

Б. А. КОСТАНДЯН

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ, СВЯЗАННОЙ С СОЗДАНИЕМ МАГНИТНОГО БАРАБАНА С ПЛАВАЮЩЕЙ БЛОК-ГОЛОВКОЙ

Емкость запоминающего устройства на магнитном барабане может быть существенно увеличена за счет увеличения плотности записи информации, что достигается, в основном, уменьшением зазора между барабаном и блок-головкой. При маленьких зазорах вследствие биения, неровности поверхности барабана, теплового расширения и т. д. возникает возможность контакта между головкой и барабаном, приводящая к разрушению магнитного слоя, и, кроме того, существенной модуляции амплитуд в серии воспроизводимых импульсов. Следовательно, малые зазоры необходимо сохранять постоянными. Задача поддержания малого зазора постоянным проще всего решается применением плавающей подвески блок-головки [1].

Сущность этой идеи заключается в следующем: при определенной форме блок-головки между нею и барабаном (со слоем вязкой жидкости) возникает отталкивающее давление, которое при уменьшении зазора увеличивается по определенному закону и тем самым может препятствовать уменьшению последнего. Укажем, что в зависимости от размеров блок-головки при некоторых конфигурациях равнодействующая давления жидкости на головку с уменьшением зазора уменьшается. В теории смазки плоских поверхностей установлено, что нормальная составляющая давления P обратно пропорциональна квадрату величины минимального зазора; но это не всегда можно применять для магнитного барабана и блок-головок. Приобретают важность не только размеры головки, но и ее расположение относительно барабана.

Для исследования движения головки относительно барабана при любой конструкции подвески нужно иметь распределение нормального давления смазочного слоя на блок-головку. Задача определения давления жидкости на блок-головку тесным образом связана с гидро-

динамической теории смазки в конечных подшипниках скольжения. Работы Н. Петрова, О. Рельвольдса, А. Митчелла, А. Зоммерфельда, Л. Лейбензона, Н. Жуковского, С. Чалыгина и др. по теории смазки вязкой жидкостью можно найти в сборнике [1]. Некоторые результаты указанных выше авторов приводятся также в главе VIII монографии [2]. Математическая теория воздушных подшипников детально рассмотрена в работе [3], где приводится метод численного решения нелинейного дифференциального уравнения в частных производных. В теории смазки вязкой жидкостью результаты, в основном, получены при существенных упрощениях, недопустимых в случае магнитных головок малых размеров. В указанных выше работах ширина подшипника предполагается бесконечной, влияние краевых эффектов не учитывается и т. д.

Задача о смазке конечного подшипника в общем случае не поддается точному аналитическому решению. Для решения этой задачи мы используем наиболее точное из известных нам уравнений, характеризующих распределение давления в слое вязкой несжимаемой жидкости между шипом и подшипником, и решаем ее численным методом. Эта задача сводится к решению первой краевой задачи для уравнения эллиптического типа с переменными коэффициентами, которую решили на ЭВМ „Раздан-2“ М. К. Вартамян и Э. К. Альперович.

§ 1. Уравнение движения головки

Подвеска, на которой держится магнитная головка, должна дать возможность головке перемещаться в направлении нормали к поверхности барабана. Такое движение может иметь головка, подвеска ко-

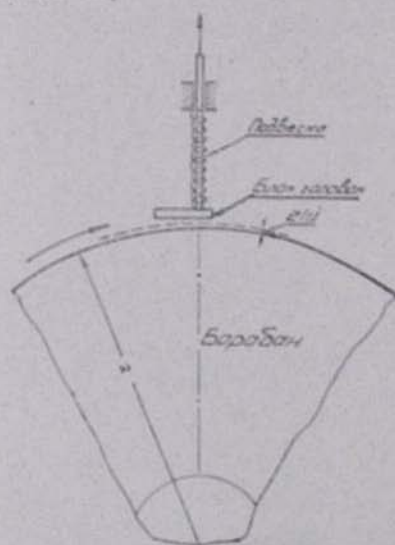


Рис 1

торой жестко связана с ней и имеет фиксированную ось вращения (так как нас интересует перемещение головки не больше чем 10—20 микронов, то дугу окружности, по которой движется головка, можно заменить прямой). Более простая конструкция подвески изображена на рис. 1. Пусть внешнее усилие создается пружиной и уравновешивается равнодействующей давления смазочного слоя при заданном расположении блок-головки. При вращении барабана вследствие биения, неровности поверхности барабана и теплового расширения блок-головка совершает некоторое вынужденное движение, т. е. зазор между барабаном и головкой будет меняться во времени. Минимальное расстояние

между головкой и барабаном, которое требуется сохранить постоянным, обозначим через $h_m(t)$. При движении барабана имеем

$$h_m(t) = h_m^0 + \xi(t) - z(t),$$

где h_m^0 — требуемое постоянное расстояние,

$\xi(t)$ — перемещение головки от равновесного положения,

$z(t)$ — сближение поверхности барабана с головкой за счет биеения и теплового расширения.

