М. А. ХАЧАТРЯН

О КОНСТРУКТИВНЫХ ЧИСЛОВЫХ РЯДАХ

В настоящей статье исследуются некоторые критерии сходимости конструктивных числовых рядов, а также вопросы, связанные с перестановкой членов конструктивных рядов. В частности, рассматриваются конструктивные аналоги признака Куммера и связанных с ним признаков сходимости рядов, а также конструктивный аналог теоремы Римана о перестановке членов неабсолютно сходящегося ряда. Оказывается, что в конструктивном анализе справедливы теоремы, формулировки которых получаются из формулировок указанных теорем Куммера и Римана посредством замены условия расходимости ряда условием конструктивной расходимости ряда к бесконечности (см. теоремы 2, 4, 5). С другой стороны, без такой замены утверждения указанных теорем в их буквальных формулировках оказываются неверными в конструктивном анализе (теоремы 3 и 6). В статье устанавливаются также некоторые теоремы о перестановках членов сходящихся рядов, для которых ряды, составленные из модулей членов, расходятся (не обязательно к бесконечности). Так, например, оказывается, что если при некоторой перестановке членов ряда мы получаем сходимость к сумме, отличной от первоначальной, то ряд, составленный из модулей членов такого ряда, конструктивно расходится к бесконечности (теорема 6). С другой стороны, приводится пример ряда, у которого ряд, составленный из модулей членов, не расходится к бесконечности, но все же при некоторой перестановке членов этого ряда мы получаем расходящийся ряд (теорема 7).

Теория рекурсивных рядов, аналогичная теории конструктивных рядов, рассмотрена в книге Р. Л. Гудстейна [1]. В частности, в указанной книге рассмотрен один из рекурсивных вариантов признака Куммера. Конструктивный аналог признака Куммера, рассмотренный в настоящей статье, отличается от варианта, приводимого Р. Л. Гудстейном (см. подстрочное примечание на стр. 11); в частности, из конструктивной формы признака Куммера, приводимой в настоящей статье, непосредственно следуют конструктивные варианты признаков Даламбера и Раабе, в то время как из формы этого признака, имеющейся в книге Р. Л. Гудстейна, указанные признаки не могут быть непосредственно выведены. Р. Л. Гудстейн в своей книге приводит отдельные доказательства этих признаков.

Теорема 1 настоящей статьи и ее следствия приведены для удобства ссылок; этот материал, разумеется, не претендует на новизну.

Конструктивные объекты, рассматриваемые в дальнейшем, являются словами в алфавите $\{0, 1, -, /, \lozenge, \Sigma\}$. Все рассматриваемые алгорифмы являются нормальными алгорифмами [2] над этим алфавитом. Для обозначения типов алгорифмов, записей алгорифмов, результатов применения алгорифмов, а также для обозначения натуральных и рациональных чисел, FR-чисел и соответствующих переменных будет употребляться символика, примененная в [3] и [4]. В дальнейшем через $\{A\}$, где A — некоторый алгорифм, будет обозначаться запись алгорифма относительно алфавита $\{0, 1, -, /, \lozenge, \Sigma\}$ ([4], стр. 298).

Всякое слово вида $\Sigma\{A\}$, где A — алгорифм типа (н → д), будем называть ***конструктивным рядом*** или просто ***рядом***; при этом будем говорить, что алгорифм A ***представляет*** ряд $\Sigma\{A\}$.

Пусть n — произвольное натуральное число; будем говорить, что FR-число Q является ***n-м членом ряда*** $\Sigma\{A\}$, если Q есть A_n (напомним, что обозначения A_n и $A(n)$ имеют один и тот же смысл).

Понятие ***n-й — частной суммы*** ряда $\Sigma\{A\}$, где n — натуральное число, определяется следующими порождающими правилами: 1) нулевая частная сумма ряда $\Sigma\{A\}$ есть A_0; 2) $(n+1)$-я частная сумма ряда $\Sigma\{A\}$ есть $D \underset{B}{+} A_{n+1}$, где D есть n-я частная сумма ряда $\Sigma\{A\}$.

Очевидно, что для всякого алгорифма A типа (н → д) осуществим алгорифм B типа (н → д), перерабатывающий всякое натуральное число n в n-ю частную сумму ряда $\Sigma\{A\}$. Зафиксируем некоторый определенный способ построения такого алгорифма B, исходя из алгорифма A (например, с помощью теоремы повторения [2]). Алгорифм B, обладающий указанным свойством, построенный фиксированным способом, исходя из алгорифма A типа (н → д) будем называть ***алгорифмом частных сумм*** ряда $\Sigma\{A\}$ и обозначать через A^{Σ}.

Будем говорить, что ряд $\Sigma\{A\}$ ***конструктивно сходится*** (или просто ***сходится***), если алгорифм A^{Σ} является конструктивно сходящейся последовательностью FR-чисел.

Будем говорить, что FR-число x является ***суммой*** ряда $\Sigma\{A\}$, если x является пределом последовательности A^{Σ}.

Очевидно, что ряд $\Sigma\{A\}$ является сходящимся в том и только в том случае, если осуществимо FR-число, являющееся суммой ряда $\Sigma\{A\}$. Сумму ряда $\Sigma\{A\}$, относительно которого утверждается или предполагается его сходимость, мы будем обозначать через $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n$. Если ряд $\Sigma\{A\}$ не является конструктивно сходящимся, то будем говорить, что ряд $\Sigma\{A\}$ является *конструктивно расходящимся* (или просто *расходящимся*).

Очевидно, что для всякого алгорифма A типа (н $\rightarrow$ д) осуществим алгорифм B типа (н $\rightarrow$ д) такой, что при любом натуральном n

$$B_n = |A_n|.$$

Зафиксируем какой-либо способ построения указанного алгорифма B исходя из алгорифма A (например, с помощью теоремы композиции [2]). Ряд $\Sigma\{B\}$, где B—алгорифм, обладающий указанным свойством и построенный фиксированным способом исходя из алгорифма A типа (н $\rightarrow$ д), будем называть *модуль-рядом* для ряда $\Sigma\{A\}$ и обозначать через $\Sigma\{|A|\}$.

Будем говорить, что ряд $\Sigma\{A\}$ является *абсолютно сходящимся* (или, что ряд *абсолютно сходится*), если ряд $\Sigma\{|A|\}$ сходится.

Будем говорить, что ряд $\Sigma\{A\}$ является *неотрицательным*, если $A_n \geqslant 0$ при любом n; будем говорить, что ряд $\Sigma\{A\}$ является *положительным*, если $A_n > 0$ при любом n.

Будем говорить, что ряд $\Sigma\{A\}$ является *ограниченным*, если осуществимо FR-число x, такое, что модуль любой частной суммы A_n^{Σ} ряда $\Sigma\{A\}$ не превосходит x.

Будем говорить, что ряд $\Sigma\{A\}$ *расходится к бесконечности*, если

$$\forall x \exists n \forall m \left(m > n \supset \sum_{i=0}^{m} A_i > x\right).$$

Будем говорить, что ряд $\Sigma\{A\}$ является *шпекеровым* ([5], см. также [6], стр. 462), если ряд $\Sigma\{A\}$ является одновременно ограниченным неотрицательным и расходящимся.

