Р. Н. ТОНОЯН

О ФОРМАЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ ОТ СХЕМЫ АЛГОРИТМА К СХЕМЕ СЧЕТА И СХЕМЕ ПРОГРАММЫ

В работе дается определение логических схем алгоритмов и рассматриваются некоторые их эквивалентные преобразования. При помощи этих преобразований можно для данного алгоритма построить соответствующие ему схему счета и схему программы. Рассматриваются преобразования схем алгоритмов, связанные с заменами параметров и упорядоченных множеств значений параметров, в зависимости от структуры этих множеств.

А. Основные понятия и определения

0.1. Пусть $R=\{x\}$ конечное упорядоченное множество с отношением порядка $\alpha(x, y)$ (см. [7]). Назовем его упорядоченным множеством и обозначим через $T_\alpha(R)$. Пусть далее $P_R=\{\alpha\}$* есть множество всевозможных отношений порядка на R. Бинарное отношение $\leqslant$ на P_R, определенное условием $(\alpha\leqslant\beta)\rightleftarrows(\alpha\rightarrow\beta)$**, где $\alpha, \beta\in P_R$, будет порядковым отношением на P_R. Максимальными элементами этого множества являются совершенные порядковые отношения на R, а минимальными элементами — нулевые порядковые отношения $0(x, y)\rightleftarrows(x=y)$.

Порядковое отношение $\alpha_1(x, y)$; $\alpha_1(x, y)\rightleftarrows\alpha(y, x)$ назовем противоположным $\alpha(x, y)$ и обозначим $\alpha^{-1}(x, y)$, а упорядоченные множества $T_\alpha(R)$ и $T_{\alpha^{-1}}(R)$ назовем двойственными.

Пусть $\Pi_R=\{\pi\}$ множество всех совершенных порядков на R. Для произвольного $\alpha\in P_R$ рассмотрим подмножество

---

* В дальнейшем очень часто аргументы порядкового отношения будем опускать.

** Отождествляются бинарное отношение $\alpha(x, y)$ и предикат „элементы x и y находятся в отношении $\alpha(x, y)$".

$$\Pi_R(\alpha) = \{\pi;\ \alpha \leqslant \pi,\ \pi \in \Pi_R\}$$

множества Π_R. Ясно, что $\Pi_R(\alpha) \neq \varnothing$. Два элемента π_1 и π_2, принадлежащие $\Pi_R(\alpha)$, назовем α-эквивалентными и обозначим $\pi_1 \equiv \pi_2 (\alpha)$.

Определим некоторые операции над порядковыми отношениями.

Пусть даны множества $R_1 = \{x^1\}$ и $R_2 = \{x^2\}$ и отношения порядков на них $\alpha_1 \in P_{R_1}$, $\alpha_2 \in P_{R_2}$.

На множестве $R_1 \cap R_2$ определим порядковое отношение—пересечение двух порядковых отношений

$$(\alpha_1 \cap \alpha_2) \rightleftarrows (\alpha_1 \,\&\, \alpha_2).$$

На множестве $R_1 \times R_2$ определим соответственно прямое и алфавитное произведения порядков $\alpha_1(x_1', x_2')$, $\alpha_2(x_1^2, x_2^2)$:

$$(\alpha_1(x_1', x_2') \times \alpha_2(x_1^2, x_2^2)) \rightleftarrows (\alpha_1(x_1', x_2') \,\&\, \alpha_2(x_1^2, x_2^2))$$

и

$$(\alpha_1(x_1', x_2') \cdot \alpha_2(x_1^2, x_2^2)) \rightleftarrows \{\alpha_1(x_1', x_2') \,\&\, (x_1' \neq x_2')\ V \alpha_2 (x_1^2, x_2^2) \,\&\, (x_1' = x_2')\}.$$

И, наконец, на множестве $R_1 \cup R_2$ определим прямую и алфавитную сумму порядков

$$(\alpha_1(x_1, x_2) + \alpha_2(x_1, x_2)) \rightleftarrows (x_1, x_2 \in R_1 \setminus (R_1 \cap R_2)) \,\&\, \alpha_1(x_1, x_2)\ V\ (x_1, x_2 \in R_1 \cap R_2) \,\&\, (\alpha_1(x_1, x_2) \cap \alpha_2(x_1, x_2))\ V\ (x_1, x_2 \in R_2 \setminus (R_1 \cap R_2)) \,\&\, \alpha_2(x_1, x_2),$$

$$(\alpha_1(x_1, x_2) \oplus \alpha_2(x_1, x_2)) \rightleftarrows (\alpha_1(x_1, x_2) + \alpha_2(x_1, x_2))\ V\ (x_1 \in R_1 \setminus (R_1 \cap R_2)) \,\&\, (x_2 \in R_2)\ V\ (x_1 \in R_1 \cap R_2) \,\&\, (x_2 \in R_2 \setminus (R_1 \cap R_2)).$$

Пусть $R_i = \{x\}$—некоторые множества, а $\alpha_i \in P_{R_i}$, $i = 1, 2, \cdots, N$ $M < \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N >$ назовем замкнутым классом порядковых отношений на базе $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N$, если

1) для всех i, $1 \leqslant i \leqslant N$, $\alpha_i \in M$;
2) $(f \in M) \to (f^{-1} \in M)$;
3) $(f \in M) \,\&\, (g \in M) \to \{(f \square g) \in M\}$; $\square$ —любой из символов $\times$, $\cdot$, $+$, $\oplus$.

Произвольный элемент $f \in M$ является отношением порядка на некотором множестве M_f, и заданием элемента $f \in M$ множество M_f вполне определяется.

Операции $\times$, $\cdot$ и $+$, $\oplus$ ассоциативны (для суммы предполагается, что множества не пересекаются) и поэтому естественно ввести обозначения:

$$(f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_N) \rightleftarrows \prod_{i=1}^{N} f_i,$$

$$(f_1 \cdot f_2 \cdot \cdots \cdot f_N) \rightleftarrows \prod_{i=1}^{N} {}^{\circ} f_i,$$

$$(f_1 + f_2 + \cdots + f_N) \rightleftarrows \sum_{i=1}^{N} f_i.$$

$$(f_1 \ominus f_2 \ominus \cdots \ominus f_N) \rightleftarrows \sum_{i=1}^{N} {}^{\circ}f_i.$$

Через $\bar{\bar{R}}$ обозначим число элементов упорядоченного множества $T_\alpha(R)$. Определим понятия длины и ширины множества.

Высотой элемента $x - d[x]$ назовем максимум длины цепей в $T_\alpha(R)$ вида

$$\alpha(x_0, x_1) \,\&\, \alpha(x_1, x_2) \,\&\, \cdots \,\&\, \alpha(x_j, x); \; x_0 \neq x_1 \neq \cdots \neq x.$$

Длиной $d[T_\alpha(R)]$ множества $T_\alpha(R)$ назовем максимум длины цепей в множестве $T_\alpha(R)$.

Пусть $R_s = \{x\colon d[x] = s,\ x \in T_\alpha(R)\}$; $s = 1, 2, \cdots, d[T_\alpha(R)]$. Число $\max\limits_{1 \leqslant s \leqslant d[T_\alpha(R)]} \bar{\bar{R}}_s$ назовем шириной множества $T_\alpha(R)$ и обозначим $r[T_\alpha(R)]$.

Имеет место следующая

лемма 0.1. Каково бы ни было упорядоченное множество $T_\alpha(R)$, можно построить упорядоченные множества

$$T_{\alpha_1}(R_1), \quad T_{\alpha_2}(R_2), \cdots, \; T_{\alpha_N}(R_N),$$

где $(\alpha_i = 0) \vee (\alpha_i \in \Pi_{R_i})$; $1 \leqslant i \leqslant N$ и элемент $f \in M$ такие, что

a) $N \leqslant \max\{d[T_\alpha(R)],\ r[T_\alpha(R)]\} = b_R$;

b) $\bar{\bar{R}}_i \leqslant b_R$ для всех $i = 1, 2, \cdots, N$;

c) существует взаимнооднозначное соответствие $\varphi\colon M_f \to R$ такое, что φ^{-1} изотонно (см. [7]).

Заметим, что построение множеств $T_{\alpha_1}(R_1)$, $T_{\alpha_2}(R_2), \cdots, T_{\alpha_N}(R_N)$ и элемента $f \in M < \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N >$ по данному $T_\alpha(R)$ неоднозначно. В зависимости от характера задачи и от структуры множества $T_\alpha(R)$ можно брать ту или иную систему $T_{\alpha_1}(R_1)$, $T_{\alpha_2}(R_2), \cdots, T_{\alpha_N}(R_N)$ и элемент $f \in M < \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N >$.

0.2. Скажем, что на конечном упорядоченном множестве $T_\alpha(R) = \{x\}$ задана параметризованная система, если

1) дано конечное совершенно упорядоченное множество $\gamma = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, элементы которого назовем параметрами;

2) всякому параметру $\xi \in \gamma$ соответствует упорядоченное множество $T_{\alpha_\xi}(\Gamma_\xi)$ значений параметра;

3) дана n-местная функция A, аргументы которой суть элементы множества γ, и i-й аргумент меняется на $T_{\alpha_{\xi_i}}(\Gamma_{\xi_i})$;

4) $A(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ есть взаимнооднозначное соответствие между множествами $\Gamma = T_{\prod\limits_{i=1}^{n} \alpha_{\xi_i}} \left(\mathop{X}\limits_{i=1}^{n} \Gamma_{\xi_i} \right)$ и $T_\alpha(R)$ такое, что A^{-1} изотонно.

Для параметризованной системы будем использовать запись: $A^{\smile} = \{\gamma, \Gamma, A\}$, через $H(T_\alpha(R))$ обозначим класс всех параметризованных систем, заданных на множестве $T_\alpha(R)$. Рассмотрим бинарное отношение $\prec$ на $H(T_\alpha(R)): A_1^\smile \prec A_2^\smile$ тогда и только тогда, когда $A_1 A_2^{-1}$ является изотонным отображением.

$A_1^\smile$ и $A_2^\smile \in H(T_\alpha(R))$ назовем эквивалентными и обозначим через $A_1^\smile \equiv A_2^\smile$, если $(A_1^\smile \prec A_2^\smile) \& (A_2^\smile \prec A_1^\smile)$.

0.3. Пусть $Z=\{z\}$ множество всех операторов над Ω и $U=\{u\}$ множество всех предикатов над той же памятью Ω ([2]). Через $\mathbf{B}_z$ обозначим множество всех упорядоченных подмножеств множества Z, т. е.

$$\mathbf{B}_z=\{T_\alpha(L);\ \ \alpha \in P_L,\ \ L\subset Z\}.$$

Рассмотрим параметризованные системы $A^\smile=\{\gamma_A, \Gamma_A, A\}$, заданные на множестве $T_\alpha(L)$. Всякая такая система изображается своим символом $A:\Gamma_A \to T_\alpha(L)$. Через $\mathbf{M}$ обозначим множество всех таких символов, т. е.

$$\mathbf{M}=\{A : A^\smile=\{\gamma_A,\ \Gamma_A,\ A\} \in H(T_\alpha(L)), L \in \mathbf{B}_z\},$$

Аналогичным образом определятся множества

$$\mathbf{B}_u=\{T_\beta(a),\quad \beta \in P_a,\ \ a\subset U\},$$

$$\mathbf{P}=\{p:p^\smile=\{\gamma_p,\Gamma_p,p\} \in H(T_\beta(a)),\ T_\beta(a) \in \mathbf{B}_u\}.$$

Пусть $\mathbf{M}_0 \in \mathbf{M}$ и $\mathbf{P}_0 \in \mathbf{P}$. Всякому элементу $p \in \mathbf{P}_0$ сопоставим символ $\uparrow(m_1, m_2,\cdots, m_t)$, где $\gamma_p=(m_1, m_2,\cdots, m_t)$, и пусть

$$I=\{\uparrow(m_1,\ m_2,\cdots,\ m_t);\ \ \gamma_p=(m_1,\ m_2,\cdots,\ m_t),\ \ p \in \mathbf{P}_0\}.$$

Пусть далее λ_p есть множество всех подмножеств множества γ_p, т. е. $\lambda_p=\{\tau;\ \tau \in \gamma_p\}$. Каждому элементу $\tau \in \lambda_p$ сопоставим символ $\downarrow(s_1, s_2,\cdots, s_l)$, где $(s_1, s_2,\cdots, s_l)=\tau$, и рассмотрим множество

$$\widetilde{I}_p=\{\downarrow(s_1,\ s_2,\cdots,\ s_l);\ \ (s_1,\ s_2,\cdots,\ s_l)=\tau \in \lambda_p\}.$$

Предположим, что $\widetilde{I}=\bigcup_{p\in \mathbf{P}_0}\widetilde{I}_p$.

Через $\widetilde{\mathbf{M}}_0$ обозначим объединение множеств $\mathbf{M}_0$, $\mathbf{P}_0$, I, $\widetilde{I}$. Всякий элемент $h \in \widetilde{\mathbf{M}}_0$ имеет вид $h(\xi_1,\ \xi_2,\cdots,\ \xi_n)$ и параметру $\xi_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n$ соответствует упорядоченное множество $\Gamma_{\xi_i}(h)$.

Положим $\gamma_h=(\xi_1,\ \xi_2,\cdots,\ \xi_n)$.