Задача сводится к подбору таких параметров блок-головки, барабана и пружины, при которых

$$|\xi(t) - z(t)| < \varepsilon$$

для любого момента времени $t \geq t_0$, где $\varepsilon > 0$ задается как допуск изменения минимального зазора.

Дифференциальное уравнение возмущенного движения головки можно представить в виде

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + 2\delta \frac{d\xi}{dt} + \frac{\alpha}{m} \xi = \frac{1}{m} [W(h_m^0 + \xi - z(t)) - W(h_m^0)], \quad (1)$$

где m — масса блок-головки, δ — эквивалентный коэффициент демпфирования, W — равнодействующая нормального давления жидкости на блок-головку.

Коэффициент жесткости пружины α подбирается так, чтобы при желаемом h_m^0 усилие пружины уравновесилось бы давлением $W(h_m^0)$

$$\alpha = \frac{W(h_m^0)}{h_m^0 + b},$$

где $h_m^0 + b$ — перемещение конца пружины от естественного положения до положения, при котором минимальный зазор равен h_m^0 . Величина b должна быть положительной, чтобы в случае удаления барабана от головки пружина смогла бы заставить головку следить за барабаном. Выражение $W(h_m^0 + \xi - z(t)) - W(h_m^0)$ в правой части уравнения (1) характеризует избыточное давление смазочной пленки при уменьшении зазора.

Функция W определяется по формуле

$$W = \int_S [P_1(x, y) - P_a] ds, \quad (2)$$

где $P_1(x, y)$ — нормальная составляющая давления жидкости на блок-головку в точке (x, y) , P_a — атмосферное давление, S — внутренняя, по отношению к жидкости, поверхность блок-головки.

Давление $P_1(x, y)$ в случае несжимаемой вязкой жидкости удовлетворяет дифференциальному уравнению [5]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ h^3 \left(1 - \frac{h}{D} \right) \frac{\partial P_1}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ h^3 \left(1 + \frac{h}{D} \right) \frac{\partial P_1}{\partial y} \right\} = \\ = 6\mu u \frac{\partial}{\partial x} \left\{ h \left(1 - \frac{h}{3D} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

при граничном условии

$$P_1(x, y)|_{\Gamma} = P_a, \quad (4)$$

где Γ — внешний контур области S .

$h(x, y)$ — радиальное расстояние точки (x, y) блок-головки от барабана.

μ — коэффициент вязкости.

u — линейная скорость точек поверхности барабана.

D — диаметр барабана.

Ось x -ов направлена по окружности барабана в направлении движения, а y — по образующей барабана.

При выводе уравнения (3) из общих уравнений динамики вязкой жидкости допущенная ошибка имеет порядок $\left(\frac{h}{B}\right)^2$, где B — размер

головки по оси x [4]. Для нашей цели представляют интерес зазоры размерами всего несколько микронов, т. е. отношение h/B , имеющее порядок 10^{-2} или 10^{-3} . Пренебрежение объемными и инерционными силами, действующими на слой жидкости, по сравнению с силами вязкого трения допустимо, если модифицированное число Рейнольдса

$$R^* = \frac{\rho u B}{\mu} \left(\frac{h}{B}\right)^2$$

намного меньше единицы, где ρ — плотность жидкости.

Дифференциальное уравнение (3) и граничное условие (4) после замены

$$P_1(x, y) = 6\mu u P(x, y) + P_a \quad (5)$$

примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ h^3 \left(1 - \frac{h}{D} \right) \frac{\partial P}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ h^3 \left(1 + \frac{h}{D} \right) \frac{\partial P}{\partial y} \right\} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(h - \frac{h^2}{3D} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

и

$$P(x, y)|_{\Gamma} = 0. \quad (7)$$

Легко видеть, что $P_1(x, y)$ зависит от μu линейно. Нормальная составляющая давления W и точка ее приложения x_c после замены (5) примут вид

$$W = 6\mu u \iint_S P(x, y) dS \quad (8)$$

и

$$x_c = \frac{\iint_S x P(x, y) dS}{\iint_S P(x, y) dS}. \quad (9)$$

Функция $h(x, y)$, входящая в уравнение (6), определяется формой и размерами головки, ее расположением относительно барабана и диаметром барабана.