Очевидно, что для всякого алгорифма A типа (н $\rightarrow$ д) и для всякого натурального числа k осуществим алгорифм B, такой, что при любом натуральном n

$$B_n = A_{n+k}.$$

Зафиксируем какой-либо способ построения указанного алгорифма B исходя из алгорифма A типа (н $\rightarrow$ д) и натурального числа k. Ряд $\Sigma\{B\}$, где B—алгорифм, построенный указанным образом, исходя из алгорифма A типа (н $\rightarrow$ д) и натурального числа k, будем называть *k-остатком* ряда $\Sigma\{A\}$.

Будем говорить, что ряд $\Sigma\{B\}$ является *остатком* ряда $\Sigma\{A\}$, если $\Sigma\{B\}$ является k-остатком ряда $\Sigma\{A\}$ при некотором натуральном k.

Будем говорить, что алгорифм D типа (н $\rightarrow$ н) является *натуральной перестановкой*, если

$$\forall l \exists n (D(n) = l),$$

$$\forall k \forall l ((k \neq l) \supset D(k) \neq D(l)).$$

Очевидно, что для всякого алгорифма A типа (н → д) и для всякой натуральной перестановки D осуществим алгорифм B типа (н → д), такой, что при любом натуральном n

$$B(n) = A(D(n)).$$

Зафиксируем какой-либо способ построения указанного алгорифма B, исходя из алгорифма A типа (н → д) и натуральной перестановки D. *Образом* ряда $\Sigma\{A\}$ относительно-натуральной перестановки D будем называть ряд $\Sigma\{B\}$, где алгорифм B есть алгорифм, построенный указанным способом, исходя из алгорифма A и натуральной перестановки D.

Следующая теорема является переформулировкой известной теоремы о конструктивной сходимости конструктивно сходящейся в себе последовательности.

Теорема 1. *Для того, чтобы ряд $\Sigma\{A\}$ был сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы был осуществим алгорифм τ_1 типа* (н → н), *такой, что при любых натуральных m, n, k, если $n > \tau_1(m)$, то*

$$\left| \sum_{i=1}^{k} A_{n+i} \right| < 2^{-m}.$$

Приводимые ниже следствия теоремы 1 доказываются вполне аналогично тому, как это делается в книге Р. Л. Гудстейна [1].

Следствие 1. Каковы бы ни были два неотрицательных ряда $\Sigma\{A\}$ и $\Sigma\{B\}$, если осуществимо натуральное число N, такое, что $A_n < B_n$ при любом натуральном $n > N$, то из сходимости ряда $\Sigma\{B\}$ вытекает сходимость ряда $\Sigma\{A\}$ (и, тем самым, из расходимости ряда $\Sigma\{A\}$ вытекает расходимость ряда $\Sigma\{B\}$).

Следствие 2. Каковы бы ни были два положительных ряда $\Sigma\{A\}$ и $\Sigma\{B\}$, если осуществимо натуральное число N такое, что для любого натурального $n > N$, оказывается:

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} < \frac{B_{n+1}}{B_n},$$

то из сходимости ряда $\Sigma\{B\}$ вытекает сходимость ряда $\Sigma\{A\}$ (и, тем самым, из расходимости ряда $\Sigma\{A\}$ вытекает расходимость ряда $\Sigma\{B\}$).

Следствие 3. Всякий остаток сходящегося ряда сходится.

Следствие 4. Если некоторый остаток ряда $\Sigma\{A\}$ сходится, то ряд $\Sigma\{A\}$ сходится.

Следствие 5. Если ряд $\Sigma\{A\}$ сходится, то последовательность A конструктивно стремится к нулю.

Следствие 6. Каковы бы ни были ряды $\Sigma\{A\}$, $\Sigma\{B\}$ и FR-число x, если при любом натуральном n

$$B_n = x \cdot A_n$$

и ряд $\Sigma\{A\}$ сходится, то ряд $\Sigma\{B\}$ также сходится.

Следствие 7. Каковы бы ни были ряды $\Sigma\{A\}$, $\Sigma\{B\}$, $\Sigma\{C\}$, если при любом натуральном n

$$A_n + B_n = C_n$$

и ряды $\Sigma\{A\}$ и $\Sigma\{B\}$ сходятся, то ряд $\Sigma\{C\}$ также сходится.

Следствие 8. Всякий абсолютно сходящийся ряд сходится.

Следствие 9. Образ любого абсолютно сходящегося ряда относительно любой натуральной перестановки абсолютно сходится.

Следствие 10 (конструктивный аналог теоремы Лейбница). Каков бы ни был ряд $\Sigma\{A\}$, если при любом натуральном n

$$A_n \cdot A_{n+1} < 0,$$
$$|A_{n+1}| < |A_n|$$

и если последовательность A конструктивно стремится к нулю, то ряд $\Sigma\{A\}$ сходится, и при любом натуральном m

$$\sum_{l=0}^{m} A_l < \sum_{l=0}^{\infty} A_l < \sum_{l=0}^{m+1} A_l$$

или

$$\sum_{l=0}^{m+1} A_l < \sum_{l=0}^{\infty} A_l < \sum_{l=0}^{m} A_l.$$

Теорема 2. *Каков бы ни был положительный ряд $\Sigma\{\mathbf{A}\}$, если осуществимы последовательность FR-чисел $\mathbf{B}$ положительное FR-число δ и натуральное число N, такие, что*

$$1.\ \forall n\,(\mathbf{B}_n > 0).$$

$$2.\ \forall n\left(n \geqslant N \supset \mathbf{B}_n \cdot \frac{\mathbf{A}_n}{\mathbf{A}_{n+1}} - \mathbf{B}_{n+1} \geqslant \delta\right),$$

$$3.\ \forall x \exists n\left(\sum_{l=0}^{n} \frac{1}{\mathbf{B}_l} > x\right),$$

то ряд $\Sigma\{\mathbf{A}\}$ сходится.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{B}$, δ, N и ряд $\Sigma\{\mathbf{A}\}$ удовлетворяют условиям, указанным в формулировке теоремы. Докажем, что ряд $\Sigma\{\mathbf{A}\}$ сходится.

---

* В книге Р. Л. Гудстейна [1] вместо условия 3 употребляется условие $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{A}_n \mathbf{B}_n = 0$, которое мы получим по ходу доказательства теоремы (см. утверждение (4) доказательства). Таким образом, у Р. Л. Гудстейна условие, накладываемое на последовательность $\mathbf{B}$, зависит от последовательности $\mathbf{A}$, в то время как в нашем рассмотрении условие 3 не зависит от последовательности $\mathbf{A}$.

Для этого достаточно доказать сходимость ряда $\Sigma\{\mathbf{A}\}$ в случае, когда $N=0$. В самом деле, если $N>0$, то, как легко видеть, условия теоремы 2 будут выполнены для объектов $\mathbf{B}^*$, δ, 0 и для ряда $\Sigma\{\mathbf{A}^*\}$, где последовательность $\mathbf{B}^*$ и ряд $\Sigma\{\mathbf{A}^*\}$ таковы, что

$$\forall n\,(\mathbf{B}(n+N)=\mathbf{B}^*(n)),$$

$$\forall n\,(\mathbf{A}(n+N)=\mathbf{A}^*(n)).$$

Но тогда, если требуемое утверждение доказано для случая $N=0$, мы сможем заключить, что ряд $\Sigma\{\mathbf{A}^*\}$ сходится, а тогда, согласно следствию 3 из теоремы 1, ряд $\Sigma\{\mathbf{A}\}$ также сходится. Итак, предполагаем, что $N=0$.