Назовем выражением 0-го ранга любой символ $\mathbf{A}^\circ$, полученный из $h(\xi_1,\ \xi_2,\cdots,\ \xi_n) \in \widetilde{\mathbf{M}}_0$ подстановкой вместо некоторых параметров $\xi_{i_1}, \xi_{i_2},\cdots,\xi_{i_t}$, где $1 \leqslant i_1, i_2,\cdots, i_t \leqslant n$ и $0 \leqslant t \leqslant n$ каких-то значений из соответствующих множеств значения этих параметров. Будем считать, что $\gamma_{A^\circ}=\gamma_n'\setminus(\xi_{i_1},\ \xi_{i_2},\cdots,\ \xi_{i_t})$.

Если $\mathbf{A}^\circ$ получено из h, принадлежащего одному из множеств $\widetilde{\mathbf{M}}_0, \mathbf{P}_0, I$ и $\widetilde{I}$, то скажем, что оно соответственно является оператором 0-го ранга, предикатом над Ω (или функцией алгебры логики), верхней стрелкой, нижней стрелкой.

Пусть $\mathbf{N}_0 = \{\mathbf{A}^\circ\}$ есть множество всех выражений 0-го ранга на $\bar{\mathbf{M}}_2$. Для всякого $\mathbf{A}^\circ \in \mathbf{N}_0$ определим множества $\gamma^t_{\mathbf{A}^\circ}$ при

$$\gamma^t_{\mathbf{A}^\circ} = \begin{cases} \varnothing, \text{ если на } \gamma^{t-1}_{\mathbf{A}^\circ} \text{ не определена никакая параметрическая система;} \\ \gamma_B, \text{ если } B^{\sim} = \{\gamma_B, \Gamma_B, B\} \in \mathbf{H}(\gamma^{t-1}). \end{cases}$$

Предполагается, что $\gamma^0_{\mathbf{A}^\circ} = \gamma_{\mathbf{A}^\circ}$. Положим $\bar{\gamma}(\mathbf{A}^\circ) = \gamma^1_{\mathbf{A}^\circ} \cup \gamma^2_{\mathbf{A}^\circ} \cup \cdots \cup \gamma^m_{\mathbf{A}^\circ} \cdots$ и определим $\gamma(\mathbf{A}^\circ)$.

$$\gamma(\mathbf{A}^\circ) = \begin{cases} \gamma_{\mathbf{A}^\circ} \cup \bar{\gamma}(A^\circ), \text{ если } \mathbf{A}^\circ \text{— оператор 0-го ранга, функция алгебры логики или верхняя стрелка;} \\ \bar{\gamma}(\mathbf{A}^\circ), \text{ если } \mathbf{A}^\circ \text{ есть нижняя стрелка.} \end{cases}$$

Рассмотрим множество $\Psi = \{\xi : \xi \in \gamma(\mathbf{A}^\circ), \ \mathbf{A}^\circ \in \mathbf{N}_0\}$. Всякий элемент ξ этого множества является параметром некоторой параметризованной системы и, следовательно, имеет свое множество значений $\Gamma_\xi = \Xi$.

Символ $[_{\xi, \Xi}$ и $]_{\xi, \Xi}$ назовем соответственно правой и левой скобками. Рассмотрим множества

$$J = \{ [_{\xi, \Xi}, \ \ \xi \in \Psi\},$$
$$\bar{J} = \{]_{\xi, \Xi}, \ \ \xi \in \Psi\}.$$

Положим $\gamma_{[} = \gamma_{]} = \xi$, $\Gamma_{[} = \Gamma_{]} = \Xi$ и $\gamma([) = \gamma(]) = \gamma(\xi)$, т. е. $\gamma([)$, $\gamma(])$ зависят от тех и только тех параметров, от которых зависит ξ.

Пусть для всех $0 \leqslant l < k$ определены выражения l-го ранга и операторы l-го ранга. Определим выражения k-го ранга $\mathbf{A}$ и соответствующее ему множество параметров $\partial(\mathbf{A})$:

а) любой оператор $(k-1)$-го ранга $\mathbf{B}$ есть выражение k го ранга и $\partial(\mathbf{B}) = \gamma(\mathbf{B})$;

в) любое выражение 0-го ранга $\mathbf{A}^\circ$ есть выражение k-го ранга и $\partial(\mathbf{A}^\circ) = \gamma(\mathbf{A}^\circ)$;

с) любые символы $[_{\xi, \Xi}$, $]_{\xi, \Xi}$—выражения k-го ранга и $\partial(]) = \partial([) = \gamma([)$;

д) если $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$—выражения k-го ранга, то $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2$ — выражение k-го ранга, причем $\partial(\mathbf{B}) = \partial(\mathbf{B}_1) \cup \partial(\mathbf{B}_2)$.

Оператором k-го ранга назовем выражение k-го ранга $\mathbf{A}$, удовлетворяющее следующим условиям:

*R*1. Для всякого p существует единственная верхняя стрелка $\uparrow$, стоящая непосредственно за ним и такая, что $\gamma(p) = \gamma(\uparrow)$, $\Gamma_p = \Gamma_\uparrow$ и наоборот.

*R*2. Для всякой $\uparrow$ существует конечная система нижних стрелок $c(\uparrow) = \{\downarrow, \downarrow, \cdots, \downarrow\}$, для каждой из которых имеет место $\gamma_\downarrow = \gamma_\uparrow$, $\bigcup\limits_{\downarrow \in c(\uparrow)} \Gamma_\downarrow = \Gamma_\uparrow$ и $\Gamma_\downarrow$ попарно не пересекаются.

$R3$. Всякая нижняя стрелка $\downarrow$ входит в одну и только одну систему $c(\uparrow)$ нижних стрелок.

$R4$. Для всякой правой скобки $[_{\gamma_{[}, \Gamma_{]}}$ существует единственная левая скобка $]_{\gamma_{]}, \Gamma_{]}}$ расположенная вправо от нее и такая, что $\gamma_{[} = \gamma_{]}$, $\Gamma_{]} = \Gamma_{]}$, и наоборот.

Назовем областью действия скобки выражение, находящееся между соответствующими скобками. Обозначим его через $D([, \gamma_{[})$.

$$R5. \quad 1. \ (h \in \mathbf{A}) \,\&\, (h \overline{\in} D([, \gamma_{[})) \to (\delta(h) \cap \gamma_{[} = \varnothing).$$

$$2. \ (h \in \mathbf{A}) \,\&\, (h \in D([, \gamma_{]})) \,\&\, (\Gamma_{[} \in \delta(n)) \to (\Gamma_{\xi} \subset \Gamma_{\xi}(h)) \,\&\, (\xi = \gamma_{[}).$$

Элементы множества $N_0 \cup J \cup \bar{J}$ назовем элементарными выражениями. Параметр ξ назовем связанным в $\mathbf{A}$, если для всех элементарных выражений и операторов t-го ранга таких, что $\xi \in \gamma(h)$ следует существование в $\mathbf{A}$ скобки $[_{\xi, \Xi}$, такой, что $h \in D(\xi) = D(\gamma_{[},])$; ξ назовем свободным параметром в $\mathbf{A}$, если не существует $[_{\gamma_{[}, \Gamma_{[}} \in \mathbf{A}$, такой, что $\xi = \gamma_{[}$.

$R6$. Любой параметр либо свободен, либо связан.

$$R7. \ \exists ([_{\xi, \Xi} \in \mathbf{A})([_{\xi, \Xi} \in D(\xi) = D([, \gamma_{[})).$$

Обозначим через $y(h)$ множество правых скобок, в область действия которых входит выражение k-го ранга $h \in \mathbf{A}$. Пусть $\gamma(y(h) = \bigcup_{[\in y(h)} \gamma_{[}$;

$$R8. \ \forall (\downarrow \in c(\uparrow))(\gamma(y(\uparrow)) \supseteq \gamma(y(\downarrow)));$$

$$R9. \ 1. \ ([_{\xi, \Xi} \in D([', \gamma_{['}) \to (]_{\xi, \Xi} \in D([', \gamma_{['}) \vee \exists ([''_{\gamma_{[''}, \Gamma_{[''}} \in \mathbf{A}) (([_{\xi, \Xi} \in$$

$$\in D(['', \gamma_{[''})) \,\&\, (T_{\alpha_{\xi'}}(\Gamma_{['}) = T_{\alpha^{-1}_{\xi'}}(\Gamma_{['']})));$$

$$2. \ (]_{\xi, \Xi} \in D([', \gamma_{['})) \to (]_{\xi, \Xi} \in D([', \gamma_{['})) \vee \exists ([''_{\gamma_{['}, \Gamma''} \in \mathbf{A}) ((]_{\xi, \Xi} \in$$

$$\in D(['', \gamma_{[''})) \,\&\, (T_{\alpha'_{\xi}}(\Gamma_{['}) = T_{\alpha^{-1}_{\xi'}}(\Gamma_{['']})).$$

Введем обозначения:

1) $\sigma(\mathbf{A})$ — множество связанных параметров операторов k-го ранга,
2) $\Xi_{\mathbf{A}} = \{\Gamma_{\xi}, \xi \in \sigma(\mathbf{A})\}$,
3) $\gamma(\mathbf{A}) = \delta(\mathbf{A}) \setminus \sigma(\mathbf{A})$ — множество свободных параметров,
4) $\gamma_{\mathbf{A}} = \{\Gamma_{\eta} : \eta \in \gamma(\mathbf{A})\}$.

Выражение вида $p \uparrow$ назовем логическим условием. Часто для оператора k-го ранга будем использовать запись:

$$\mathbf{A}(\sigma(\mathbf{A}), \Xi_{\mathbf{A}}; \gamma(\mathbf{A}), \Gamma_{\mathbf{A}}).$$

Оператор произвольного ранга назовем схемой алгоритма, а выражение того же ранга — выражением в схеме алгоритма.

0.4. Пусть дана схема алгоритма $\mathbf{A}(\sigma(\mathbf{A}), \Xi_{\mathbf{A}}; \gamma(\mathbf{A}), \Gamma_{\mathbf{A}})$, где $\alpha_{\xi} \in P_{\Gamma_{\xi}}$; $\xi \in \sigma(\mathbf{A})$. Пусть далее $\pi_{\xi} \in \Pi_{\Gamma_{\xi}}(\alpha_{\xi})$, $\xi \in \sigma(\mathbf{A})$. Обозначим через K_λ класс всех схем алгоритмов, получившихся из **A** заменой множеств $T_{x_\xi}(\Gamma_\xi)$ множествами $T_{\tau_\xi}(\Gamma_\xi)$. Схемы алгоритма $\mathbf{A}'$ и $A'' \in K_\lambda$ назовем α-эквивалентными и обозначим $\mathbf{A}'' \equiv \mathbf{A}'(\alpha)$. Для всякой схемы алгоритма $\mathbf{A}' \in K_\lambda$ определим процесс выполнения при $\lambda = \{\lambda_\eta;\ \eta \in \in \tau(\mathbf{A}),\ \lambda_\eta \in \Gamma_\eta\}$. Первый шаг: придаем всем свободным параметрам соответствующие значения из λ и отметим самый левый символ схемы $\mathbf{A}'$. Пусть проделано l шагов, в результате которых выписана строчка символов

$$ab \cdots f \tag{1}$$

(быть может, пустая). Тогда на $l+1$-ом шаге рассматривается символ, отмеченный на l-ом шаге, и если это:

1) оператор 0-го ранга, то приписываем его справа к строчке и отмечаем в $\mathbf{A}'$ символ, стоящий непосредственно за ним;

2) оператор t-го ранга ($t \geqslant 1$), то приписываем его значение к (1) и отмечаем символ, стоящий за ним;

3) логическое условие $p\uparrow$, то при $p=1$ отмечаем за ним символ, а при $p=0$ отмечаем символ, стоящий непосредственно за $\downarrow$; $\downarrow \in c(\uparrow) = c(p\uparrow)$, где значение параметров $p\uparrow$ входит в $\mathbf{A}'$;

4) $\downarrow$, то отмечаем следующий за ним символ;

5) $[_{\xi,\Xi}$, то во всех элементарных выражениях и операторах t-го ранга h таких, что $\xi \in \gamma(h)$ заменяем параметры ξ минимальными значениями из Ξ и отмечаем за $[_{\xi,\Xi}$ символ.

6) $]_{\xi,\Xi}$, то заменяем значение параметра ξ следующими значениями из Ξ и если они входят в Ξ, то отмечаем за соответствующей скобкой символ, а если не входят,—отмечаем за $]_{\xi,\Xi}$ символ.

Если отмеченных символов нет, то процесс обрывается.

Строчку, выписанную в результате этого процесса, назовем значением схемы алгоритма $\mathbf{A}'$ для элемента λ и обозначим через $\widetilde{\mathbf{A}}'(\lambda)$. Если на множествах Γ_ξ; $\xi \in \sigma(\mathbf{A})$ даны порядковые отношения $\alpha_\xi(x, y)$, то значение схемы **A** для λ; $\widetilde{\mathbf{A}}(\lambda)$ положим равным множеству $\widetilde{K}_\lambda(\lambda)$. Это множество всех $\mathbf{A}'(\lambda)$; $\mathbf{A}' \in K_\lambda$. Скажем, что схема **A** меньше **B** (обозначим $\mathbf{A} \prec \mathbf{B}$), если существует однозначное соответствие φ между $\{\lambda\}$ и $\{\mu\}$ такое, что $\widetilde{K}_{\mathbf{A}}(\lambda) \in \widetilde{K}_{\mathbf{B}}(\varphi(\lambda))$. Если $\mathbf{A} \prec \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \prec \mathbf{A}$, то **A** и **B** назовем эквивалентными и обозначим $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$. Будем считать, что выражение L меньше выражения ν, если для всех схем $\mathbf{A}(\nu)$, содержащих ν, $\mathbf{A}(L)$, выражение, полученное из $\mathbf{A}(\nu)$ заменой ν на L, есть схема алгоритма и $\mathbf{A}(L) \prec \mathbf{A}(\nu)$. Выражения L и ν назовем эквивалентными и обозначим $L \equiv \nu$, если $L \prec \nu$ и $\nu \prec L$.

