает* порядком 1. Теперь исходя из цепи $\varkappa'$ будем строить новые цепи, последовательно заменяя каждый точечный генератор цепи $\varkappa'$ некоторым другим точечным генератором, лежащим на J и отстоящим от первоначального точечного генератора на расстояние $<\frac{3}{8}\varepsilon'$; в результате мы получим конечную последовательность цепей $\varkappa_1', \varkappa_2', \varkappa_3', \ldots, \varkappa_m'$, где $\varkappa_m' = \varkappa''$ представляет собой некоторую ε'-цепь на кривой J. Пусть $\varkappa_p' = \cdots RST \cdots$ и $\varkappa_{p+1}' = \cdots RS_1T$, тогда ни один из треугольников RSS_1 и TSS_1 не содержит внутри себя точечного генератора P. Отсюда следует, что при любом p точечный генератор P имеет один и тот же порядок** по отношению к $\varkappa_p'$ и $\varkappa_{p+1}'$, и тем самым один и тот же порядок по отношению к $\varkappa'$ и $\varkappa''$, так что порядок P по отношению к $\varkappa''$ равен 1.

Пусть $\varkappa_k' = \cdots RSU \cdots$ есть ε''-цепь, лежащая на J (иначе обозначаемая также $\cdots RU \cdots$), которая путем ε''-сдвига превращается в

---

* Здесь автор употребляет понятие „порядка точечного генератора относительно кривой" (или „относительно цепи"), для которого он не дал интуиционистского определения. Такое интуиционистское определение должно, по-видимому, формализовывать представление о „числе оборотов радиуса-вектора относительно данной точки при обходе кривой" (или „цепи"). При таком понимании указанного термина утверждение, которое делает автор, весьма „очевидно", с „физической" точки зрения, однако это не снимает вопроса о доказуемости такого утверждения в математическом смысле. *Прим. перев.*

** См. предыдущее подстрочное примечание. *Прим. перев.*

некоторую другую ε''-цепь $\varkappa'_h = \cdots RTU \cdots$ на J. Тогда невозможно, чтобы один из треугольников RST и UST, или же треугольник RTU содержали бы внутри себя точечный генератор P, так что P обладает одним и тем же порядком относительно $\varkappa'_g$ и $\varkappa'_h$. Если мы посредством конечного числа ε''-сдвигов на кривой J канонизируем определенную в предыдущем абзаце цепь $\varkappa''$ относительно $\varkappa^?$, то мы получим ε'-цепь $\varkappa$, лежащую на J, относительно которой P снова будет обладать порядком 1.

Если мы все пары последовательных точечных генераторов цепи $\varkappa$ соединим дугами кривой J диаметра $<\varepsilon''$, то мы получим замкнутую непрерывную кривую V, представляющую некоторое целое число a оборотов кривой J; по отношению к этой кривой точечный генератор P обладает порядком 1, так что a не может быть равным нулю, и порядок P относительно J равен $\frac{1}{a}$. Но так как этот последний порядок должен быть целым числом, то a равно или $+1$, или -1, и также *порядок P относительно J или равен $+1$ или равен -1.*

2. Граница Q содержится в границе β°. Тогда P может быть соединен с бесконечностью посредством бесконечной полигональной линии, лежащей на расстоянии >0 от J, так что* *порядок P относительно J равен* 0.

Из выведенных нами отличительных свойств для случаев 1 и 2 следует, что наличие случая 1 (или случая 2) для произвольного точечного генератора P, вполне удаленного от J, не зависит от выбора величины ε'' $\left(\text{удовлетворяющей условиям } \varepsilon''>0,\ \varepsilon''<\frac{1}{2}\varepsilon \text{ и } \varepsilon''<\rho(P, J)\right)$.

§ 3. Пусть P_1 и P_2 — два точечных генератора, вполне удаленные от J. Мы различаем три случая:

1. Для P_1 и P_2 имеет место 1-й случай из § 2. Тогда мы выбираем ε'' так, чтобы были выполнены соответствующие условия и для P_1 и для P_2, т. е. так, чтобы P_1 и P_2 были удалены от J на расстояние $>\varepsilon''$; затем, согласно тому, как это было описано в § 2, мы определяем соответствующий квадрат Q, соответствующий вид τ q-квадратов, и определяем в τ для P_1 и P_2 области β_1° и β_2°. Если бы β_1° и β_2° не совпадали, то тогда точечный генератор P_2 по отношению к $\varkappa'_1$ обладал бы* порядком 0, и тем самым обладал бы порядком 0 также относительно $\varkappa''_1$, $\varkappa_1$, V и J. Из этого противоречия мы выводим, что β_1° и β_2° совпадают и, следовательно, P_1 и P_2 *можно соединить конечной ломаной линией, вполне удаленной от J.*