Докажем сначала, что осуществима верхняя граница для всех частных сумм ряда $\Sigma\{\mathbf{A}\}$. А именно, докажем, что

$$\forall m\left(\sum_{i=0}^{m}\mathbf{A}_i<L\right), \qquad \text{где} \quad L=\frac{\mathbf{B}_0\mathbf{A}_0}{\delta}+\mathbf{A}_0.$$

При $m=0$ это очевидно. Пусть $m>0$. Так как по предположению $N=0$, то, согласно 2-му условию теоремы, для любого n имеем

$$\mathbf{B}_n\frac{\mathbf{A}_n}{\mathbf{A}_{n+1}}-\mathbf{B}_{n+1}>\delta. \tag{1}$$

Преобразуем условие (1) следующим образом:

$$\mathbf{B}_n\mathbf{A}_n-\mathbf{B}_{n+1}\mathbf{A}_{n+1}>\delta\mathbf{A}_{n+1}. \tag{2}$$

Напишем неравенство (2) для $n=0, 1, 2, \cdots, m-1$:

$$\mathbf{B}_0\mathbf{A}_0-\mathbf{B}_1\mathbf{A}_1>\delta\mathbf{A}_1,$$

$$\mathbf{B}_1\mathbf{A}_1-\mathbf{B}_2\mathbf{A}_2>\delta\mathbf{A}_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathbf{B}_{m-1}\mathbf{A}_{m-1}-\mathbf{B}_m\mathbf{A}_m>\delta\mathbf{A}_m;$$

складывая эти неравенства почленно, получим

$$\mathbf{B}_0\mathbf{A}_0-\mathbf{B}_m\mathbf{A}_m>\delta(\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2+\cdots+\mathbf{A}_m),$$

откуда

$$\sum_{i=0}^{m}\mathbf{A}_i<\frac{\mathbf{B}_0\mathbf{A}_0-\mathbf{B}_m\mathbf{A}_m}{\delta}<\frac{\mathbf{B}_0\mathbf{A}_0}{\delta} \quad (\text{т. к. } \mathbf{B}_m\mathbf{A}_m>0),$$

$$\sum_{i=0}^{m}\mathbf{A}_i=\sum_{i=1}^{m}\mathbf{A}_i+\mathbf{A}_0<\frac{\mathbf{B}_0\mathbf{A}_0}{\delta}+\mathbf{A}_0=L,$$

таким образом,

$$\sum_{i=0}^{m}\mathbf{A}_i<L. \tag{3}$$

Докажем, далее, что последовательность чисел $\mathbf{B}_n\mathbf{A}_n$ конструктивно сходится к нулю, иначе говоря, что

$$\forall n \exists m \forall k (k > m \supset |\mathbf{B}_k \mathbf{A}_k| < 2^{-n}). \quad (4)$$

Согласно (2), последовательность чисел $\mathbf{B}_k\mathbf{A}_k$ монотонно убывает, кроме того, $\forall m (\mathbf{B}_m \mathbf{A}_m > 0)$. Поэтому достаточно показать, что

$$\forall n \exists m (\mathbf{B}_m \mathbf{A}_m < 2^{-n}).$$

Пусть n — любое натуральное число. Согласно 3-му условию теоремы, осуществимо натуральное число m, такое, что

$$\sum_{l=0}^{m} \frac{1}{\mathbf{B}_l} > L \cdot 2^n.$$

Пусть m_0 такое число. Тогда, с одной стороны, имеем

$$\sum_{l=0}^{m_0} \frac{1}{\mathbf{B}_l} > L \cdot 2^n, \quad (5)$$

а с другой стороны, ввиду монотонного убывания последовательности чисел $\mathbf{B}_k\mathbf{A}_k$, имеем

$$\sum_{l=0}^{m_0} \frac{1}{\mathbf{B}_l} = \sum_{l=0}^{m_0} \frac{\mathbf{A}_l}{\mathbf{A}_l \mathbf{B}_l} < \frac{1}{\mathbf{A}_{m_0} \mathbf{B}_{m_0}} \sum_{l=0}^{m_0} \mathbf{A}_l < \frac{L}{\mathbf{A}_{m_0} \mathbf{B}_{m_0}}. \quad (6)$$

Теперь из (5) и (6) имеем

$$\frac{L}{\mathbf{A}_{m_0} \mathbf{B}_{m_0}} > L \cdot 2^n,$$

следовательно,

$$\mathbf{A}_{m_0} \mathbf{B}_{m_0} < 2^{-n}$$

и утверждение (4) доказано.

Теперь сходимость ряда $\Sigma\{\mathbf{A}\}$ доказывается так же, как в работе Р. Л. Гудстейна ([1], стр. 14—15). А именно, достаточно доказать, что для ряда $\Sigma\{\mathbf{A}\}$ выполнено необходимое и достаточное условие сходимости, указанное в теореме 1, иначе говоря,

$$\forall l \exists m \forall_{k,j} \left(k > m \supset \left|\sum_{l=0}^{j} \mathbf{A}_{k+l}\right| < 2^{-l}\right). \quad (7)$$

В самом деле, пусть k — любое натуральное число больше нуля и j — любое натуральное число. Напишем (2) для случаев $n = k-1$, k, $k+1, \cdots, k+j-1$ и сложим полученные неравенства.
Тогда будем иметь:

$$\mathbf{B}_{k-1} \mathbf{A}_{k-1} - \mathbf{B}_{k+j} \mathbf{A}_{k+j} \geqslant \delta (\mathbf{A}_k + \mathbf{A}_{k+1} + \cdots + \mathbf{A}_{k+j}),$$

откуда

$$\sum_{l=0}^{j} \mathbf{A}_{k+l} \leqslant \frac{\mathbf{B}_{k-1} \mathbf{A}_{k-1} - \mathbf{B}_{k+j} \mathbf{A}_{k+j}}{\delta} < \frac{\mathbf{B}_{k-1} \mathbf{A}_{k-1}}{\delta}. \quad (8)$$

Мы доказали ранее, что последовательность чисел $\mathbf{B}_k\mathbf{A}_k$ конструктивно сходится к нулю. Из этого следует, что

$$\forall l \exists m \forall k (k > m \supset \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{A}_{k-1} < \delta \cdot 2^{-l}). \tag{9}$$

Используя тот факт, что $\forall m (\mathbf{A}_m > 0)$, из (9) и (8) получим (7) Теорема доказана.