0.5 Оператор первого ранга, в котором для всякого γ_ξ, Γ_ξ есть отрезок натурального ряда, назовем схемой счета.

Символы вида $(\xi_0 \to \xi)$ и $F(\xi, \Gamma_\xi)$, где $\xi \in \sigma(\mathbf{A})$ и ξ_0 есть произвольный элемент множества Γ_ξ, назовем операторами управления для схемы алгоритма **A**.

Пусть $\mathbf{N} = \{(\xi_0 \to \xi),\ \xi_0 \in \Gamma_\xi,\ \xi \in \sigma(\mathbf{A})\}$ и $\mathbf{F} = \{F(\xi, \Gamma_\xi);\ \xi \in \sigma(\mathbf{A})\}$, где $\Gamma_\xi \in \Xi_{\mathbf{A}}$. Будем считать, что каждый элемент $\mathbf{N} \cup \mathbf{F}$ является элементарным выражением и $\gamma((\xi_0 \to \xi)) = \gamma(F(\xi, \Gamma_\xi)) = \gamma(\xi)$. Пусть для всех $\xi \in \sigma(\mathbf{A})$ множество Γ_ξ совершенно упорядочено. Выражение 0-го ранга на $\widetilde{\mathbf{M}}_0 \cup \mathbf{N} \cup \mathbf{F}$ назовем схемой программы, если оно удовлетворяет условиям $R1$, $R2$, $R3$, $R6$ и

$R1'$. для всякого $(\xi_0 \to \xi)$ существует единственный $F(\xi, \Gamma_\xi)$, стоящий вправо от него, и между ними символы $(\xi_h \to \xi)$ и $F(\xi, \Gamma_\xi)$ не встречаются $(\xi_h \in \Gamma_\xi)$, и наоборот.

При этом будем считать, что ξ—связанный параметр, если все элементарные выражения $h \in \mathbf{A}$; $\xi \in \gamma(h)$ встречаются между символами $(\xi_0 \to \xi)$ и $F(\xi, \Gamma_\xi)$ и свободный, если в $\mathbf{A}'$ не встречаются символы $(\xi_0 \to \xi)$ и $F(\xi, \Gamma_\xi)$.

Аналогично определяется процесс выполнения и значение схемы программы. Причем, если отмеченный символ является:

а) $(\xi_0 \to \xi)$, то во всех элементарных выражениях $h \in \mathbf{A}$ подставляем вместо ξ значение ξ_0 и отмечаем за $(\xi_0 \to \xi)$ символ;

в) $F(\xi, \Gamma_\xi)$, то вместо значения параметра ξ подставляем следующее в Γ_ξ значение.

0.6 Рассмотрим задачу. Для данного алгоритма $\mathbf{A}$ построить соответствующие ей схему счета $\mathbf{A}^*$ и схему программы $\bar{\mathbf{A}}$. Для этого достаточно построить схему $\mathbf{A} \in K_{\mathbf{A}}$.

Пусть параметризованные системы $\{\gamma_\nu, \Gamma_\nu, A\}$ и $\{\gamma_{\nu'}, \Gamma_{\nu'}, A'\}$ определены на одном и том же множестве и $\{\gamma_\nu, \Gamma_\nu, A\} \to \{\gamma_{\nu'}, \Gamma_{\nu'}, A'\}$. Через $h(\nu \longleftrightarrow \nu')$ обозначим выражение, полученное из h заменой $\xi \in \gamma_\nu$ на $\xi' \in \gamma_{\nu'}$. Пусть $\mathbf{A}''$ есть выражение, полученное из схемы алгоритма $\mathbf{A}$—заменой

1) $[_{\gamma_\nu, \Gamma_\nu}$ на $[_{\gamma_{\nu'}, \Gamma_{\nu'}}$ и $]_{\gamma_\nu, \Gamma_\nu}$ на $]_{\gamma_{\nu'}, \Gamma_{\nu'}}$,

2) h на $h(\nu \longleftrightarrow \nu')$.

В этих условиях верны утверждения:

а) $\mathbf{A}'$ есть схема алгоритма;

в) $\mathbf{A}' \to \mathbf{A}$;

с) $(\{\gamma_\nu, \Gamma_\nu, A\} \equiv \{\gamma_{\nu'}, \Gamma_{\nu'}, A'\}) \to \mathbf{A}' \equiv \mathbf{A}$.

В. Эквивалентные преобразования выражений

Ниже дается система преобразований для выражений вида $[_{\xi, \Xi}$, $\mathbf{B}_{\xi, \Xi}$, или для скобок $[_{\xi, \Xi}$ и $]_{\xi, \Xi}$, в зависимости от порядкового отношения на Ξ.

1) Если $\Gamma_\nu = \Gamma_{\nu_1} \times \Gamma_{\nu_2}$ и $\gamma_\nu = \gamma_{\nu_1} \cup \gamma_{\nu_2}$, то

а) при $\alpha = \alpha_1 \odot \alpha_2$, где $\alpha \in P_{\Gamma_\nu}$ и $\alpha_i \in P_{\Gamma_{\nu_i}}$ $i = 1, 2$:

$$[_{\gamma_\nu, \Gamma_\nu} \equiv [_{\gamma_{\nu_1}, \Gamma_{\nu_1}} [_{\gamma_{\nu_2}, \Gamma_{\nu_2}}, \qquad]_{\gamma_\nu, \Gamma_\nu} \equiv]_{\gamma_{\nu_2}, \Gamma_{\nu_2}}]_{\gamma_{\nu_1}, \Gamma_{\nu_1}};$$

в) при $\alpha = \alpha_1 \times \alpha_2$:

$$[_{\tau_{\nu_1}, \Gamma_{\nu_1}} [_{\tau_{\nu_2}, \Gamma_{\nu_2}} \to [_{\tau_\nu, \Gamma_\nu}, \qquad]_{\tau_{\nu_2}, \Gamma_{\nu_2}}]_{\tau_{\nu_1}, \Gamma_{\nu_1}} \to]_{\tau_\nu, \Gamma_\nu}.$$

2) Если $\Gamma_\nu = \mathop{\mathsf{X}}\limits_{t=1}^{n} \Gamma_{\nu_t}$ и $\tau_\nu = \bigcup\limits_{t=1}^{n} \tau_{\nu_t}$, то

а) при $\alpha = \prod\limits_{t=1}^{n}{}^{\circ} \alpha_t$, $\alpha \in P_{\Gamma_\nu}$, $\alpha_t \in P_{\Gamma_{\nu_t}}$:

$$[_{\tau_\nu, \Gamma_\nu} \equiv [_{t, T} [_{\tau_{\nu_t}, \Gamma_{\nu_t}}]_{t, T}, \qquad]_{\tau_\nu, \Gamma_\nu} \equiv [_{t, \breve{T}}]_{\tau_{\nu_t}, \Gamma_{\nu_t}}]_{t, \breve{T}};$$

в) при $\alpha = \prod\limits_{t=1}^{n} \alpha_t$:

$$[_{t, T} [_{\tau_{\nu_t}, \Gamma_{\nu_t}}]_{t, T} \to [_{\tau_\nu, \Gamma_\nu}, \qquad [_{t, \breve{T}}]_{\tau_{\nu_t}, \Gamma_{\nu_t}}]_{t, \breve{T}} \to]_{\tau_\nu, \Gamma_\nu},$$

где $\breve{T}$ есть множество, двойственное множеству $T = (1, 2, \cdots, n)$.

3) Если $\Gamma_\nu = \Gamma_\nu^1 \cup \Gamma_\nu^2$ и $\Gamma_\nu^1 \cap \Gamma_\nu^2 = \varnothing$, то

а) при $\alpha = \alpha_1 \oplus \alpha_2$, $\alpha_1 \in P_{\Gamma_\nu^1}$, $\alpha_2 \in P_{\Gamma_\nu^2}$:

$$[_{\tau_\nu, \Gamma_\nu} \mathbf{B}]_{\tau_\nu, \Gamma_\nu} \equiv [_{\tau_\nu, \Gamma_\nu^1} \mathbf{B}]_{\tau_\nu, \Gamma_\nu^1} [_{\tau_\nu, \Gamma_\nu^2} \mathbf{B}]_{\tau_\nu, \Gamma_\nu^2};$$

в) при $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$:

$$[_{\tau_\nu, \Gamma_\nu^1} \mathbf{B}]_{\tau_\nu, \Gamma_\nu^1} [_{\tau_\nu, \Gamma_\nu^2} \mathbf{B}]_{\tau_\nu, \Gamma_\nu^2} \to [_{\tau_\nu, \Gamma_\nu} \mathbf{B}]_{\tau_\nu, \Gamma_\nu},$$

причем для всех $\downarrow$; $\downarrow = \downarrow_1 \downarrow_2$, где $\downarrow \in c\,(p\uparrow)$; $p\uparrow \in \mathbf{B}$.

4) Если $\Gamma_\nu = \bigcup\limits_{t=1}^{n} \Gamma_\nu^t$ и множества Γ_ν^t попарно не пересекаются, то

а) при $\alpha = \sum\limits_{t=1}^{n}{}^{\circ} \alpha_t$, $\alpha_t \in P_{\Gamma_\nu^t}$:

$$[_{\tau_\nu, \Gamma_\nu} \equiv [_{t, T} [_{\tau_\nu, \Gamma_\nu^t}, \qquad]_{\tau_\nu, \Gamma_\nu} \equiv]_{\tau_\nu, \Gamma_\nu^t}]_{t, T};$$

в) при $\alpha = \sum\limits_{t=1}^{n} \alpha_t$:

$$[_{t, T} [_{\tau_\nu, \Gamma_\nu^t} \to [_{\tau_\nu, \Gamma_\nu}, \qquad]_{\tau_\nu, \Gamma_\nu^t}]_{t, T} \to]_{\tau_\nu, \Gamma_\nu}.$$

5) Если $\Gamma_\nu \subset \Gamma_\nu'$ (в смысле вхождений упорядоченных множеств) и $\rho(x)$ характеристическая функция множества Γ_ν, то

$$[_{\tau_\nu, \Gamma_\nu} \equiv [_{\tau_\nu, \Gamma_\nu'} p(x) \uparrow^x, \qquad]_{\tau_\nu, \Gamma_\nu} \equiv {}^{\cdot}\downarrow^x]_{\tau_\nu, \Gamma_\nu'}$$

С. Параметризация выражений

Всякое выражение $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ можно рассматривать как конечное совершенное множество элементов, принадлежащих $\widetilde{\mathbf{M}}$. Пусть на этом множестве задана параметризованная система $\mathbf{B}^{\smile} = \{\gamma_B, \Gamma_B, B\}$, причем $\gamma_B \cap \gamma(\mathbf{A}) = \varnothing$; этого добъемся переименованием элементов множества γ_B. Пусть, далее $M = \{\mathbf{B}\}$ есть конечное множество попарно не пересекающихся выражений $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$, на каждом из которых задана параметризованная система. Обозначим через $\mathbf{A}'$ выражение, полученное из $\mathbf{A}$ заменой всякого выражения $\mathbf{B}$ на $[_{\gamma_B, \Gamma_B} B]_{\gamma_B, \Gamma_B}$. Имеет место утверждение:

если для всех правых и левых скобок и логических условий, входящих в $\mathbf{A}'$, выполняются условия $R8$ и $R9$, то $\mathbf{A}'$ схема алгоритма и $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}'$.

D. Переход от схемы счета к схеме программы

Каждому выражению $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}^*$ сопоставим $\overline{\mathbf{B}}$ по правилам:

$c1$. если $h \in \widetilde{\mathbf{M}}_0$, то $\overline{h} = h$;

$c2$. $\overline{[}_{\xi, \Gamma_\xi} = (\xi_0 \to \xi) \downarrow^{(\xi, \Gamma_\xi)}$, где ξ_0 первый элемент Γ_ξ;

$c3$. $\overline{]}_{\xi, \Gamma_\xi} = F(\xi, \Gamma_\xi)\, p(\xi \in \Gamma_\xi) \uparrow^{(\xi, \Gamma_\xi)}$;

$c4$. если $L = L_1 L_2$, то $\overline{L} = \overline{L}_1 \overline{L}_2$.

Имеет место следующая

Теорема. Из всякой схемы счета $\mathbf{A}^*$ при помощи $c1 - c4$ можно построить схему программы $\overline{\mathbf{A}}$ такую, что $\mathbf{A}^* \equiv \overline{\mathbf{A}}$.

Замечание. 1. Если Γ_ξ двойственно Γ'_ξ, то в дальнейшем вместо $F(\xi, \Gamma_\xi)$ будем использовать запись $F'(\xi, \Gamma_\xi)$.

2 Если $\Gamma_\xi = (k, k+\lambda, \dots, k+n\lambda)$, то вместо $F(\xi, \Gamma_\xi)$ будем писать $F^\lambda(\xi)$.