---

* См. подстрочное примечание на стр. 142. *Прим. перев.*

2. Для P_1 и P_2 имеет место 2-й случай из § 2. Тогда мы снова можем выбрать ε'', удовлетворяющее соответствующим условиям и для P_1, и для P_2, и можем согласно § 2 определить соответствующий квадрат Q и вид q-квадратов τ. Затем как P_1, так и P_2 можно соединить с границей Q ломаной линией, вполне удаленной от J, так что P_1 и P_2 *также и в этом случае можно соединить друг с другом конечной ломаной линией, вполне удаленной от* J.

3. Для одного из точечных генераторов P_1 и P_2 имеет место 1-й случай, а для другого — 2-й случай из § 2. *Тогда невозможно, чтобы существовала ломаная, вполне удаленная от* J, *соединяющая* P_1 *и* P_2, так как с одной стороны все точечные генераторы, принадлежащие такой ломаной, должны были бы иметь одинаковые порядки относительно J, а с другой стороны точечные генераторы P_1 и P_2 должны были бы иметь относительно J различные порядки.

Точечные генераторы, вполне удаленные от J, для которых имеет место 1-й (или 2-й) случай из § 2, мы будем называть *позитивно-внутренними* (соответственно, *позитивно-внешними*) точечными генераторами относительно J.

§ 4. Позитивно-внешние точечные генераторы относительно J могут быть непосредственно заданы разнообразными способами. Позитивно-внутренний точечный генератор относительно J мы можем построить следующим образом.

Пусть ε выбрано в соответствии с требованиями, указанными в § 1, и пусть ε'' есть величина, удовлетворяющая соотношению $\frac{1}{32}\varepsilon > \varepsilon'' > 0$. Пусть ε' выбрано в связи с ε'' таким образом, что выполнено соотношение между ε' и ε'', указанное в первом абзаце § 2. Пусть Q есть квадрат, такой, что кривая J содержится внутри его и отстоит от его границы на расстояние $> \varepsilon''$. Для Q и ε' мы строим соответствующий вид q-квадратов τ так, как это было указано во втором абзаце § 2. Пусть β_1 есть максимальная область, вся покрытая квадратами τ и соприкасающаяся с границей Q. Эта область β_1 определяет внутри Q единственную дополнительную область K, которая содержит J и обладает связной границей. *Предположим на момент, что каждый квадрат, состоящий из q-квадратов и содержащийся в некоторой области, принадлежащей как* K, *так и* τ, *имеет сторону, меньшую* $\frac{1}{16}\varepsilon$.

Тогда каждый точечный генератор из K удален от J на расстояние $< \frac{3}{8}\varepsilon' + \frac{1}{8}\varepsilon$. Отсюда мы выводим, что каноническая ε'-цепь $\varkappa^0$, определенная в первом абзаце § 2, может быть преобразована в вырожденную цепь, состоящую лишь из одного точечного генератора кривой J посредством конечной последовательности сначала ε''-сдвигов, а затем $\left(\frac{3}{4}\varepsilon' + \frac{1}{4}\varepsilon\right)$-сдвигов — следовательно, при помощи конечной последовательности $\frac{1}{2}\varepsilon$-сдвигов*. Это, однако, противоречит свойству, сформулированному в конце § 1. Таким образом, имеется максимальная область β, вся покрытая квадратами из τ, не соприкасающаяся с границей Q и содержащая по крайней мере один квадрат g, состоящий из q-квадратов и имеющий сторону $> \frac{1}{16}\varepsilon - \frac{1}{4}\varepsilon'$.

Точечный генератор P, принадлежащий центральной точке квадрата g, удовлетворяет соотношению $\rho(P, J) > \frac{1}{32}\varepsilon$, так что для совокупности объектов P, ε'' и ε' этого § выполняются те же соотношения, которые были установлены в § 2 для рассмотренной там совокупности объектов P, ε'' и ε'. На основе первых трех абзацев § 2 мы можем заключить, что β *совпадает с максимальной областью* β', *содержащей* P *и покрытой целиком квадратами из* τ, *причем для нее имеет место первый из двух описанных там случаев,* так что P есть позитивно-внутренний точечный генератор относительно J.