Заметим, что в теореме 2 требование расходимости ряда к бесконечности нельзя заменить требованием расходимости этого ряда. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Осуществимы положительный ряд* $\Sigma\{\mathbf{A}\}$, *последовательность FR-чисел* $\mathbf{B}$, *положительное FR-число* δ *и натуральное число* N, *такое, что*

$$1.\ \forall n (\mathbf{B}_n > 0),$$

$$2.\ \forall n \left(n > N \supset \mathbf{B}_n \cdot \frac{\mathbf{A}_n}{\mathbf{A}_{n+1}} - \mathbf{B}_{n+1} > \delta\right),$$

$$3.\ \text{ряд } \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\mathbf{B}_i} \text{ расходится},$$

и вместе с тем, ряд $\Sigma\{\mathbf{A}\}$ *расходится.*

Требуемый пример строится в точности так же, как в книге Р. Л. Гудстейна (см. [1], стр. 15). А именно, пусть $\Sigma\{\mathbf{A}\}$—шпекеровский ряд, все частные суммы которого ограничены числом 1, и $\forall n (\mathbf{A}_n > 0)$. Тогда легко показать, что ряд $\Sigma\{\mathbf{A}\}$, последовательность $\mathbf{B}$, число δ, равное 1, и число N, равное нулю, где $\mathbf{B}$ последовательность чисел $\dfrac{1 - \mathbf{A}_n^2}{\mathbf{A}_n}$, удовлетворяют условиям теоремы.

Теорема 4. *Каков бы ни был положительный ряд* $\Sigma\{\mathbf{A}\}$, *если осуществимы вещественная последовательность* $\mathbf{B}$, *положительное число* δ, *и натуральное число* N, *такие, что*

$$1.\ \forall n (\mathbf{B}_n > 0),$$

$$2.\ \forall n \left(n > N \supset \mathbf{B}_n \frac{\mathbf{A}_n}{\mathbf{A}_{n+1}} - \mathbf{B}_{n+1} < 0\right),$$

и ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \dfrac{1}{\mathbf{B}_i}$ *расходится, то ряд* $\Sigma\{\mathbf{A}\}$ *тоже расходится.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{B}$, δ, N и ряд $\Sigma\{\mathbf{A}\}$ удовлетворяют условиям, указанным в формулировке теоремы. Тогда для любого натурального $n \geqslant N$ имеет место

$$\mathbf{B}_n \frac{\mathbf{A}_n}{\mathbf{A}_{n+1}} - \mathbf{B}_{n+1} < 0,$$

откуда получим

$$\frac{\frac{1}{\mathbf{B}_{n+1}}}{\frac{1}{\mathbf{B}_n}} \leqslant \frac{\mathbf{A}_{n+1}}{\mathbf{A}_n}$$

для всех $n \geqslant N$.

Теперь из следствия 2 теоремы 1 и из расходимости ряда немедленно вытекает, что ряд $\Sigma\{\mathbf{A}\}$ расходится. Теорема доказана.

Используя теоремы 2 и 4, получим конструктивный аналог признака Куммера о сходимости конструктивных рядов.

Если для заданного положительного ряда $\Sigma\{\mathbf{A}\}$ *осуществимы последовательность FR-чисел* **B**, *положительное число* δ *и натуральное число* N, *такие, что*

1. $\forall n (\mathbf{B}_n > 0)$,

2. *ряд* $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{\mathbf{B}_l}$ *расходится к бесконечности.*

3. $\forall n \left(n \geqslant N \supset \mathbf{B}_n \frac{\mathbf{A}_n}{\mathbf{A}_{n+1}} - \mathbf{B}_{n+1} \geqslant \delta \right)$,

то ряд $\Sigma\{\mathbf{A}\}$ *сходится.*

Если же осуществимы последовательность FR-чисел **B** *и натуральное число* N, *такие, что*

1. $\mathrm{A}n (\mathbf{B}_n' > 0)$,

2. *ряд* $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{\mathbf{B}_l}$ *расходится,*

3. $\forall n \left(n \geqslant N \supset \mathbf{B}_n \frac{\mathbf{A}_n}{\mathbf{A}_{n+1}} - \mathbf{B}_{n+1} \leqslant 0 \right)$,

то ряд $\Sigma\{\mathbf{A}\}$ *расходится.*

Отсюда, в частности, полагая $\forall n (\mathbf{B}_n = 1)$, $\forall n (\mathbf{B}_n = n)$ и $\forall n (\mathbf{B}_n = n \ln n)$, получим конструктивные аналоги признаков Даламбера, Раабе и Бертрана соответственно.

Из числа элементарных признаков сходимости отметим еще

Признак Коши. *Каков бы ни был положительный ряд* $\Sigma\{\mathbf{A}\}$, *если осуществимы натуральное число* N *и FR-число* q, *меньшее единицы, такие, что*

$$\forall n (n \geqslant N \supset \sqrt[n]{\mathbf{A}_n} \leqslant q),$$

то ряд $\Sigma\{\mathbf{A}\}$ *сходится.*

Если же осуществимо натуральное число N, *такое, что*

$$\forall n (n \geqslant N \supset \sqrt[n]{\mathbf{A}_n} \geqslant 1),$$

то ряд расходится.

Доказательство легко получаем из следствия 1 теоремы 1 и из того, что ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{q^i}$ сходится при $q<1$, а ряд $\sum_{i=0}^{\infty} 1$ расходится.

Теорема 5. *Каков бы ни был ряд* $\Sigma\{\mathbf{A}\}$, *если ряд* $\Sigma\{\mathbf{A}\}$ *сходится, а ряд* $\Sigma\{|\mathbf{A}|\}$ *расходится к бесконечности, то для всякого FR-числа Q осуществима такая натуральная перестановка* $\mathbf{D}$, *что образ ряда* $\Sigma\{\mathbf{A}\}$ *относительно* $\mathbf{D}$ *сходится к числу* Q.

Доказательство. Пусть ряд $\Sigma\{\mathbf{A}\}$ сходится, а ряд $\Sigma\{|\mathbf{A}$ расходится к бесконечности, и пусть Q—данное FR-число.

Вместе с рядом $\Sigma\{\mathbf{A}\}$ рассмотрим ряды $\Sigma\{\mathbf{P}\}$ и $\Sigma\{\mathbf{Q}\}$ такие, что

$$\forall i\left(\mathbf{P}_i = \frac{|\mathbf{A}_i| + \mathbf{A}_i}{2} \;\&\; \mathbf{Q}_i = \frac{|\mathbf{A}_i| - \mathbf{A}_i}{2}\right). \tag{1}$$

Очевидно, что для любого i $\mathbf{P}_i \geqslant 0$, $\mathbf{Q}_i \geqslant 0$ и если $\mathbf{A}_i > 0$, то $\mathbf{A}_i$ совпадает с $\mathbf{P}_i$; если $\mathbf{A}_i < 0$, то $\mathbf{A}_i$ совпадает с $-\mathbf{Q}_i$, а если $\mathbf{A}_i = 0$, то $\mathbf{P}_i = \mathbf{Q}_i = \mathbf{A}_i = 0$. Из (1) имеем:

$$\forall i\,(\mathbf{A}_i = \mathbf{P}_i - \mathbf{Q}_i \;\&\; |\mathbf{A}_i| = \mathbf{P}_i + \mathbf{Q}_i). \tag{2}$$

Докажем, что ряды $\Sigma\{\mathbf{P}\}$ и $\Sigma\{\mathbf{Q}\}$ не могут не расходиться к бесконечности. Действительно, из (2) имеем условие

$$\forall n\,(\mathbf{A}_n^{\Sigma} = \mathbf{P}_n^{\Sigma} - \mathbf{Q}_n^{\Sigma}). \tag{3}$$

Отсюда видно, что из ограниченности всех частных сумм одного из них вытекает ограниченность всех частных сумм другого. А если предполагать ограниченность всех частных сумм обоих рядов, то из условия

$$\forall n\,(|\mathbf{A}|_n^{\Sigma} = \mathbf{P}_n^{\Sigma} + \mathbf{Q}_n^{\Sigma}),$$

которое получается из (2), получим ограниченность всех частных сумм ряда $\Sigma\{|\mathbf{A}|\}$, вопреки тому, что ряд $\Sigma\{|\mathbf{A}|\}$ расходится к бесконечности.