E. Примеры преобразования схем алгоритмов

3.1. Пусть заданы элементы $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$. Требуется построить всевозможные наборы вида: $(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k})$, где $1 \leqslant i_t \leqslant n$, удовлетворяющие условиям $p_t(i_t) = 1$ для всех $t = 1, 2, \dots, k$. Обозначим через $I_k = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ произвольный набор из k чисел, удовлетворяющих условию $1 \leqslant i_t \leqslant n$ при $1 \leqslant t \leqslant k$, а через $\widetilde{I}_k$—множество всех допустимых наборов (для которых $p_t(i_t) = 1$, $i_t \in I_k \in \widetilde{I}_k$). Предположим, что оператор $H(I_k)$ выдает набор $(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k})$ по заданным $(i_1, i_2, \dots, i_k) = I_k$.

Тогда схема алгоритма, вычисляющая все требуемые наборы, будет иметь вид

$$\mathbf{A} = [_{I_k \widetilde{I}_k} H(I_k)]_{I_k \widetilde{I}_k}.$$

Имеем $\overline{I}_k = \overset{k}{\underset{t=1}{\mathrm{X}}}\, \overline{i}_t$ и $I_k = \bigcup_{t=1}^{k} i_t$, где $\overline{i}_t$ — допустимое множество изменения параметра i_t.

Порядок нахождения наборов произвольный. Можем полагать, что $\overline{I}_k = T_{(\prod_{t=1}^{k} z_t)} (\overset{k}{\underset{t=1}{\mathrm{X}}}\, \overline{i}_t)$, где $z_t \in P_{\overline{i}_t}$ есть естественный порядок на $i_t \in [1, n]$.

Используя $2a$ (B), можно **A** записать в виде

$$\mathbf{A} \equiv [_{t,[1,k]} [_{i_t, \overline{i}_t}]_{t,[1,k]} H(I_k) [_{t,[k,1]}]_{i_t, \overline{i}_t}]_{t,[k,1]}.$$

Так как $\overline{i}_t \subset [1, n]$ и $P_t(i_t)$ являются характеристическими функциями множеств $\overline{i}_t : t = 1, 2, \cdots, k$, то, используя $5\,(B)$, можем написать

$$[_{i_t, \overline{i}_t}]_{t,[1,k]} H(I_k) [_{t,[k,1]}]_{i_t, \overline{i}_t} \equiv [_{i_t,[1,n]} P_t(i_t) \uparrow^{t}]_{t,[1,k]} H(I_k) [_{t,[k,1]} \downarrow^{t}]_{i_t,[1,n]}$$

Подставляя это значение в схему алгоритма, получим схему счета вида

$$\mathbf{A}^* = [_{t,[1,k]} [_{i_t,[1,n]} P_t(i_t) \uparrow^{t}]_{t,[1,k]} H(I_k) [_{t,[k,1]} \downarrow^{t}]_{i_t,[1,n]}]_{t,[k,1]}.$$

При помощи C1—C4 можно от полученной схемы счета перейти к схеме программы. Схема программы будет иметь вид

$$\overline{\mathbf{A}} = (1 \to t) \downarrow^{t} (1 \to i_t) \downarrow^{i_t} P_t(i_t) \uparrow^{t} F(t) P_t(t > k) \uparrow^{t} H(I_k) (k \to t) \downarrow^{t} \downarrow^{1}$$

$$F(i_t) P(i_t > n) \uparrow^{i_t} F^{-1}(t)\, P(t > 1) \uparrow^{t}.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи:

1. Пусть

$$P_t(i) = \begin{cases} 1, \text{ если } i \neq i_j \text{ для всех } j = 1, 2, \cdots, t-1, \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

для всех $t = 1, 2, \cdots, k$. Тогда полученная схема будет вычислять все размещения из n-элементов по k.

2. Пусть

$$P_t(i) = \begin{cases} 1, \text{ если } i > i_j \text{ для всех } j = 1, 2, \cdots, t-1, \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

для всех $t = 1, 2, \cdots, k$. Тогда схема будет вычислять все сочетания из n-элементов по k.

3. Если в случае 2 положить $k = n$, то получим схему, вычисляющую все перестановки из n-элементов.

3.2. Вычисление ранга матрицы.

Пусть имеем квадратную матрицу $A = \{a_{ij}\}$, где $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Будем вычислять ранг этой матрицы по следующему алгоритму:

a) отмечаем k строк и k столбцов;

в) вычисляем значение минора $(n-k)$-го порядка, полученного из неотмеченных строк и столбцов;

с) процесс проделывается для всевозможных k строк и k столбцов и для всех $0 \leqslant k \leqslant n$ до получения минора $(n-k)$-го порядка, значение которого отлично от нуля. Ранг матрицы при этом будет $n-k$.

Пусть $I_k = (i_1, i_2, \cdots, i_k)$ и $J_k = (j_1, j_2, \cdots, j_k)$, где

$$1 \leqslant i_t \leqslant n, \quad 1 \leqslant j_t \leqslant n \quad \text{при} \quad 1 \leqslant t \leqslant k.$$

Назовем набор $I_k(J_k)$ допустимым, если $i_t \neq i_h (j_t \neq j_h)$ при $1 \leqslant t, h \leqslant k$.

Множество допустимых наборов для I_k и J_k обозначим через $\widetilde{I}_k$ и $\widetilde{J}_k$. Обозначим через $A(I_k, J_k)$ минор $(n-k)$-го порядка, полученный из матрицы A вычеркиванием строк и столбцов, номера которых принадлежат I_k и J_k. Пусть $\mathbf{A}(I_k, J_k)$ вычисляет значение d минора $A(I_k, J_k)$. Тогда схема алгоритма для вычисления ранга матрицы $A = \{a_{ij}\}$ будет иметь вид:

$$\mathbf{A} = [_{k, [0, n]} [_{I_k, \widetilde{I}_k} [_{J_k, \widetilde{J}_k} \mathbf{A}(I_k, \widetilde{J}_k) p\ (d = 0) \uparrow']_{J_k, \widetilde{J}_k}]_{I_k, \widetilde{I}_k}]_{k, [0, n]} \downarrow^1 \{(n - $$
$$- k) \to d\}$$

в d получаем значение ранга матрицы.

Имеем $\widetilde{I}_k = \mathop{\times}\limits_{t=1}^{k} \widetilde{i}_t$ и $I_k = \bigcup\limits_{t=1}^{k} i_t$, где $\widetilde{i}_t$ есть множество допустимых значений параметра i_t, и аналогично:

$$\widetilde{J}_t = \mathop{\times}\limits_{t=1}^{k} \widetilde{j}_t, \qquad J_k = \bigcup\limits_{t=1}^{k} j_t.$$

Порядок наборов в $\widetilde{I}_k$ и $\widetilde{J}_k$ произвольный. Так что можем полагать

$$\widetilde{I}_k = T_{\left(\prod\limits_{t=1}^{k}{}^{\circ} \alpha_t\right)} \left(\mathop{\times}\limits_{t=1}^{k} \widetilde{i}_t\right), \quad \widetilde{J}_k = T_{\left(\prod\limits_{u=1}^{k}{}^{\circ} \beta_u\right)} \left(\mathop{\times}\limits_{u=1}^{k} \widetilde{j}_u\right),$$

где α_t, $1 \leqslant t \leqslant k$ и β_u, $1 \leqslant u \leqslant k$ — суть естественные порядки на $\widetilde{i}_t \subset [1, n]$ и $\widetilde{j}_u \subset [1, n]$.

Используя $2a\,(B)$ для выражений $[_{I_k, \widetilde{I}_k}; \,]_{I_k, \widetilde{I}_k}$ и соответственно для $[_{J_k, \widetilde{J}_k}; \,]_{J_k, \widetilde{J}_k}$ получим

$$\mathbf{A} \equiv [_{k, [0, n]} [_{t, [1, k]} [_{i_t, \widetilde{i}_t}]_{t, [1, k]} [_{u, [1, k]} [_{j_u, \widetilde{j}_u}]_{u, [1, k]} \mathbf{A}(I_k, J_k) p\, (0L = 0) \uparrow^1$$
$$[_{u, [k, 1]}]_{j_u, \widetilde{j}_u}]_{u, [k, 1]} [_{t, [k, 1]}]_{i_t, \widetilde{i}_t}]_{t, [k, 1]}]_{k, [0, n]} \downarrow' \{(n-k) \to d\}. \tag{1}$$

Составим схему для $\mathbf{A}(I_k, J_k)$.

Из определения определителя следует, что значение минора $A(I_k, J_k)$ равно:

$$d=\Sigma \mu\, a_{m_1 l_1} a_{m_2 l_2} \cdots a_{m_{n-k} l_{n-k}}, \text{ где } 1 \leqslant m_1 < m_2 < \cdots < m_{n-k} \leqslant n,$$

$$m_v \overline{\in} I_k \text{ для всех } 1 \leqslant v \leqslant n-k \text{ и } 1 \leqslant l_1, l_2, \cdots, l_{n-k} \leqslant n.$$

Причем, для всех $1 \leqslant h \leqslant n-k$, l_n попарно не пересекаются, и $l_n \overline{\in} J_k$, а μ есть числовой коэффициент, равный ± 1, в зависимости от четности подстановки

$$\begin{pmatrix} m_1, & m_2, \cdots, & m_{n-k} \\ l_1, & l_2, \cdots, & l_{n-k} \end{pmatrix}$$

Сумма распространяется по всевозможным допустимым значениям

$$l_1, l_2, \cdots, l_{n-k}.$$

Выражение для нахождения d можно записать в следующем виде:

$$d=\sum_{l_1}(a_{m_1, l_1} \sum_{l_2}(a_{m_2, l_2} \cdots \sum_{l_{n-k}}(a_{m_{n-k} l_{n-k}} \mu) \cdots)),$$

где суммы распространяются по допустимым значениям l_n, $1 \leqslant n \leqslant$ $\leqslant n-k$. Обозначим множество допустимых значений для параметра l_n через $\overline{l_n}$. Пусть известны операторы:

1) $B_{m_v l_n}$—умножает число $a_{m_v l_n}$ на c_{v-1} и помещает в $C_v (c_0=1)$;

2) D— вычисляет значение μ и прибавляет $C_{n-k} \mu$ в d (в начале счета $d=0$);

3) Z_v — определяет значение параметра m_v.

Тогда алгоритм, вычисляющий значение d, можно записать в виде:

$$\mathbf{A}(I_k, J_k)=\{0 \to d\}\{1 \to C_0\} [_{l_1, \overline{l_1}} Z_1 B_{m_1 l_1} [_{l_2, \overline{l_2}} Z_2 B_{m_2 l_2} \cdots$$

$$\cdots [_{l_{n-k} \overline{l_{n-k}}} Z_{n-k} B_{m_{n-k} l_{n-k}} D]_{l_{n-k}, \overline{l_{n-k}}} \cdots]_{l_2, \overline{l_2}}]_{l_1, \overline{l_1}}.$$

Обозначим

$$[_{l_h, \overline{l_h}} Z_h B_{m_h l_h} = \mathbf{C}_h, \qquad]_{l_h, \overline{l_h}} = \mathbf{D}_h.$$

Тогда $\mathbf{A}(I_k, J_k)=\{0 \to d\}\{1 \to C_0\} \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 \cdots \mathbf{C}_{n-k} D\, \mathbf{D}_{n-k} \cdots \mathbf{D}_2 \mathbf{D}_1$. Так как условия утверждения C выполняются, то полученное выражение можно записать в виде:

$$\mathbf{A}(I_k, J_k)=\{0 \to d\}\{1 \to C_0\} [_{h, [1, n-k]} \mathbf{C}_h]_{h, [1, n-k]} D [_{h, [n-k, 1]} \mathbf{D}_h]_{h, [n-k, 1]} =$$

$$=\{0 \to d\}\{1 \to C_0\} [_{h, [1, n-k]} [_{l_h, \overline{l_h}} Z_h B_{m_h l_h}]_{h, [1, n-k]} D \times$$

$$\times [_{h, [n-k, 1]}]_{l_h, \overline{l_h}}]_{h, n-k, 1]}.$$

Рассмотрим следующие функции алгебры логики:

$$p(v) = \begin{cases} 1, \text{ если } v \,\overline{\in}\, I_k, \\ 0, \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

$$q(l_h) = \begin{cases} 1. \text{ если } l_h \,\overline{\in}\, J_k \text{ и } l_h \neq l_1, l_2, \ldots, l_{h-1}, \\ 0, \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

функции $P(v)$ и $q(l_h)$ вычисляются просто, и можем полагать, что их значения известны.

Тогда Z_h можно написать в следующем виде:

$$Z_h = [_{v, [m_{h-1}+1, n]} P(v) \uparrow^2 \{v \to m_h\} \omega \uparrow^3 \downarrow^2]_{v, [m_{h-1}+1, n]} \downarrow^3,$$

где ω—тождественно ложная функция.

Далее, $\widetilde{l_h} \in [1, n]$ и $q(l_h) = 1$ тогда, и только тогда, когда $l_h \in \in \widetilde{l_h}$, и, следовательно, схему для $\mathbf{A}(I_k, J_k)$ можно переписать в виде:

$$\mathbf{A}(I_k, J_k) \equiv \{0 \to d\}\{1 \to C_0\}[_{h, [1, n-k]} \; [_{l_h, [1, n]} q(l_h) \uparrow^4 [_{v, [m_{h-1}+1, n]} P(v) \uparrow^2$$
$$\{v \to m_h\} \omega \uparrow^3 \downarrow^2]_{v, [m_{h-1}+1, n]} \downarrow^3 B_{m_h, l_h}]_{h, [1, n-k]} D \times$$
$$\times [_{h, [n-k, 1]} \downarrow^4]_{l_h, [1, n]}]_{h, [n-k, 1]} . \qquad (2)$$

Для того, чтобы в схеме (1) можно было перейти к схеме программы, надо, чтобы вместо множеств $\widetilde{i_t}$ и $\widetilde{j_t}$ стояли какие-то отрезки натурального ряда.