Мы рассматриваем плоскую головку, расположенную параллельно образующей барабана. Тогда $h(x, y)$ будет определяться по формуле

$$h(x, y) = h_m^0 + \frac{1}{D} (x - x_m)^2 \quad (10)$$

$$0 \leq x \leq B, \quad x_m > \frac{1}{2} B,$$

где x_m — абсцисса ближайшей точки головки от барабана. Значения W и x_c зависят от следующих параметров: μ, D, B, L, x_m и h_m^0 , где L — размер головки в направлении оси y . Укажем, что x_c не зависит от μ .

Для исследования стабильности малого зазора между блок-головкой с размерами $B \times L$ и барабаном диаметра D необходимо иметь зависимости W и x_c от величин h_m и x_m . В § 3 приводятся указанные зависимости в виде графиков.

§ 2. Исследование движения головки

Разложив в ряд Тейлора функцию W в точке h_m^0 и предполагая, что x_m остается постоянным, уравнение (1) можно представить в виде

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + 2\delta \frac{d\xi}{dt} + k\xi = -\frac{1}{m} \frac{\partial W}{\partial h_m} \Big|_{h_m=h_m^0} \cdot z(t) + A_1 [\xi - z(t)]^2 + A_2 [\xi - z(t)]^3 + \dots, \quad (11)$$

$$\text{где } k = \frac{1}{m} \left(a - \frac{\partial W}{\partial h_m} \Big|_{h_m=h_m^0} \right),$$

$$A_1 = \frac{1}{m} \frac{\partial^2 W}{\partial h_m^2} \Big|_{h_m=h_m^0}, \quad (12)$$

$$A_2 = \frac{1}{m} \frac{\partial^3 W}{\partial h_m^3} \Big|_{h_m=h_m^0}.$$

.....

Условие почти постоянства малого зазора сводится к требованию, чтобы $|\xi - z(t)| < \varepsilon$ для любого $t > t_0$ при любых возможных для данной конструкции барабана функциях $z(t)$. Функция $z(t)$ характеризует биение и расширение барабана, ее можно задавать, исходя из конкретной конструкции барабана.

В общем случае исследование вынужденных колебаний, определяемых уравнением (11), затруднительно, но, несмотря на это, можно получить конкретные выводы общего характера. Рассмотрим два конкретных случая:

а) внешнее возмущение отсутствует, т. е. $z(t) = 0$;

б) коэффициенты $A_1 = A_2 = \dots = 0$, т. е. функцию W можно заменить линейной функцией, что допустимо, если $|\xi - z(t)|$ мало ме-

няется и λ_m и λ_m^* подобраны надлежащим образом. В этом можно убедиться по графикам функции W , приведенным в § 3.

В случае а) уравнение (1) представим в виде следующей системы

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{\xi}}{dt} &= \eta \\ \frac{d\eta}{dt} &= -2\delta\eta - k\xi + A_1\xi^2 + A_2\xi^3 + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

Система (13) имеет решение $\dot{\xi} = 0$, $\eta = 0$. Если $k > 0$ и $\delta > 0$, то по теореме об устойчивости по первому приближению Ляпунова [6] заключаем, что положение равновесия $\dot{\xi} = 0$, $\eta = 0$ асимптотически устойчиво. В случае, когда $\delta = 0$, система (13) описывает колебания консервативной системы, для которой особая точка $\dot{\xi} = 0$, $\eta = 0$ будет центром, если $k > 0$ [7].

Таким образом, при $z(t) = 0$ условие

$$\left. \frac{W(h_m)}{h_m + b} - \frac{\partial W}{\partial h_m} \right|_{h_m = h_m^*} > 0 \quad (14)$$

является достаточным для обеспечения малого постоянного зазора.

Численное расширение для головки размерами $B = 5$ мм, $L = 1$ мм показывает, что зависимость W от h_m в промежутке $[2\gamma k, 7\gamma k]$ примерно имеет вид $W = \gamma h_m^{-(1+\alpha)}$, где γ — независимый от h_m параметр, а α — число больше нуля. Ясно, что для такой головки условие (14) будет выполняться. Причем, если в системе ограничиться членами до ξ^3 включительно, то для системы (11) точка $\dot{\xi} = 0$, $\eta = 0$ является единственной особой точкой вида центра.