Таким образом, оба ряда—$\Sigma\{\mathbf{P}\}$ и $\Sigma\{\mathbf{Q}\}$—не могут не расходиться к бесконечности.

Введем в рассмотрение алгорифм β, такой, что при любых x, y, n

$$\beta(x\square y\square n) = \begin{cases} 1 & \text{если } \underline{x}(\overline{x}(n+1)) \leqslant \underline{y}(\overline{y}(n+1)), \\ -1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что

$$\forall x\forall y\forall n\,(((\beta(x\square y\square n) = 1) \supset x \leqslant y + 2^{-n})\;\&\;((\beta(x\square y\square n) = -1) \supset$$
$$\supset (x > y - 2^{-n}))). \tag{4}$$

Построим алгорифм $\mathbf{D}$, определяемый следующим образом:

$$\mathbf{D}(Q\square 0) = 0$$

$$\mathrm{D}(Q\square n+1)=$$

$$=\begin{cases} \mu k(\forall j_{j<n}(\mathrm{D}(Q\square j)\neq k)\ \&\ \beta(\mathrm{A}(k)\square -2^{-(n+1)}\square n+1)=-1), \\ \text{если } \beta\left(\sum_{j=0}^{n}\mathrm{A}(\mathrm{D}(Q\square j))\square Q\square n+1\right)=1, \\ \mu k(\forall j_{j<n}(\mathrm{D}(Q\square j)\neq k)\ \&\ \beta(\mathrm{A}(k)\square 2^{-(n+1)}\square n+1)=1), \\ \text{если } \beta\left(\sum_{j=0}^{n}\mathrm{A}(\mathrm{D}(Q\square j))\square Q\square n+1\right)=-1 \end{cases}$$

Докажем, что при любом фиксированном FR-числе Q алгорифм $\widetilde{\mathrm{D}}_{Q\square}$ является натуральной перестановкой.

Сначала докажем, что $\widetilde{\mathrm{D}}_{Q\square}$ есть алгорифм типа (н → н). Из определения алгорифма D очевидно, что, если $!\mathrm{D}(Q\square m)$, то $\mathrm{D}(Q\square m)$ есть натуральное число, поэтому достаточно доказать, что $\forall m!\mathrm{D}(Q\square m)$. Доказательство проведем по индукции. Так как $\mathrm{D}(Q\square 0)=0$, то алгорифм $\widetilde{\mathrm{D}}_{Q\square}$ применим к нулю. Предположим, что $\widetilde{\mathrm{D}}_{Q\square}$ применим к любому натуральному числу $n\leqslant m$, докажем, что $!\mathrm{D}(Q\square m+1)$. Предположим, что $\urcorner !\mathrm{D}(Q\square m+1)$. Возможны два случая: или

$$\beta\left(\sum_{j=0}^{m}\mathrm{A}(\mathrm{D}(Q\square j))\square Q\square m+1\right)=1,$$

или

$$\beta\left(\sum_{j=0}^{m}\mathrm{A}(\mathrm{D}(Q\square j))\square Q\square m+1\right)=-1.$$

В первом случае из предположения $\urcorner !\,\mathrm{D}(Q\square m+1)$ следует, что

$$\forall k(\forall j_{j<n}(\mathrm{D}(Q\square j)\neq k)\supset\beta(\mathrm{A}(k)\square -2^{-(n+1)}\square n+1)=1),$$

но тогда

$$\forall_k(k>l\supset\beta(\mathrm{A}(k)\square -2^{-(n+1)}\square n+1)=1),$$

где $l=\max\limits_{j<n}\mathrm{D}(Q\square j)$, а это означает, согласно (4), что

$$\forall k(k>l\supset\mathrm{A}(k)<0),$$

иначе говоря

$$\forall k(k>l\supset\mathrm{P}(k)=0),$$

откуда следует, что ряд $\Sigma\{\mathrm{P}\}$ сходится, а это невозможно. Во втором случае аналогичным образом из предположения $\urcorner !\mathrm{D}(Q\square m)$ следует, что

$$\forall k(k>l\supset\mathrm{A}(k)>0),$$

а это означает, что

$$\forall k((k>l\supset\mathrm{Q}(k)=0),$$

2—41

откуда следует, что ряд $\Sigma|\mathbf{Q}|$ сходится, что невозможно. В обоих случаях получим противоречие. Таким образом, доказали, что

$$\urcorner\urcorner!\,\mathbf{D}\,(Q\square m+1),$$

откуда, согласно принципу А. А. Маркова [7], следует, что $!\,\mathbf{D}\,(Q\square m+1)$. Этим мы доказали, что $\forall m\,!\,\mathbf{D}\,(Q\square m)$, значит $\overline{\mathbf{D}}_{Q\square}$ есть алгорифм типа (н → н).

Из определения алгорифма $\mathbf{D}$ очевидно, что условие

$$\forall l\forall k\,(k\neq l\supset\mathbf{D}\,(Q\square k)\neq\mathbf{D}\,(Q\square l))$$

выполнено. Остается доказать, что

$$\forall l\exists n\,(\mathbf{D}\,(Q\square n)=l). \tag{5}$$

С этой целью рассмотрим алгорифм $\mathbf{C}$, определяемый следующими равенствами:

$$\mathbf{C}\,(0)=\mu n\Big(\beta\Big(\sum_{j=0}^{n}(\mathbf{A}\,(\mathbf{D}\,(Q\square j))\square Q\square n+1\Big)\times$$

$$\times\beta\Big(\sum_{j=0}^{n+1}\mathbf{A}\,(\mathbf{D}\,(Q\square j))\square Q\square n+2\Big)=-1\Big).$$

$$\mathbf{C}\,(i+1)=\mu n\,((n>\mathbf{C}\,(i))\,\&\,\beta\Big(\sum_{j=0}^{n}(\mathbf{A}\,(\mathbf{D}\,(Q\square j))\square Q\square n+1\Big)\times$$

$$\times\beta\Big(\sum_{j=0}^{n+1}\mathbf{A}\,(\mathbf{D}\,(Q\square j))\square Q\square n+2\Big)=-1).$$