Допустимые наборы для I_k получим, если положим $i_{t+1}+1 \leqslant \leqslant i_t \leqslant n-k+(t-1)$ для всех $1 \leqslant t \leqslant k$, и аналогично для $J_k : j_{n-1} + +1 \leqslant j_u \leqslant n-k+(u-1)$ при $1 \leqslant u \leqslant k$.

Теперь в (1) можно перейти к схеме программы. Получим

$$\bar{\mathbf{A}} = (0 \to k) \downarrow_k (1 \to t) \downarrow^t (i_{t_1-} + 1 \to i_t) \downarrow^{it} F(t) P\ (t > k) \uparrow^t (1 \to$$
$$\to u) \downarrow^u (j_{u-1} + 1 \to j_u) \downarrow^{ju} F(u) P(u > k) \uparrow^u \mathbf{A}(I_k\ , JP(d = 0) \uparrow' (k \to$$
$$\to u) \downarrow^{u'} F\ (j_u) P(j_u > n - k + u - 1) \downarrow^{ju} F^{-1}(u)$$
$$P(u < 1) \uparrow^{u'} (k \to\ t) \downarrow^{t'} F(i_t) P(i_t > n - k + t\ - 1) \uparrow^{it} F^{-1}(t) P(t <$$
$$< 1) \uparrow^{t'} F(k) P(k > n) \uparrow^k \quad \downarrow' \{(n-k) \to d\}.$$

Схеме счета (2) соответствует следующая схема программы:

$$\bar{\mathbf{A}}(I_k, J_k) \equiv \{0 \to d\}\{1 \to C_0\}\ (1 \to h) \downarrow^h (1 \to l_h) \downarrow^{l_h} q.\ (l_h) \uparrow^4 (m_{h-1}+1 \to v) \downarrow^v$$
$$P(v) \uparrow^2 \{v \to m_h\} \omega \uparrow^3 \downarrow^2 F(v) P(v > n) \uparrow^v \downarrow^3 Bm_h l_h F(h) P(h > n-k) \uparrow^h D$$
$$((n-k) \to h) \downarrow^{h'} \downarrow^4 F(l_h) P(l_h > n) \uparrow^{l_h} F^{-1}(h) P\ (h < 1) \uparrow^{h'} .$$

Подставляя вместо $\overline{A}(I_k, J_k)$ свое значение в $\mathbf{A}$, получим окончательный вид схемы программы

$$\overline{\mathbf{A}} = (0 \to k) \downarrow^{k} (1 \to t) \downarrow^{t} (i_{t-1} + 1 \to i_t) \downarrow^{i_t} F(t) P(t > k) \uparrow^{t} (1 \to$$

$$\to u) \downarrow^{u} (j_{u-1} + 1 \to j_u) \downarrow^{j_u} F(u) P(u > k) \uparrow^{k} \{0 \to d\} \{1 \to C_0\} (1 \to h) \downarrow^{h} (1 \to$$

$$\to l_h) \downarrow^{l_h} q(l_h) \uparrow^{4} (m_{h-1} + 1 \to v) \downarrow^{v} P(v) \uparrow^{2} \{v \to m_h\} \omega \uparrow^{3} \downarrow^{2} F(v) P(v >$$

$$> n) \uparrow^{v} \downarrow^{3} B_{m_h l_h} F(h) P(h > n - k) \uparrow^{h} D(n - k \to h) \downarrow^{h'} \downarrow^{4} F(l_h) P(l_h >$$

$$> n) \uparrow^{l} F^{-1}(h) P(h < 1) \uparrow^{h'} P(d = 0) \uparrow^{r} (k \to u) \downarrow^{u'} F(j_u) P(j_u > n - k +$$

$$+ u - 1) \uparrow^{j_u} F^{-1}(u) P(u < 1) \uparrow^{u'} (k \to t) \downarrow^{t'} F(i_t) P(i^t > n - k +$$

$$+ t - 1) \uparrow^{i_t} F^{-1}(t) P(t < 1) \uparrow^{t'} F(k) P(k > n) \uparrow^{k} \downarrow^{r} \{(n - k) \to d\}.$$

3.3. Составление сокращенной дизъюнктивной нормальной формы (днф) для функций алгебры логики.

Пусть задана функция $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. В n-мерном пространстве каждой функции алгебры логики соответствует подмножество вершин единичного n-мерного куба, на которых данная функция принимает значение 1, и наоборот, всякому подмножеству M вершин единичного n-мерного куба соответствует функция $f_M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, характеристическая функция множества M.

Элементарной конъюнкцией k-го ранга называется логическое произведение $x_{j_1}^{\sigma_1} \& x_{j_2}^{\sigma_2} \& \ldots \& x_{j_k}^{\sigma_k}$, где все x_{j_i} $1 \leqslant i \leqslant k$ различны и $x^0 = \overline{x}$, $x' = x$, $\sigma = 0, 1$. Подмножество вершин единичного n-мерного куба, соответствующее элементарной конъюнкции k-го ранга, называется интервалом k-го ранга. Интервал k-го ранга есть $n-k$-мерная грань.

Интервал $M_B \subset M_f$ является максимальным, если не существует интервала M_A, имеющего ранг, меньший, чем ранг M_B и такого, что

$$M_B \subset M_A \subset M_f$$

Днф — это логическая сумма элементарных конъюнкций $\mathbf{N} = \bigcup_{i=1}^{s} \mathbf{A}_i$. Всякой днф соответствует покрытие множества M_f интервалами. Днф функции $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, соответствующая покрытию подмножества M_f всеми его максимальными интервалами, называется сокращенной днф. Задача о нахождении сокращенной днф сводится к отысканию всех максимальных интервалов множества M_f. Рассмотрим две формы задания функции.

а) Задание одномерной таблицей.

Функция $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ определяется заданием множества $M\{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_n}\}$, где $1 \leqslant i < 2^n$ и $\alpha_{ij} = 0, 1$, на которой функция принимает значение 1. Пусть m_f число элементов множества M. Тогда на множестве M можно рассмотреть параметризованную систему $(i, [1, m_f], \varphi)$, где отображение φ каждому числу $i_0 \in [1, m_f]$ сопоставляет набор $(\alpha_{i_0 1}, \alpha_{i_0 2}, \cdots, \alpha_{i_0 n})$, т. е. заданием i_0 набор из M вполне определяется.

Пусть задано множество элементов $J_k = \{j_1, j_2, \cdots, j_k\}$, где $1 \leqslant j_t \leqslant n$ при $1 \leqslant t \leqslant k$ и все j_t попарно различные. Пусть, далее, $\alpha, \beta \in M$. Положим $\alpha \prec \beta$, если $i_\alpha \prec i_\beta$, где i_α и i_β значения параметра i для этих наборов.

Скажем, что интервал k-го ранга порожден набором (i_0, J_k), если соответствуюшая элементарная конъюнкция имеет вид $x_{j_1}^{\alpha i_0 j_1} \& x_{j_2}^{\alpha i_0 j_2} \& \& \ldots \& x_{j_k}^{\alpha i_0, j_k}$, и $(\alpha_{i_0, 1}, \alpha_{i_0, 2}, \cdots \alpha_{i_0, n})$ есть первый набор, входящий в этот интервал.

Пусть $\mathrm{A}(i_0)$ вычисляет все максимальные интервалы, начинающиеся с набора $(\alpha_{i_0, 1}, \cdots, \alpha_{i_0, n})$. Тогда схема алгоритма для нахождения всех максимальных интервалов множества M_f будет иметь вид:

$$\mathrm{A} = [_{i_0 [1, m_f]} \mathrm{A}(i_0)]_{i_0, [1, m_f]}.$$

Интервал (i_0, J_k) будет максимальным интервалом в том, и только в том случае, если (i_0, J_{k-1}) не является интервалом для всех значений параметра $j_t \in J_t$, причем $J_{k-1} \subset J_k$, $t = 1, 2, \cdots, k-1$.

Рассмотрим функцию алгебры логики

$$P(i_0, J_k) = \begin{cases} 0, & \text{если } (i_0, J_k) \text{ есть интервал } k\text{-го ранга}, \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Положим, что $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \not\equiv 1$. Тогда любой интервал первого ранга будет максимальным интервалом.

Пусть $\mathrm{A}_2(i_0, J_1)$ вычисляет все максимальные интервалы k-го ранга (для всех $k = 2, 3, \cdots, n$), которые начинаются с набора i_0, и первый член соответствующей элементарной конъюнкции имеет вид $x_{j_1}^{\alpha i_0, j_1}$, где $j_1 \in I_1$. Тогда схема, вычисляющая все максимальные интервалы, начинающиеся с точки i_0, будет иметь вид:

$$\mathrm{A}(i_0) = [_{j_1 \widetilde{J}_1} P(i_0, J_1) \uparrow^{(i_0, J_1)} \mathrm{A}_2(i_0, J_1)\, \omega_1 \uparrow' \downarrow^{(i_0, J_1)} B_{i_0, J_1} \downarrow']_{j_1 \widetilde{J}_1},$$

где $\omega_1 = 0$, а B_{i_0, J_1} отмечает интервал, порожденный набором (i_0, J_1). $\widetilde{J}_1$ есть множество допустимых значений параметра j_1, и $\widetilde{J}_1 = [1, n]$. Пусть, далее, $\mathrm{A}_{t+1}(i_0, J_t)$ вычисляет все максимальные интервалы k-го ранга для всех $k = t+1, t+2, \cdots, t+n$, которые начинаются с набора i_0 и первые t членов соответствующей элементарной конъюнкции имеют вид $x_{j_1}^{\alpha i_0, j_1} \& x_{j_2}^{\alpha i_0, j_2} \& \ldots \& x_{j_t}^{\alpha_{i_0} j_t}$. Тогда

$$\mathbf{A}_t(i_0, J_{t-1}) = [_{j_t, \bar{J}_t} P(i_0, J_t) \uparrow^{(i_0, J_t)} \mathbf{A}_{t+1}(i_0, J_t)\, \omega_t \uparrow^t \downarrow^{(i_0, J_t)} B_{i_0, J_t} \downarrow^t]_{j_t, \bar{J}_t},$$

где $\omega_t = 0$, а B_{i_0, J_t} отмечает интервал, порожденный набором (i_0, J_t), $\bar{J}_t$ — есть множество допустимых значений параметра j_t.

Так как всякая точка множества M_f является интервалом n-го ранга, то $\mathbf{A}(i_0, J_{n-1}) = \varepsilon$, и рассматриваемый процесс на n-м шаге прекращается. Последовательно подставив вместо $\mathbf{A}_t(i_0, J_{t-1})$ соответственное значение в $\mathbf{A}_{t-1}(i_0, J_{t-2})$ для всех $t = n, n-1, \cdots, 2$, получим схему для $\mathbf{A}(i_0)$ в следующем виде:

$$\mathbf{A}(i_0) = [_{j_1, \bar{J}_1} P(i_0, J_1) \uparrow^{(i_0, J_1)} [_{j_2, \bar{J}_2} P(i_0, J_2) \uparrow^{(i_0, J_2)} \cdots [_{j_n, \bar{J}_n} P(i_0, J_n) \uparrow^{(i_0, J_n)}$$

$$\varepsilon\, \omega_0 \uparrow^n \downarrow^{(i_0, \bar{J}_n)} B_{i_0, \bar{J}_n} \downarrow^n]_{j_n, \bar{J}_n} \cdots$$

$$\cdots \omega_2 \uparrow^2 \downarrow^{(i_0, \bar{J}_2)} B_{i_0, \bar{J}_2} \downarrow^2]_{j_2, \bar{J}_2}\, \omega_1 \uparrow^1 \downarrow^{(i_0, \bar{J}_1)} B_{i_0, \bar{J}_1} \downarrow^1]_{j_1, \bar{J}_1}.$$

В качестве множества $\bar{J}_k$ можно брать отрезок натурального ряда

$$[j_{k-1} + 1, n] = \bar{J}_k.$$

Обозначим

$$[_{j_k, \bar{J}_k} P(i_0, J_k) \uparrow^{(i_0, J_k)} = \mathbf{C}_k$$

и

$$\omega_k \uparrow^{\bar{k}} \downarrow^{(i_0, J_k)} B_{i_0, J_k} \downarrow^{\bar{k}}]_{j_k, \bar{J}_k} = \mathbf{D}_k.$$

Так как $[_{k, [1, n]} \mathbf{C}_k]_{k, [1, n]} [_{k, [n, 1]} \mathbf{D}_k]_{k, [n, 1]}$ есть схема алгоритма, то из утверждения C имеем:

$$\mathbf{A}(i_0) = [_{k, [1, n]} \mathbf{C}_k]_{k, [1, n]} [_{k, [n, 1]} \mathbf{D}_k]_{k, [n, 1]}.$$

Подставляя вместо $\mathbf{C}_k$ и $\mathbf{D}_k$ соответствующие значения, получим следующий вид для схемы $\mathbf{A}(i_0)$:

$$\mathbf{A}(i_0) = [_{k, [1, n]} [_{j_k, \bar{J}_k} P(i_0, J_k) \uparrow^{(i_0, J_k)}]_{k, [1, n]} [_{k, [n, 1]} \omega \uparrow^{\bar{k}} \downarrow^{(i_0, J_k)} \times$$

$$\times B_{i_0, J_k} [\downarrow^{\bar{k}}]_{j_k, \bar{J}_k}]_{k, [n, 1]}.$$

Найдем схему, вычисляющую значения функции алгебры $P(i_0, J_k)$.