§ 5. Под ***непрерывной дугой*** мы будем понимать точечный вид, который является однозначным, и, разумеется, равномерно непрерывным образом единичного отрезка оси X (рассматриваемого как точечный вид).

Под *жордановой дугой* F мы понимаем непрерывную дугу, которая, будучи рассматриваема как отображение единичного отрезка оси X, обладает непрерывным (разумеется, однозначным и равномерно непрерывным) обратным отображением.

Пусть P — точечный генератор, вполне удаленный от F. Выберем ε'' таким образом, чтобы было $\rho(P, F) > \varepsilon'' > 0$. Пусть ε' есть величина, меньшая $\frac{1}{2}\varepsilon''$ и такая, что для любых двух точек A и B дуги F, отстоящих друг от друга на расстояние $< \varepsilon''$, диаметр дуги AB из F меньше ε''. Тогда любая ε'-цепь** дуги F может быть „свёрнута", т. е. преобразована в „вырожденную цепь", состоящую из одной точки, посредством конечной последовательности ε''-сдвигов на F.

Пусть Q есть квадрат, такой что дуга F содержится внутри его и отстоит от его границы на расстояние $> \varepsilon''$. Таким же образом, как в § 2, мы строим в квадрате Q q-квадраты и образуем вид τ q-квадратов, который внутри Q обладает единственной дополнительной областью и содержит все q-квадраты, отстоящие от F на расстояние $> \frac{1}{4}\varepsilon'$, причем все q-квадраты, принадлежащие τ, отстоят от F на

---

* Ср. подстрочное примечание на стр. 142.

** Здесь понятие ε'-цепи, по-видимому, такое же, как для замкнутых кривых, в частности, требуется, чтобы $\rho(Z_n, Z_1) < \varepsilon'$. *Прим. перев.*

10—41

расстояние $> \frac{1}{8} \varepsilon'$. Пусть β^0 есть максимальная область, содержащая P и вся покрытая квадратами из τ. Примем на момент, что граница Q не содержится в границе β^0, и в этом предположении проведем рассмотрения, аналогичные тем, которые были проведены в § 2. Тогда мы сможем построить ε'-цепь x'', лежащую на F, относительно которой P обладает порядком 1. Однако если мы посредством конечного числа ε''-сдвигов на F преобразуем эту цепь в вырожденную цепь x, состоящую из одной точки, то тогда порядок P относительно x должен быть равен одновременно 0 и 1. Из этого противоречия мы получаем, что *граница Q должна обязательно содержаться в границе β^0*, и отсюда, далее, методом § 3 следует, что *любые два точечных генератора, вполне удаленные от F, могут быть соединены ломаной, вполне удаленной от F.*

Если мы теперь возвратимся к рассмотрению жордановой кривой J, то из предыдущего абзаца будет следовать, что для произвольно малой дуги β кривой J оказывается, что два любых точечных генератора, один из которых позитивно-внешний, а другой — позитивно-внутренний относительно J, можно соединить конечной ломаной линией, вполне удаленной от дуги, дополнительной к β относительно J. Отсюда посредством нетрудных рассуждений следует, далее, что для любой точки A кривой J можно построить как последовательность позитивно-внутренних, так и последовательность позитивно-внешних точечных генераторов, позитивно сходящуюся к A, т. е. что *каждая точка, принадлежащая J, является предельной точкой как для позитивно-внешних, так и для позитивно-внутренних точек относительно J.*

Пусть G_1 есть вид позитивно-внутренних точечных генераторов, а G_2 есть вид позитивно-внешних точечных генераторов относительно J. Тогда никакая точка, предельная для G_1, не может принадлежать G_2, и никакая точка, предельная для G_2, не может принадлежать G_1. Пусть γ_1 есть *граница* G_1, т. е. вид точек, являющихся предельными для G_1, но не принадлежащих G_1, и пусть γ_2 есть *граница* G_2, т. е. вид точек, являющихся предельными для G_2, но не принадлежащих G_2. Из результатов предыдущего абзаца вытекает, что всякая точка кривой J принадлежит как γ_1, так и γ_2. С другой стороны, из высказывания, приведенного в начале настоящего абзаца, вытекает, что каждая точка из γ_1, и каждая точка из γ_2 должны находиться на нулевом расстоянии от кривой J и, следовательно, должны принадлежать кривой J.

Таким образом, как граница вида позитивно-внутренних точек относительно J, так и граница вида позитивно-внешних точек относительно J совпадает с J.