Докажем, что алгорифм $\mathbf{C}$ применим к любому натуральному числу

Предположим, что i—наименьшее натуральное число, к которому алгорифм $\mathbf{C}$ не применим. Предположим сначала, что $i>0$. Тогда так как i наименьшее натуральное число, к которому $\mathbf{C}$ не применим, то $!\,\mathbf{C}\,(i-1)$ и $\urcorner\,!\,\mathbf{C}\,(i)$ может быть лишь в том случае, когда

$$\forall n\Big(n>\mathbf{C}\,(i-1)\supset\beta\Big(\sum_{j=0}^{n}\mathbf{A}\,(\mathbf{D}\,(Q\square j))\square Q\square n+1\Big)=1\Big) \tag{6}$$

или

$$\forall n\Big(n>\mathbf{C}\,(i-1)\supset\beta\Big(\sum_{j=0}^{n}\mathbf{A}\,(\mathbf{D}\,(Q\square j))\square Q\square n+1\Big)=-1\Big). \tag{7}$$

Пусть имеет место (6). Это означает, что при любом $n>\mathbf{C}\,(i-1)$

$$\mathbf{D}\,(Q\square n+1)=\mu k\,(\forall j_{j\leqslant n}\,(\mathbf{D}\,(Q\square j)\neq k)\,\&\,\beta\,(\mathbf{A}\,(k)\square-$$

$$-2^{-(n+1)}\square n+1)=-1)). \tag{8}$$

Кроме того, из (6), согласно (4), имеем:

$$\forall n \left(n > \mathrm{C}(i-1) \supset \sum_{j=0}^{n} \mathrm{A}(\mathrm{D}(Q \square j)) \leqslant Q + 1 \right). \tag{9}$$

Теперь из (8) следует, что

$$An((n > \mathrm{C}(i-1)) \supset (\beta(\mathrm{A}(\mathrm{D}(Q \square n+1)) \square - 2^{-(n+1)} \square n+1) = -1) \tag{10}$$

и

$$\forall l (\forall s (l \neq \mathrm{D}(Q \square s)) \supset \exists n (\beta(\mathrm{A}(l) \square - 2^{-n} \square n) = 1). \tag{11}$$

Согласно (4), из (10) и (11) соответственно имеем

$$\forall n (n > \mathrm{C}(i-1) \supset (\mathrm{A}(\mathrm{D}(Q \square n+1)) > -2^{-n})) \tag{12}$$

и

$$\forall l (\forall s (l \neq \mathrm{D}(Q \square s)) \supset (\mathrm{A}(l) \leqslant 0)). \tag{13}$$

Иначе говоря, верно, что

$$\forall n ((n > \mathrm{C}(i-1)) \supset (\mathrm{Q}(\mathrm{D}(Q \square n+1)) < 2^{-n})) \tag{14}$$

и

$$\forall l (\forall s (l \neq \mathrm{D}(Q \square s)) \supset (\mathrm{P}(l) = 0)). \tag{15}$$

Пусть n—любое натуральное число больше $\mathrm{C}(i-1)+1$. Используя (3) и (14), получим

$$\sum_{j=0}^{n} \mathrm{A}(\mathrm{D}(Q \square j)) = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{D}(Q \square j)) - \sum_{j=0}^{n} \mathrm{Q}(\mathrm{D}(Q \square j)) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{D}(Q \square j)) - \sum_{j=0}^{\mathrm{C}(i-1)+1} \mathrm{Q}(\mathrm{D}(Q \square j)) - \sum_{j=\mathrm{C}(i-1)+1}^{n-1} \mathrm{Q}(\mathrm{D}(Q \square j+1)) >$$

$$> \sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{D}(Q \square j)) - \left(\sum_{j=0}^{\mathrm{C}(i-1)+1} \mathrm{Q}(\mathrm{D}(Q \square j)) + 2 \right).$$

Обозначая $\sum_{j=0}^{\mathrm{C}(i-1)+1} \mathrm{Q}(\mathrm{D}(Q \square j)) + Q + 3$ через L и используя (19), получим

$$\forall n \left((n > \mathrm{C}(i-1)+1) \supset \left(\sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{D}(Q \square j)) < \mathrm{L} \right) \right).$$

Отсюда и из (15) получим

$$\forall n \left(\sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}(j) < \mathrm{L} \right).$$

Но ряд $\Sigma\{\mathrm{P}\}$ не может не расходиться к бесконечности и мы, таким образом, приходим к противоречию.

Если имеет место (7), то, поступая аналогичным образом, для

$$\mathrm{L}^* = \sum_{j=0}^{\mathrm{C}(l-1)+1} \mathrm{P}(\mathrm{D}(Q \square j)) - Q + 3$$

получим, что

$$\forall n\left(\sum_{j=0}^{n} \mathbf{Q}(j) < \mathbf{L}^*\right),$$

вопреки тому, что ряд $\Sigma\{\mathbf{Q}\}$ не может не расходиться к бесконечности. Если $i>0$ в обоих случаях пришли к противоречию, значит $\neg\neg!\mathbf{C}(i)$, и по принципу А. А. Маркова $!\mathbf{C}(i)$.

Если $i=0$, т. е. $\neg!\mathbf{C}(0)$, то

$$\forall n\left(\beta\left(\sum_{j=0}^{n} \mathbf{A}(\mathbf{D}(Q\square j))\square Q\square n+1\right)=1\right),$$

или

$$\forall n\left(\beta\left(\sum_{j=0}^{n} \mathbf{A}(\mathbf{D})\, Q\square j))\square Q\square n+1\right)=-1\right).$$

Рассуждая так же, как при $i>0$, аналогичным образом приходим к противоречию.

Таким образом, мы доказали, что $\forall i\,!\mathbf{C}(i)$.

Теперь докажем, что условие (5) выполнено.

Пусть l — любое натуральное число, тогда для любого n, если $\beta(\mathbf{A}(l)\square-2^{-n}\square n)\neq-1)$, то $\forall k(k>n\supset(\beta(\mathbf{A}(l)\square+2^{-k}\square k)=+1))$, и, если $\beta(\mathbf{A}(l)\square 2^{-n}\square n)\neq 1))$, то $\forall k(k>n\supset(\beta(\mathbf{A}(l)\square-2^{-k}\square k)=-1)$. Действительно, если $\beta(\mathbf{A}(l)\square-2^{-n}\square n)\neq-1$, то $\beta(\mathbf{A})l)\square-2^{-n}\square n)=1$, и из (4) имеем $\mathbf{A}(l)\leqslant 0$, тогда для любого k не может быть $\beta(\mathbf{A}(l)\square 2^{-k}\square k)\neq 1$, потому что в противном случае $\beta(\mathbf{A}(l)\square 2^{-k}\square k)=-1$ и из (4) имели бы, что $\mathbf{A}(l)>0$, что противоречит тому, что $\mathbf{A}(l)\leqslant 0$.

Аналогичным образом доказывается второе утверждение.

Из определения алгорифма $\mathbf{D}$ и из только что доказанного ясно, что

$$\forall l\exists n_{n<\mathbf{C}(2l)}(\mathbf{D}(Q\square n)=l), \tag{16}$$

и условие (5) выполнено.

Обозначим образ ряда $\Sigma\{\mathbf{A}\}$ относительно натуральной перестановки $\overline{\mathbf{D}}_{Q\square}$ через $\Sigma\{\mathbf{B}\}$. Докажем, что ряд $\Sigma\{\mathbf{B}\}$ сходится к FR-числу Q.