Рассмотрим функцию, определяемую условием

$$P(i_0, i, J_k) = \begin{cases} 1, \text{ если } \alpha_{i_0 j} = \alpha_{ij} \text{ для всех } i \in J_k, \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

(i_0, J_k) будет интервалом k-го ранга в том и только в том случае, если число точек i, для которых $P(i_0, i, J_k) = 1$, больше или равно 2^{n-k}, при этом интервал начинается с i_0, если рассматриваются только те наборы, для которых $i > i_0$.

Значение функции алгебры логики $P(i_0, J_k)$ можно вычислять по следующей схеме:

$$\{0 \to z\} [_{i,\, [i_0+1,\, m_f]} P(i_0, i, J_k) \uparrow^{(i_0, i, J_k)} H \downarrow^{(i_0, i, J_k)}]_{i,\, [i_0+1,\, m_f]} P(z < 2^{n-k}),$$

где H прибавляет единицу в z.

Подставляя вместо $A(i_0)$ и $P(i_0, J_k)$ соответствующие им значения, получим схему счета

$$A^* = [_{i_0,\, [1,\, m_f]} [_{k,\, [1,\, n]} [_{j_k,\, [j_{k-1}+1,\, n]} \{0 \to z\} [_{i,\, [i_0+1,\, m_f]} P(i_0, i, J_k) \uparrow^{(i_0, i, J_k)}$$

$$H \downarrow^{(i_0, i, j_k)}]_{i,\, [i_0+1,\, m_f]} P(z < 2^{n-k}) \uparrow^{(i_0, J_k)}]_{k,\, [1,\, n]} [_{k,\, [n,\, 1]} \omega_k \uparrow^{\overline{k}} \downarrow^{(i_0, J_k)} \times$$

$$\times B_{i_0, J_k} \downarrow^{\overline{k}}]_{j_k,\, [j_{k-1}+1,\, n]}]_{k,\, [n,\, 1]}]_{i_0,\, [1,\, m_f]}.$$

От данной схемы счета, используя преобразования CI – C4, можно перейти к схеме программы. Она будет иметь вид:

$$\overline{A} = (1 \to i_0) \downarrow^{i_0} (1 \to k) \downarrow^{k} (j_{k-1} + 1 \to j_k) \downarrow^{j_k} \{0 \to z\} (i_0 + 1 \to i)$$

$$\downarrow^{i} P(i_0, i, J_k) \uparrow^{(i_0, i, J_k)} H \downarrow^{(i_0, i, j_k)} F(i) P(i > m_f) \uparrow^{i} P(z < 2^{n-k})$$

$$\uparrow^{(i_0, J_k)} F(k) P(k > n) \uparrow^{k} (n \to k) \downarrow^{k'} \omega_k \uparrow^{\overline{k}} \downarrow^{(i_0, J_k)} B_{i_0, J_k} \downarrow^{\overline{k}} \times$$

$$\times F(j_k) P(j_k > n) \uparrow^{j_k} F^{-1}(k) P(k < 1) \uparrow^{k'} F(i_0) P(i_0 > m_f) \uparrow^{i_0}.$$

в) Задание z-мерной таблицей.

Пусть даны множества $M_1, M_2, \ldots, M_r$, где каждое M_t состоит из m_t наборов длины n_t, т. е. имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha^t_{11} & \alpha^t_{12} & \ldots & \alpha^t_{1, n_t} \\ \alpha^t_{21} & \alpha^t_{22} & \ldots & \alpha^t_{2, n_t} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha^t_{m_t 1} & \alpha^t_{m_t 2} & \ldots & \alpha^t_{m_t, n_t} \end{pmatrix}$$

где $\alpha^t_{i_t j_t} = 0$ или 1 для $1 \leqslant i_t \leqslant m_t$, $1 \leqslant j_t \leqslant m_t$; $1 \leqslant t \leqslant r$.

Пусть, далее, $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$; $m_1 = 2^{n_1}, m_2 = 2^{n_2}, \ldots, m_r = 2^{n_r}$. Обозначим через I^t множество всех i_t, удовлетворяющих условию $1 \leqslant i_t \leqslant m_t$, а J^t—множество j_t таких, что $1 \leqslant j_t \leqslant n_t$. Введем следующие обозначения: $I = \mathop{\mathrm{X}}\limits_{t=1}^{r} I^t$ и $J = \bigcup\limits_{t=1}^{r} J^t$. Пусть в множествах I^t и J^t введены естественные отношения порядка μ^t_1 и μ^t_2. Положим:

$$T_{\beta_1}(I) = T_{\left(\prod\limits_{j=1}^{r}{}^{\circ} \mu^t_1\right)} \left(\mathop{\mathrm{X}}\limits_{t=1}^{r} I^t\right), \quad T_{\beta_2}(J) = T_{\left(\prod\limits_{t=1}^{r}{}^{\circ} \mu^t_2\right)} \left(\mathop{\mathrm{X}}\limits_{t=1}^{r} I^t\right),$$

где $\tilde{\gamma}_1 \in P_I$ и $\tilde{\gamma}_2 \in P_J$. Множества $T_{\tilde{\gamma}_1}(I)$ и $T_{\tilde{\gamma}_2}(J)$ будут совершенно упорядоченными множествами, причем всякому элементу $I_0 \in I$ соответствует значение функции

$$f(I_0) = f(i_0^1, i_0^2, \cdots, i_0^r) =$$

$$= f\left(\alpha^1_{i_0^1, 1}, \alpha^1_{i_0^1, 2}, \cdots, \alpha_{i_0^1, n_1}, \cdots, \alpha^r_{i_0^r, 1}, \alpha^r_{i_0^r, 2}, \cdots, \alpha^r_{i_0^r, n_r}\right),$$

и наоборот.

Всякой конъюнкции k-го ранга $M = x_{l_1}^{\sigma_1} \,\&\, x_{l_2}^{\sigma_2} \,\&\, \ldots \,\&\, x_{l_k}^{\sigma_k}$ соответствуют наборы (I_0, L_k), такие, что $L_k = (l_1, l_2, \cdots, l_k)$, где $l_s \in J$ для всех $s = 1, 2, \ldots, k$ и I_0 — первый элемент множества I, для которого $M = 1$, и наоборот, всяким наборам (I_0, L_k), ($I_0 \in I$, каждое $l_s \in L$ принадлежит J и l_s попарно отличны друг от друга), соответствует конъюнкция k-го ранга.

При этом скажем, что интервал k-го ранга порожден наборами (I_0, L_k).

Предположим, что $A(I) = A_{i^1, i^2, \cdots, i^r}$ по заданным значениям параметров $i^1, i^2, \cdots, i^r$, вычисляет значение функции $f(I)$, а $A(I_0)$ для данного набора I_0 определяет множество максимальных интервалов, начинающихся с I_0.

Тогда схема алгоритма для вычисления сокращенной днф для функций $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ будет иметь вид:

$$\mathrm{A} = [_{I_0, I}\, A(I_0)\, P(I_0) \uparrow^{I'} A(I_0) \downarrow^{I'}]_{I_0, I},$$

где

$$P(I_0) = \begin{cases} 1, \text{ если } f(I_0) = 1 \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Рассуждениями, аналогичными 3.3, можно получить схему для $A(I_0)$ в следующем виде:

$$A(I_0) = [_{l_1, \overline{L_1}}\, P(I_0, L_1) \uparrow^{(I_0, L_1)} [_{l_2, \overline{L_2}}\, P(I_0, L_2) \uparrow^{(I_0, L_2)} \cdots [_{l_n, \overline{L_n}}\, P(I_0, L_n) \uparrow^{(I_0, L_n)}$$

$$\omega \uparrow^{\overline{n}} \downarrow^{I_0, L_n} B_{I_0, L_n} \downarrow^{\overline{n}}]_{l_n, \overline{L_n}} \cdots \omega_2 \uparrow^{\overline{2}} \downarrow^{(I_0, L_2)} B_{I_0, L_2} \uparrow^{\overline{2}}]_{l_2, \overline{L_2}}\, \omega_1 \uparrow^{\overline{1}} \downarrow^{(I_0, L_1)} \times$$

$$\times B_{I_0, L_1} \downarrow^{\overline{1}}]_{l_1, \overline{L_1}},$$

где

$$P(I_0, L_k) = \begin{cases} 0, \text{ если существует интервал, порожденный наборами } (I_0, L_k), \\ 1, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

B_{I_0, L_k} отмечает интервал (I_0, L_k), а $\omega_k = 0$ для всех $1 \leqslant k \leqslant n$, L_k — допустимое множество изменения параметра l_k. Введем следующие обозначения:

$$[_{l_k, \overline{L_k}}\, P(I_0, L_k) \uparrow^{(I_0, L_k)} = \mathrm{B}_k; \quad \omega_k \uparrow^{\overline{k}} \downarrow^{(I_0, L_k)} B_{I_0, L_k} \downarrow^{\overline{k}}]_{l_k, \overline{L_k}} = \mathrm{D}_k.$$

Тогда $$\mathrm{A}(I_0) \equiv \mathbf{B}_1\ \mathbf{B}_2\ \ldots\ \mathbf{B}_n\,\mathbf{D}_n\ \mathbf{D}_{n-1}\ \ldots\ \mathbf{D}_1.$$

Так как $[_{k,\,[1,\,n]}\,\mathbf{B}_k\,]_{k,\,[1,\,n]}\,[_{k,\,[n,\,1]}\,D_k\,]_{k,\,[n,\,1]}$ есть схема алгоритма, то используя C, можем написать

$$A(I_0) \equiv [_{k,\,[1,\,n]}\,\mathbf{B}_k\,]_{k,\,[1,\,n]}\,[_{k,\,[n,\,1]}\,\mathbf{D}_k\,]_{k,\,[n,\,1]}.$$

Подставляя вместо $\mathbf{B}_k$ и $\mathbf{D}_k$ их значения, эту схему можно записать в другом виде

$$A(I_0) \equiv [_{k,\,[1,\,n]}\,[_{l_k,\,\tilde{L}_k}\,P\,(I_0,\,L_k)\uparrow^{(I_0,\,L_k)}\,]_{k,\,[1,\,n]}\,[_{k,\,[n,\,1]}\,\omega_k\uparrow^{\bar{k}}\downarrow^{(I_0,\,L_k)}\times$$

$$\times B_{I_0,\,L_k}\downarrow^{\bar{k}}\,]_{l_k,\,\tilde{L}_k}\,]_{k,\,[n,\,1]}.$$

Найдем схему, вычисляющую $P(I_0,\,L_k)$

Пусть известна функция алгебры логики

$$P(I_0,\,I_1,\,L_k) = \begin{cases} 1, \text{ если } \alpha^t_{i^t_0\,j} = \alpha^t_{i^t_1,\,j}, \text{ для всех } t = 1,\,2,\cdots,\,r,\ j \in L_k, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда

$$P(I_0,\,L_k) = \{0 \to z\}\,[_{I,\,\tilde{I}}\,A\,(I_1)\,P\,(I_1)\uparrow^2 P\,(I_0,\,I_1,\,L_k)\uparrow^{(I_0,\,I_1,\,L_k)}\times$$

$$\times H\downarrow^{(I_0,\,I_1,\,L_k)}\downarrow^2\,]_{I_1,\,\tilde{I}}\,P(z < 2^{n-k}),$$

где H прибавляет 1 к Z, а $\tilde{I}$-множество наборов, таких, что $I_1 > I_0$ Функции $P(I_0,\,I_1,\,L_k)$ вычисляются легко, и можно полагать, что известна схема, вычисляющая их значения.

Подставляя вместо $P(I_0,\,L_k)$ и $\mathrm{A}(I_0)$ соответствующие им значения в А, получим следующий вид схемы алгоритма:

$$A \equiv [_{I_0,\,I}\,A\,(I_0)\,P\,(I_0)\uparrow'\,[_{k,\,[1,\,n]}\,[_{l_k,\,\tilde{L}_k}\,\{0 \to z\}\,[_{I_1,\,\tilde{I}_1}\,A\,(I_1)\,P\,(I_1)\uparrow^2\times$$

$$\times P(I_0,\,I_1,\,L_k)\uparrow^{(I_0,\,I_1,\,L_k)}\,H\downarrow^{(I_0,\,I_1,\,L_k)}\downarrow^2\,]_{I_1,\,I}\,P(z < 2^{n-k})\times$$

$$\times\uparrow^{(I_0,\,L_k)}\,]_{k,\,[1,\,n]}\,[_{k,\,[n,\,1]}\,\omega_k\uparrow^{k}\downarrow^{(I_0\,L_k)}\,B_{I_0,\,L_k}\downarrow^{k}]\,_{l_k,\,\tilde{L}_k}\,]_{k,\,[n,\,1]}\,\downarrow^1]_{I_0,\,I}$$

Имеем $I = T_{\left(\prod\limits_{t=1}^{r}{}^{\circ}\,\mu^t_1\right)}\left(\bigtimes\limits_{t=1}^{r} I^t\right)$, следовательно, $I_0 = \bigcup\limits_{t=1}^{r} i^t_0$ и, используя $2a\,(B)$, получим:

$[_{I_0,\,I} \equiv [_{t,\,[1,\,r]}\,[_{i^t_0,\,I^t}\,]_{t,\,[1,\,r]}$ и, соответственно, $I_{I_0,\,I} = [_{t,\,[r,\,1]}\,]_{i^t_0,\,I^t}\,]_{t,\,[1,\,r]}$,

где $I_t = [1,\,m_t]$. Аналогичным образом получим

$$[_{I_1,\,\tilde{}} \equiv [_{t_1,\,[1,\,r]}\,[_{i^t_1,\,\tilde{I}^t_1}\,]_{t_1,\,[1,\,r]};\qquad]_{I_1,\,\tilde{I}} \equiv [_{t_1,\,[r,\,1]}\,]_{i^t_1,\,\tilde{I}^t_1}\,]_{t_1,\,[r,\,1]}.$$

Для получения схемы счета надо преобразовать выражения $[_{l_k,\,\overline{L}_k}$ и $]_{l_k,\,\overline{L}_k}$. Имеем $J = T_{\pi\left(\prod\limits_{s=1}^{r}\alpha_s\right)}\left(\bigcup\limits_{s=1}^{r} J_s\right)$, где $\alpha_s \in P_{J^s}$ и $J^s = [1,\, n_s]$, $\overline{L}_k < J$. Отсюда следует, что $\overline{L}_k$ можно написать в виде $\overline{L}_k = T_{\left(\sum\limits_{s=1}^{r}\beta_s\right)}\left(\bigcup\limits_{s=1}^{r}\overline{L}_k^s\right)$, где $\overline{L}_k^s \subset J^s$, $\beta_s \in P_{\overline{L}_k^s}$.

Тогда, используя $4a\,(B)$, можно написать

$$[_{l_k,\,\overline{L}_k} \equiv [_{s,\,[1,\,r]}[_{l_k^s,\,\overline{L}_k^s}; \qquad]_{l_k,\,L_k} \equiv]_{l_k^s,\,\overline{L}_k^s}]_{s,\,[1,\,r]}.$$

Предположим, что известна схема, вычисляющая значение функции

$$P(l_k^s) = \begin{cases} 1, \text{ если } l_k^s \in \overline{L}_k^s, \\ 0, \text{ в противном случае}, \end{cases}$$

Тогда $[_{l_k^s,\,\overline{L}_k^s} \equiv [_{l_k^s,\,[1,\,n_s]}\,P\,(l_k^s) \uparrow^{\overline{l}_k^s}$ и $]_{l_k^s,\,\overline{L}_k^s} \equiv \downarrow^{\overline{l}_k^s}]_{l_k^s,\,[1,\,n_s]}$.

Подставляя вместо всех выражений их эквивалентные выражения, получим схему счета для алгоритма **A**

$$\mathbf{A}^* = [_{t,\,[1,\,r]}[_{i_0^t,\,[1,\,m_t]}]_{t,\,[1,\,r]}A\,(I_0)\;P\;(I_0)\uparrow^1[_{k,\,[1,\,n]}[_{s,\,[1,\,r]}[_{l_k^s,\,[1,\,n_s]}\,P(l_k^s)\uparrow^{\overline{l}_s^k}$$

$$\{0 \to z\}\,[_{t_1,\,[1,\,r]}[_{i_1^t,\,[i_0^t+1,\,m_t]}]_{t_1,\,[1,\,r]}\,A\,(I_1)\,P\;(I_1)\uparrow^2 P\,(I_0,\,I_1,\,L_k)\uparrow^{(I_0,\,I_1,\,L_k)}$$

$$H\downarrow^{(I_0,\,I_1,\,L_k)}\downarrow^2[_{t_1,\,[r,\,1]}]_{i_1^t,\,[i_0^t+1,\,m_t]}]_{t_1,\,[r,\,1]}\,P\,(z < 2^{n-k})\uparrow^{(I_0,\,L_k)}]_{k,\,[1,\,n]}$$

$$[_{k,\,[n,\,1]}\;\omega_k\uparrow^{\overline{k}}\downarrow^{(I_0,\,L_k)}\;B_{(I_0,\,L_k)}\downarrow^{\overline{k}}\downarrow^{\overline{l}_k^s}]_{l_k^s,\,[1,\,n_s]}]_{s,\,[1,\,r]}]_{k,\,[n,\,1]}\downarrow^1$$

$$[_{t,\,[r,\,1]}]_{i_0^t,\,[1,\,m_t]}]_{t,\,[r,\,1]}.$$

Используя систему преобразований C1—C4, можно сразу написать схему программы, соответствующую данной схеме счета,

$$\overline{\mathbf{A}} = (1 \to t)\downarrow^t(1 \to i_0^t)\downarrow^{i_0^t}F\,(t)\,P\;(t > r)\uparrow^t A\,(I_0)\,P\;(I_0)\uparrow^1\;(1 \to k)\downarrow^k$$

$$(1 \to s)\downarrow^s(1 \to l_k^s)\downarrow^{l_k^s}P\,(l_k^s)\uparrow^{\overline{l}_k^s}\{0 \to z\}\;(1 \to\; t_1)\uparrow^{t_1}(i_0^t + 1 \to i_1^t)\downarrow^{i_1^t}$$

$$F\,(t_1)\,P\,(t_1 > r)\uparrow^{t_1}A\,(I_1)\,P\;(I_1)\uparrow^2 P\;(I_0,\,I_1,\,L_k)\uparrow^{(I_0,\,I_1,\,L_k)}\;H\downarrow^{(I_0,\,I_1,\,L_k)}$$

$$\downarrow^2(r \to t_1)\downarrow^{t_1'}F\,(i_1^t)\,P\,(i_1^t > m_t)\uparrow^{i_1^t}F^{-1}\;(t_1)\,P\,(t_1 < 1)\uparrow^{t_1'}P\,(z < 2^{n-k})\uparrow^{(I_0,\,L_k)}$$

$$F\,(k)\,P\,(k > n)\uparrow^k(n \to\; k)\downarrow^{k'}\omega_k\uparrow^{\overline{k}}\;\downarrow^{(I_0,\,L_k)}B_{(I_0,\,L_k)}\downarrow^{\overline{k}}\downarrow^{\overline{l}_k^s}F\,(l_k^s)$$

$$P\,(l_s^k > n_s)\uparrow^{l_s^k}F\,(s)\,P\,(s > r)\uparrow^s F^{-1}\;(k)\,P\,(k < \;1)\uparrow^{k'}\downarrow^1(r \to\; t)\downarrow^{t'}$$

$$F\,(i_t^{\circ})\,P\,(i_t^{\circ} > m_t)\uparrow^{i_0^t}F^{-1}\,(t)\,P\,(t < 1)\uparrow^{t'}.$$

3.4. Вычисление ранга r-мерной матрицы.

r-мерной матрицей ($r \geqslant 2$) порядка n назовем таблицу в r-мерном пространстве следующего вида: $A_n^r = (a_{i^1, i^2, \ldots, i^r})$, где $a_{i^1, i^2, \ldots, i^r}$ действительные числа, а параметры i^t удовлетворяют условиям $1 \leqslant i^t \leqslant n$ для всех $t = 1, 2, \ldots, n$.

Значение определителя d матрицы A_n^r вычисляется по формуле

$$d = \sum_{(1)} (a_{1, i_1^2 \ldots i_1^r} \sum_{(2)} (a_{2, i_2^2 \ldots i_2^r}) \cdots \sum_{(n)} (a_{n, i_n^2 \ldots i_n^r} M) \cdots)),$$

где $i_1^t, i_2^t, \cdots, i_n^t$ различные значения параметра $i^t \, (t \geqslant 2)$, $\sum\limits_{(k)}$ — распространяется по всевозможным значениям параметров i_k^t, удовлетворяющих условиям $1 \leqslant i_k^t \leqslant n$ и $i_k^t \neq i_1^t, i_2^t \cdots i_{k-1}^t \, (t \geqslant 2)$, M — числовой коэффициент, равный ± 1 в зависимости от четности подстановок в таблице

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & n \\ i_1^2 & i_2^2 & \cdot & \cdot & \cdot & i_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ i_1^n & i_2^n & \cdot & \cdot & \cdot & i_n^n \end{pmatrix}$$

(положим, что известен оператор, вычисляющий значение M).

Определим ранг матрицы A_n^r как наибольший порядок отличных от нуля миноров (миноры определяются обычным образом).

Пусть $\tilde{i}_t = [1, n]$ — значение параметра i_r, $t = 1, 2, \cdots, r$, с естественным отношением порядка μ_t, а

$$\tilde{I}_k^t = T_{\left(\prod\limits_{u=1}^{k}{}^{\circ} \beta_t\right)} \left(\mathop{\mathrm{X}}_{u=1}^{k} \tilde{i}_u^t \right),$$

и $I_k^t = (i_1^t, i_2^t, \ldots, i_k^t)$ есть произвольный элемент I^k.

Пусть, далее,

$$\tilde{I}^k = T_{\left(\prod\limits_{t=1}^{r}{}^{\circ}\left(\prod\limits_{u=1}^{k}{}^{\circ} \beta_t\right)\right)} \left(\mathop{\mathrm{X}}_{t=1}^{r} \tilde{I}_k^t \right),$$

и $I_k = (I_k^1, I_k^2, \cdots, I_k^r)$ — произвольный элемент множества $\tilde{I}^k$. Введем следующие обозначения:

$$\tilde{J}_k^t = \{(i_1^t, i_2^t, \ldots, i_k^t) \colon i_u^t \neq i_1^t, i_2^t, \ldots, i_{u-1}^t, i_4^t \in \tilde{i}^t, 1 \leqslant u \leqslant k\},$$

$$\tilde{J}^k = \{(I_k^1, I_k^2, \ldots, I_k^r); I_k^t \in \tilde{J}_k^t, \quad 1 \leqslant t \leqslant r\}.$$

Произвольные элементы $J_k^t \in \tilde{J}_k^t \subset \tilde{I}_k^t$ и $J^k \in \tilde{J}^k \in I^k$ назовем допустимыми.

Обозначим через $A(I_0^k)$ минор $(n-k)$-го порядка, который получается из матрицы A_n^r вычеркиванием элементов, параметры которых принадлежат $I_0^k \subset \overline{I}_r^k$.

Пусть $\mathbf{A}(I_0^k)$ вычисляет значение d минора $A(I_0^k)$, тогда схема алгоритма для вычисления ранга матрицы будет иметь вид

$$A = \lfloor_{k,\,[0,\,n]} \lfloor_{I_0^k,\,\overline{I}^k} \mathbf{A}(I_0^k)\, P\ (d = 0) \uparrow^r \rfloor_{I_0^k,\,\overline{I}^k} \rfloor_{k,\,[0,\,n]} \downarrow^r [(n-k) \to d].$$

При этом ранг матрицы будет равен $n-k$.

Предположим, что числа $\tau_1^1, \tau_2^1, \dots, \tau_{n-k}^1$ не входят в набор $I_{0,k}^1$ и $1 \leqslant \tau_1^1 < \tau_2^1 < \dots < \tau_{n-k}^1 \leqslant n$. Пусть, далее, τ_μ^l некоторое значение параметра i^l, не входящее в набор $I_{0,k}^l$, $l = 2, 3 \dots, r$, и $\mu = 1, 2, \dots, n-k$. Набор $(\tau_1^l, \tau_2^l, \dots, \tau_{n-k}^l)$ назовем допустимым, если $\tau_\mu^l \,\overline{\in}\, I_{0,k}^l$, и тогда значение минора $A(I_0^k)$ можно вычислять по следующей формуле:

$$d = \sum_{\tau_1^r} (\dots \sum_{\tau_1^r} (a_{\tau_1^1 \tau_1^2 \dots \tau_1^r} \sum_{\tau_2^r} (\dots \sum_{\tau_2^r} (a_{\tau_2^1 \tau_2^2 \dots \tau_2^r} \dots$$

$$\dots \sum_{\tau_2^{n-k}} (\dots \sum_{\tau_{n-k}^r} (a_{\tau_{n-k}^1, \tau_{n-k}^2 \dots \tau_{n-k}^r} M) \dots) \dots) \dots)) \dots),$$

где суммы распространяются по таким значениям $1 \leqslant \tau_\mu^l \leqslant n$, для которых набор $(\tau_1^l, \tau_2^l, \dots, \tau_{n-k}^l)$ допустим.

Обозначим множество допустимых значений параметра τ_μ^l через $\overline{\tau}_\mu^l$. Пусть известны операторы:

1) $B_{\tau_\mu^1 \tau_\mu^2 \dots \tau_\mu^r}$ — умножает число $a_{\tau_\mu^1, \tau_2^\mu \dots \tau_r^\mu}$ на $C_{\mu-1}$ и помещает в C_μ $(C_0 = 1)$.

2) D — вычисляет значение M, и $C_{n-k} M$ прибавляет на d (в начале счета $d = 0$).

3) z_μ — находит значение τ_μ^l.