Пусть i — любое натуральное число. Тогда, согласно определению алгорифма $\mathbf{C}$, имеем

$$\beta(\mathbf{B}^{\Sigma}_{\mathbf{C}(i)}\square Q\square \mathbf{C}(i)+1)\cdot\beta(\mathbf{B}^{\Sigma}_{\mathbf{C}(i)+1}\square Q\square \mathbf{C}(i)+2)=-1.$$

Предположим сначала, что

$$\beta(\mathbf{B}^{\Sigma}_{\mathbf{C}(i)}\square Q\square \mathbf{C}(i)+1)=1 \quad\text{и}\quad \beta(\mathbf{B}^{\Sigma}_{\mathbf{C}(i)+1}\square Q\square \mathbf{C}(i)+2)=-1.$$

Согласно (4), из первого равенства имеем:

$$B^{\Sigma}_{C(i)} \leqslant Q + 2^{-(C(i)+1)},$$

или

$$B^{\Sigma}_{C(i)+1} - B_{C(i)+1} \leqslant Q + 2^{-(C(i)+1)}, \tag{17}$$

а из второго:

$$B^{\Sigma}_{C(i)+1} > Q - 2^{-(C(i)+2)}, \tag{18}$$

из (17) и (18) получим

$$|B^{\Sigma}_{C(i)+1} - Q| \leqslant |B_{C(i)+1}| + 2^{-(C(i)+1)}. \tag{19}$$

Пусть теперь n—натуральное число, такое, что $C(i)+1 < n \leqslant C(i+1)$. Тогда

$$\beta(B^{\Sigma}_{n} \square Q \square n+1) = -1 \quad \text{и} \quad \beta(B_{n+1} \square 2^{-(n+1)} \square n+1) = 1.$$

Из этого следует, что

$$B^{\Sigma}_{n} - Q > -2^{-(n+1)}. \tag{20}$$

Далее,

$$B_{n+1} \leqslant 2^{-n}. \tag{21}$$

Из (21) имеем

$$B^{\Sigma}_{n} = B^{\Sigma}_{C(i)+1} + \sum_{j=C(i)+2}^{n} B_j \leqslant B^{\Sigma}_{C(i)+1} + \sum_{j=C(i)+2}^{n} 2^{-(j-1)} < B^{\Sigma}_{C(i)+1} + 2^{-C(i)}. \tag{22}$$

Из (22) и (17) имеем

$$B^{\Sigma}_{n} - Q < B_{C(i)+1} + 2^{-(C(i)-1)}. \tag{23}$$

Так как $n > C(i)+1$, то из (20) и (23) имеем

$$|B^{\Sigma}_{n} - Q| < |B_{C(i)+1}| + 2^{-(C(i-1))}. \tag{24}$$

Теперь из (19) и (24) получаем, что

$$\forall i \forall n ((C(i) < n \leqslant C(i+1)) \supset |B^{\Sigma}_{n} - Q| < |B_{C(i)+1}| + 2^{-(C(i)-1)}. \tag{25}$$

Если

$$\beta(B^{\Sigma}_{C(i)} \square Q \square C(i)+1) = -1 \quad \text{и} \quad \beta(B^{\Sigma}_{C(i)+1} \square Q \square C(i)+2) = 1,$$

то, рассуждая аналогичным образом, получим, что и в этом случае справедливо (25).

Так как ряд $\Sigma\{A\}$ сходится, из следствия 5 теоремы 1 имеем, что

$$\forall k \exists l \forall n ((n > l) \supset |A(n)| < 2^{-k}). \tag{26}$$

Исходя из (26), (16) и из того, что $\widetilde{D}_{Q\square}$ натуральная перестановка, легко получить, что

$$\forall k \exists l \forall n ((n > l) \supset (|B_n| < 2^{-k})). \tag{27}$$

Теперь из (27) и (25) легко получаем, что

$$\forall k \exists l \forall n ((n > l) \supset |\mathbf{B}^{\Sigma}_{n} - Q| < 2^{-k}).$$

Теорема доказана.

Следующая теорема может рассматриваться как обращение, в некотором смысле, теоремы 5.

Теорема 6. *Каковы бы ни были ряд* $\Sigma\{\mathbf{A}\}$ *и натуральная перестановка* $\mathbf{D}$, *если ряд* $\Sigma\{\mathbf{A}\}$ *сходится к FR-числу* A *и образ ряда* $\Sigma\{\mathbf{A}\}$ *относительно натуральной перестановки* $\mathbf{D}$ *сходится к FR-числу* B, *отличному от* A, *то ряд* $\Sigma\{|\mathbf{A}|\}$ *расходится к бесконечности.*

Доказательство. Образ ряда $\Sigma\{\mathbf{A}\}$ относительно натуральной перестановки $\mathbf{D}$ обозначим через $\Sigma\{\mathbf{B}\}$. Пусть ряд $\Sigma\{\mathbf{A}\}$ сходится к FR-числу A, ряд $\Sigma\{\mathbf{B}\}$ — к FR-числу B и $B \neq A$. Докажем, что ряд $\Sigma\{|\mathbf{A}|\}$ расходится к бесконечности.

Найдем такое натуральное число k, что

$$|B - A| > 2^{-k}, \tag{1}$$

и найдем такое натуральное число l, что

$$\forall n, m (|\mathbf{A}^{\Sigma}_{l+n} - \mathbf{A}^{\Sigma}_{l+m}| < 2^{-k-2}) \quad \text{и} \quad \forall n, m (|\mathbf{B}^{\Sigma}_{l+n} - \mathbf{B}^{\Sigma}_{l+m}| < 2^{-k-2}). \tag{2}$$

(Это возможно, потому что ряды $\Sigma\{\mathbf{A}\}$ и $\Sigma\{\mathbf{B}\}$ сходятся). Тогда, так как ряды $\Sigma\{\mathbf{A}\}$ и $\Sigma\{\mathbf{B}\}$ сходятся к числам A и B, из (1) и (2) имеем:

$$\forall n ((n > l) \supset |\mathbf{B}^{\Sigma}_{n} - \mathbf{A}^{\Sigma}_{n}| > 2^{-k-1}). \tag{3}$$

Зафиксируем некоторое произвольное n, такое, что $n > l$. Так как $\mathbf{D}$ является натуральной перестановкой, то осуществимо такое m, что

$$\forall k ((k < n) \supset \exists i_{i < m} (\mathbf{D}(i) = k)).$$

При этом очевидно имеем: $m > n$, откуда, согласно (3),

$$2^{-k-1} < |\mathbf{B}^{\Sigma}_{m} - \mathbf{A}^{\Sigma}_{m}|.$$

С другой стороны,

$$|\mathbf{B}^{\Sigma}_{m} - \mathbf{A}^{\Sigma}_{m}| = \left|\sum_{i=0}^{m} \mathbf{B}(i) - \sum_{i=0}^{m} \mathbf{A}(i)\right| =$$

$$= \left|\sum_{\substack{i \leq m \\ \mathbf{D}(i) < n}} \mathbf{B}(i) + \sum_{\substack{i \leq m \\ \mathbf{D}(i) > n}} \mathbf{B}(i) - \sum_{i=0}^{m} \mathbf{A}(i)\right| =$$

$$= \left|\sum_{\substack{i \leq m \\ \mathbf{D}(i) > n}} \mathbf{B}(i) - \sum_{i=n}^{m} \mathbf{A}(i)\right| < \left|\sum_{\substack{i \leq m \\ \mathbf{D}(i) > n}} \mathbf{B}(i)\right| + 2^{-k-2} \leq$$

$$\leq \sum_{\substack{i \leq m \\ \mathbf{D}(i) > n}} |\mathbf{B}(i)| + 2^{-k-2} \leq \sum_{i=n}^{\max\limits_{i \leq m} \mathbf{D}(i)} |\mathbf{A}(i)| + 2^{-k-2}.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=n}^{\substack{\max D(l) \\ l<m}} |A(i)| > 2^{-k-2}.$$

Иначе говоря, мы доказали следующее утверждение:

$$\forall n \left(n > l \supset \exists m \left(\sum_{l=n}^{m} |A(i)| > 2^{-k-2} \right) \right),$$

откуда

$$\forall n \exists m \left(\sum_{l=n}^{m} |A(i)| > 2^{-k-2} \right).$$

Таким образом, ряд $\Sigma\{A\}$ расходится к бесконечности. Теорема доказана.

Мы установили, таким образом, следующие утверждения, касающиеся перестановок членов произвольного сходящегося ряда $\Sigma\{A\}$.

1. Если ряд $\Sigma\{|A|\}$ сходится, то образ ряда $\Sigma\{A\}$ относительно любой натуральной перестановки сходится к той же сумме, что и ряд $\Sigma\{A\}$.

2. Если ряд $\Sigma\{|A|\}$ расходится к бесконечности, то образ ряда $\Sigma\{A\}$ относительно натуральной перестановки D можно заставить сходиться к любому *FR*-числу посредством выбора натуральной перестановки D (и обратно, если образы ряда $\Sigma\{A\}$ относительно различных натуральных перестановок могут сходиться к различным *FR*-числам, то ряд $\Sigma\{A\}$ расходится к бесконечности).

В классическом анализе отсутствуют другие случаи, кроме сходимости ряда $\Sigma\{|A|\}$ или же расходимости ряда $\Sigma\{|A|\}$ к бесконечности. В конструктивном анализе возможен, кроме того, еще случай

3. Ряд $\Sigma\{|A|\}$ является шпекеровым.

Согласно теореме 6, мы можем утверждать, что в этом случае заведомо справедливо следующее утверждение: если образ ряда $\Sigma\{A\}$ относительно какой-либо натуральной перестановки D сходится, то он сходится к той же сумме, что и ряд $\Sigma\{A\}$. Это, однако, еще не исключает той возможности, что в рассматриваемом случае образ ряда $\Sigma\{A\}$ относительно некоторой натуральной перестановки D расходится. Как показывает нижеследующая теорема 7, образ ряда $\Sigma\{A\}$ относительно некоторой натуральной перестановки D в указанных условиях действительно может расходиться.

Теорема 7. *Осуществимы ряд* $\Sigma\{A\}$ *и натуральная перестановка* D, *такие, что ряд* $\Sigma\{A\}$ *сходится, ряд* $\Sigma\{|A|\}$ *шпекеровский и образ ряда* $\Sigma\{A\}$ *относительно натуральной перестановки* D *расходится.*

Доказательство. Построим шпекеровский ряд $\Sigma\{\mathbf{B}\}$ такой, чтобы последовательность $\mathbf{B}$ не стремилась к нулю (осуществимость ряда $\Sigma\{\mathbf{B}\}$ с указанными свойствами следует из [6], теорема 2.6).

Построим ряд $\Sigma\{\mathbf{A}\}$ и алгорифм $\mathbf{D}$, определяемые следующим образом:

$$\forall n\left(\mathbf{A}(n)=(-1)^n\frac{\mathbf{B}\left(\varphi\left(2\left[\frac{n}{2}\right]\right)\right)}{\varphi\left(2\left[\frac{n}{2}\right]\right)+1}\right);$$

$$\mathbf{D}(n)=\begin{cases}2n-\varphi(n)(\varphi(n)+1), & \text{если } n-\varphi(n)(\varphi(n)+1)\leqslant\varphi(n);\\ 2n-\varphi(n)(\varphi(n)+1)-2\varphi(n)-1, & \text{если } n-\varphi(n)(\varphi(n)+1)>\varphi(n),\end{cases}$$

где

$$\varphi(n)=\mu k\,((k+1)(k+2)>n)$$

(для ясности выпишем несколько первых членов ряда $\Sigma\{\mathbf{A}\}$

$$\mathbf{B}_0-\mathbf{B}_0+\frac{\mathbf{B}_1}{2}-\frac{\mathbf{B}_1}{2}+\frac{\mathbf{B}_1}{2}-\frac{\mathbf{B}_1}{2}+\frac{\mathbf{B}_2}{3}-\frac{\mathbf{B}_2}{3}+\frac{\mathbf{B}_2}{3}-\frac{\mathbf{B}_2}{3}+$$
$$+\frac{\mathbf{B}_2}{3}-\frac{\mathbf{B}_2}{3}+\cdots$$

и соответствующие члены образа ряда $\Sigma\{\mathbf{A}\}$ относительно натуральной перестановки $\mathbf{D}$

$$\mathbf{B}_0-\mathbf{B}_0+\frac{\mathbf{B}_1}{2}+\frac{\mathbf{B}_1}{2}-\frac{\mathbf{B}_1}{2}-\frac{\mathbf{B}_1}{2}+\frac{\mathbf{B}_2}{3}+\frac{\mathbf{B}_2}{3}+\frac{\mathbf{B}_2}{3}-\frac{\mathbf{B}_2}{3}-$$
$$-\frac{\mathbf{B}_2}{3}-\frac{\mathbf{B}_2}{3}+\cdots.$$

Нетрудно показать, что ряд $\Sigma\{\mathbf{A}\}$ и алгорифм $\mathbf{D}$, определенные указанным образом, удовлетворяют всем требуемым условиям. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Goodstein R. L.* Recursive Analysis. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1961.
2. *Марков А. А.* Теория алгорифмов. Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, XLII, 1954.
3. *Шанин Н. А.* Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства. Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, LXVII, 15—294, 1962.
4. *Цейтин Г. С.* Алгорифмические операторы в конструктивных метрических пространствах. Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, LXVII, 295—361, 1962.

5. *Specker E.* Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis. Journ. of Symb. Logic, 14, № 3, 145—158, 1949.
6. *Заславский И. Д., Цейтин Г. С.* О сингулярных покрытиях и связанных с ними свойствах конструктивных функций. Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, LXVII, 458—502, 1962.
7. *Марков А. А.* Об одном принципе конструктивной математической логики. Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда, II, 146—147, 1956.

Примечание при корректуре. Как стало известно автору, сходные вопросы интуиционистской математики рассмотрены в работе *H. T. Belinfante.* Das Riemannsche Umordnungsprinzip in der intuitionistischen Theorie der unendlichen Reihen. Compositio Math., 6, 118—123, 1938.