Тогда алгоритм для вычисления значения d можно записать в виде

$$\mathbf{A}(I_0^k) = \lfloor_{\tau_1^2,\,\overline{\tau}_1^2} \dots \lfloor_{\tau_1^r,\,\overline{\tau}_1^r} z_1 B_{\tau_1^1, \tau_1^2 \dots \tau_1^r} \lfloor_{\tau_2^2,\,\overline{\tau}_2^2} \dots \lfloor_{\tau_2^r,\,\overline{\tau}_2^r}$$

$$z_2 B_{\tau_2^1, \tau_2^2 \dots \tau_2^r} \dots \lfloor_{\tau_{n-k}^2,\,\overline{\tau}_{n-k}^2} \dots \lfloor_{\tau_{n-k}^r,\,\overline{\tau}_{n-k}^r} z_{n-k}$$

$$B_{\tau_{n-k}^1, \tau_{n-k}^2, \dots, \tau_{n-n}^r} D \rfloor_{\tau_{n-k}^r,\,\overline{\tau}_{n-k}^r} \dots \rfloor_{\tau_{n-k}^2,\,\overline{\tau}_{n-k}^2} \dots \rfloor_{\tau_2^r,\,\overline{\tau}_2^r} \dots \rfloor_{\tau_2^2,\,\overline{\tau}_2^2} \dots$$

$$\dots \rfloor_{\tau_1^r,\,\overline{\tau}_1^r} \dots \rfloor_{\tau_1^1,\,\overline{\tau}_1^1}.$$

Пусть известна функция алгебры логики

$$P_k(l, \mu) = \begin{cases} 1, \text{ если } \tau_\mu^l \,\overline{\in}\, I_{0,k}^l \text{ и } \tau_\mu^l \neq \tau_1^l, \dots \tau_{\mu-1}^l, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Функция $P_k(l, \mu) = 1$ на допустимых и только допустимых значениях параметра τ_μ^l, следовательно, $P_k(l, \mu)$ является характеристической функцией множества $\bar{\tau}_\mu^l$.

Обозначим $[_{\tau_\mu^2, \bar{\tau}_\mu^2} \cdots [_{\tau_\mu^r, \bar{\tau}_\mu^r} = \mathbf{B}_\mu$ и соответственно

$$]_{\tau_\mu^r, \bar{\tau}_\mu^r} \cdots]_{\tau_\mu^2, \bar{\tau}_\mu^2} = \mathbf{D}_\mu \text{ при } 1 \leqslant \mu \leqslant n-k.$$

Условия утверждения C выполняются, и, следовательно, схему $\mathrm{A}(I_0^k)$ можно записать в следующем виде:

$$\mathrm{A}(I_0^k) = \mathbf{B}_1 Z_1 B_{\tau_1^1 \ldots \tau_1^r} \mathbf{B}_2 Z_2 B_{\tau_2' \ldots \tau_2^r} \cdots \mathbf{B}_{n-k} Z_{n-k} B_{\tau_{n-k}' \ldots \tau_{n-k}^r} D$$

$$\mathbf{D}_{n-k} \mathbf{D}_2 \mathbf{D}_1 \equiv [_{\mu, [1, n-k]} \mathbf{B}_\mu Z_\mu B_{\tau_\mu' \ldots \tau_\mu^r}]_{\mu, [1, n-k]} D [_{\mu, [n-k, 1]} \mathbf{D}_\mu]_{\mu, [n-k, 1]} \equiv$$

$$\equiv [_{\mu, [1, n-k]} [_{\tau_\mu^2, \bar{\tau}_\mu^2} \cdots [_{\tau_\mu^r, \bar{\tau}_\mu^r} Z_\mu B_{\tau_\mu' \ldots \tau_\mu^r}]_{\mu, [1, n-k]} D [_{\mu, [n-k, 1]}]_{\tau_\mu^r, \bar{\tau}_\mu^r} \cdots$$

$$\cdots]_{\tau_\mu^2, \bar{\tau}_\mu^2}]_{\tau_\mu', \bar{\tau}_\mu'}.$$

Обозначим

$$[_{\tau_\mu^l, \bar{\tau}_\mu^l} = \mathbf{N}_{l_\mu, \mu}$$

и, соответственно,

$$]_{\tau_\mu^l, \bar{\tau}_\mu^l} = \mathbf{M}_{l_\mu, \mu}.$$

Тогда

$$\mathbf{B}_\mu = \mathbf{N}_{2, \mu} \mathbf{N}_{3, \mu} \cdots \mathbf{N}_{r\mu}; \quad \mathbf{D}_\mu = \mathbf{M}_{r\mu} \cdots \mathbf{M}_{3\mu} \mathbf{M}_{2\mu}.$$

Используя C, получим

$$\mathrm{A}(I_0^k) \equiv [_{\mu, [1, n-k]} [_{l_\mu, [2, r]} \mathbf{N}_{l_\mu, \mu}]_{l_\mu, [2, r]} Z_\mu B_{\tau_\mu' \ldots \tau_\mu^r}]_{\mu, [1, n-k]} \times$$

$$\times D [_{\mu, [n-k, 1]} [_{l_\mu, [r, 2[} \mathbf{M}_{l_\mu, \mu}]_{l_\mu, [r, 2]}]_{y, [n-k, 1]}.$$

Подставляя вместо $\mathbf{N}_{l_\mu, \mu}$ и $\mathbf{M}_{l_\mu, \mu}$ соответствующие им значения, получим следующую запись для схемы $\mathrm{A}(I_0^k)$:

$$\mathrm{A}(I_0^k) = [_{\mu, [1, n-k]} [_{l_\mu, [2, r]} [_{\tau_\mu^l, \bar{\tau}_\mu^l}]_{l_\mu, [2, r]} Z_\mu B_{\tau_\mu' \ldots \tau_\mu^r}]_{\mu, [1, n-k]} D$$

$$[_{\mu, [n-k, 1]} [_{l_\mu, [r, 2]}]_{\tau_\mu^l, \bar{\tau}_\mu^l}]_{l_\mu, [r, 2]}]_{\mu, [n-k, 1]},$$

Z_μ — вычисляет значение τ_μ', первого числа из $[1, n]$, удовлетворяющего условиям $\tau_\mu' \geqslant \tau_{\mu-1}' + 1$ и $\tau_\mu' \mathrel{\overline{\in}} I_{01}^k$ $(\tau_0 = 0)$.

Пусть задана функция алгебры логики

$$P(h \mathrel{\overline{\in}} I_{01}^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } h \text{ не входит в набор } I_{01}^k, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда схема

$$[_{h, [\tau_{\mu-1}' + 1, n]} P(h \mathrel{\overline{\in}} I_{01}^k) \uparrow^{h'} \{h \to \tau_\mu'\} \, \omega \uparrow^{h''} \downarrow^{h'}]_{h, [\tau_{\mu-1}' + 1, n]} \downarrow^{h''}$$

будет вычислять значение τ_μ, так что можем полагать, что $Z_{\overline{\mu}}$ нам известно.

Так как $P_k(l_k)$ характеристическая функция множества $\tau_\mu^t \subset [1, n]$, то, используя утверждение 5 (B), получим

$$[_{\tau_\mu^t, \overline{\tau}_\mu^t} = [_{t, [1, n]} P_k(l_\mu) \uparrow^{(k, l_\mu)}$$

и, соответственно,

$$]_{\tau_\mu^t, \overline{\tau}_\mu^t} = \downarrow^{(k, l_\mu)}]_{\tau_\mu^t, [1, n]}.$$

Теперь преобразуем схему алгоритма **A**.

Имеем $\overline{J}_k = T_{\left(\overset{r}{\underset{t=1}{\Pi^\circ}}\left(\overset{k}{\underset{u=1}{\Pi^\circ}} \beta_u\right)\right)}\left(\overset{k}{\underset{u=1}{X}} \overline{J}_k^t\right)$ и $I_0^k = \overset{r}{\underset{t=1}{\cup}} I_{0k}^t$.

Следовательно, из $2a$ (B) вытекает

$$[_{I_0^k, \overline{J}_k} = [_{t\ [1, r]} [_{I_{0k}^t, \overline{J}_r^t}]_{t\ [1, r]}$$

и, соответственно,

$$]_{I_0^k, \overline{J}_k} = [_{t, [r, 1]}]_{I_{0k}^t, \overline{J}_k^t}]_{t, [r, 1]}.$$

Далее, $\overline{J}_k^t = T_{\left(\overset{k}{\underset{t=1}{\Pi^\circ}} \beta_t\right)}\left(\overset{k}{\underset{u=1}{X}} i_u^t\right)$ и соответственно $I_{0k}^t = \overset{k}{\underset{u=1}{\cup}} i_{0u}^t$.

Так что $$[^t_{I_{0k}, \overline{J}_k^t} = [_{u\ [1, k]} [_{i_{0u}^t, \overline{i}_u^t}]_{u, [1, k]},$$

и $$]_{I_0^k, \overline{J}_k^t} = [_{u, [k, 1]} [_{i_{0u}^t, \overline{i}_u^t}]_{u, [k, 1]},$$

где для получения допустимых наборов достаточно брать $\overline{i}_u^t = [i_{0, u-1}^t + 1, n]$.

После этих преобразований схема **A** примет вид

$$\mathbf{A} = [_{k, [0, n]} [_{t, [1, r]} [_{u, [1, k]} [_{i_{0u}^t, [i_{0, u-1}^t + 1, n]}]_{u, [1, k]}]_{t, [1, r]} [_{\mu, [1, n-k]}$$
$$[_{l_\mu [2, r]} [_{\tau_\mu^t [1, n]} P_k(l, \mu) \uparrow^{(k, l_\mu)}]_{l_\mu [2, r]} Z_\mu B_{\tau_\mu^1, \tau_\mu^2, \ldots \tau_\mu^r}]_{\mu, [1, n-k]}$$
$$D [_{\mu, [n-k, 1]} [_{l_\mu [r, 2]} \downarrow^{(k, l_\mu)}]_{\tau_\mu^t [1, n]}]_{l_\mu, [r, 2]}]_{\mu, [n-k, 1]} P(d = 0) \uparrow^r [_{t, [r, 1]}$$
$$[_{u, [k, 1]}]_{i_{0u}^t [i_{0, u-1}^t + 1, n]}]_{u, [k, 1]}]_{t, [r, 1]}]_{k, [0, n]} \downarrow^r [(n-k) \to d],$$

которому соответствует следующая схема программы:

$$\overline{\mathbf{A}} = (0 \to k) \downarrow^k (1 \to t) \downarrow^t (1 \to u) \downarrow^u (i_{0, u-1}^t + 1 \to i_{0, u}^t) \downarrow^{i_{0, u}^t} F(u) \times$$
$$\times P(u > k) \uparrow^u F(t) P(t > r) \uparrow^t (1 \to \mu) \downarrow^\mu (2 \to l_\mu) \downarrow^{l_\mu} (1 \to \tau_\mu^t) \downarrow^{\tau_\mu^t} \times$$
$$\times P_k(l_\mu) \uparrow^{(k, l_\mu)} F(l_\mu) P(l_\mu > r) \uparrow^{l_\mu} Z_\mu B_{\tau_\mu^1, \tau_\mu^2 \ldots \tau_\mu^r} F(\mu) P(\mu > n - k) \times$$

$$\times \uparrow^{\mu} D(n-k\to\mu)\downarrow^{\mu'}(r\to l_{\mu})\downarrow^{l'_{\mu}}\downarrow^{(k,\, l_{\mu})} F(\tau^{l}_{\mu})\, P(\tau^{l}_{\mu}>n)\uparrow^{\tau^{l}_{\mu}} F^{-1}(l_{\mu})\times$$

$$\times P(l_{\mu}<1)\uparrow^{l'_{\mu}} F^{-1}(\mu)\, P(\mu<1)\uparrow^{\mu'} P(d=0)\uparrow'(r\to t)\downarrow^{t'}(k\to u)\downarrow^{u'}\times$$

$$\times F(i^{t}_{0u})\, P(i^{t}_{0u}>n)\uparrow^{i^{t}_{0u}} F^{-1}(u)\, P(u<1)\uparrow^{u'} F^{-1}(t)\, P(t<1)\uparrow^{t'}\times$$

$$\times F(k)\, P(k>n)\uparrow^{k}\downarrow'\{(n-k)\to d\}.$$

Ռ. Ն. ՏՈՆՈՅԱՆ

ԱԼԳՈՐԻԹՄԱԿԱՆ ՍԽԵՄԱՅԻՑ՝ ՀԱՇՎՄԱՆ ԵՎ ԾՐԱԳՐՄԱՆ ՍԽԵՄԱՆԵՐԻՆ ՖՈՐՄԱԼ ԱՆՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Այս աշխատության առաջին մասում համառոտակի շարադրվում է օգտագործվող ծրագրման լեզուն և ալգորիթմական սխեմաների ձևափոխությունների մի սիստեմ։

Աշխատության երկրորդ մասում նկարագրվում է սահմանված ապարատի կիրառումը մի քանի օրինակների վրա, որը ցույց է տալիս ընտրված ձևափոխությունների սիստեմի էֆեկտիվությունը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А. А.* О логических схемах программ, сб. „Проблемы кибернетики", вып. 1, 1958, 46, 74.
2. *Ляпунов А. А.* К алгебраической трактовке программирования, сб. „Проблемы кибернетики", вып. 8, 1962, 235, 241.
3. *Подловченко Р. И.* Об основных понятиях программирования, сб. „Проблемы кибернетики", вып. 3, 1960, 123, 139.
4. *Подловченко Р. И.* О преобразованиях схем программ и их применении в программировании, сб. „Проблемы кибернетики", вып. 7, 1962, 161, 188.
5. *Янов Ю. И.* О логических схемах алгоритмов, сб. „Проблемы кибернетики", вып. 1, 1958, 75, 127.
6. *Тоноян Р. Н.* Некоторые эквивалентные преобразования схем алгоритмов. ДАН СССР, 1963, 151, 1.
7. *Биркгоф Г.* Теория структур, М., 1953.