В случае б) уравнение (11) примет вид

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\delta \frac{d\xi}{dt} + k\xi = -\frac{1}{m} \left. \frac{\partial W}{\partial h_m} \right|_{h_m = h_m^*} \cdot z(t). \quad (15)$$

Пусть функция $z(t)$ имеет вид

$$z(t) = a_1 \sin(\omega t + \beta) + a_2 (1 - e^{-bt}), \quad (16)$$

где первый член в правой части характеризует биение барабана, а второй — тепловое расширение. Параметры ω и b характеризуют соответственно частоту биения и скорость теплового расширения. Анализируя вынужденные колебания, описываемые уравнением (15) с учетом (16) при малых коэффициентах демпфирования $\delta > 0$, приходим к следующему выводу: для сохранения малого зазора h_m почти постоянным с помощью плавающей подвески необходимо, чтобы удовлетворялись следующие три условия:

$$k \gg \omega^2, \quad (17)$$

$$k \gg b^2, \quad (18)$$

$$\left. \frac{\partial W}{\partial h_m} \right|_{h_m = h_m^*} < \frac{W(h_m^*)}{h_m^* + b}. \quad (19)$$

Первое условие (17) ясно интуитивно — собственная частота колебания головки должна быть намного больше частоты внешнего возмущения ω . Это условие упоминается в работе (1). Условие (18) в обычных условиях эксплуатации барабана будет удовлетворяться. Но когда барабан установлен на борту летательного аппарата, то возможности резкого температурного расширения не исключены; при этом также сильно изменяется коэффициент вязкости μ . По условию (19) подбираются параметры b , размеры головки и x_m (расположение головки по отношению к барабану). Условие (14) будет выполняться, если имеет место (19).

Как видно из вышесказанного, для решения задачи сохранения малого постоянного зазора нужно достаточно точно определить зависимости функции W и x_c от следующих параметров: B, L, D, h_m, x_m . Ниже приводится метод численного решения дифференциального уравнения в частных производных (6) при граничном условии (7) и вычисление интегралов (8) и (9). Результаты счета приводятся в виде графиков. По этим графикам легко проверить, при каком расположении головки выполняется условие (19). Для блок-головки размерами 5×1 мм, как видно из рис. 2–7, при минимальном зазоре порядка 3 мк указанное условие (19) выполняется, если $x_m/B \gg 0,84$, а для блок-головки размерами 22×20 мм для создания такого же постоянного зазора $h_m \approx 3$ мк необходимо, чтобы $x_m/B \gg 0,96$. Размеры блок-головки имеют существенную роль: с увеличением площади блок-головки давление W увеличивается, но поведение функции W от x_m/B и h_m сильно изменяется. Как видно из рис. 5, при блок-головке размерами 22×20 мм появляется зона, где с уменьшением зазора давление падает.

§ 3. Численное решение задачи гидродинамической теории смазки

Нормальная составляющая давления $P(x, y)$ в каждой точке поверхности блок-головки в случае несжимаемой вязкой жидкости удовлетворяет дифференциальному уравнению (6) при граничном условии (7), т. е.,

$$a(x) \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + c(x) \frac{\partial P}{\partial x} - f(x) = 0 \quad (20)$$

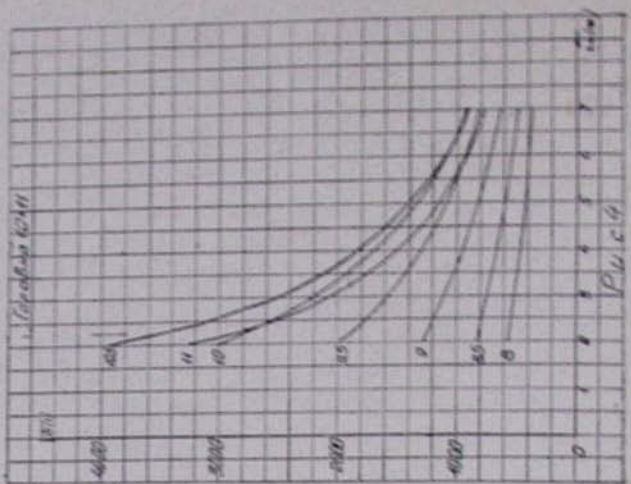
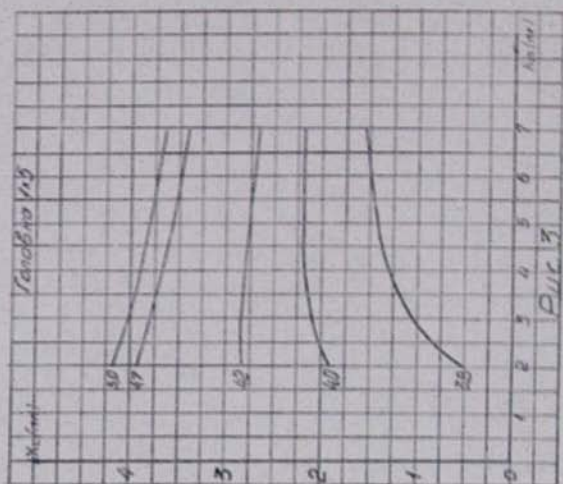
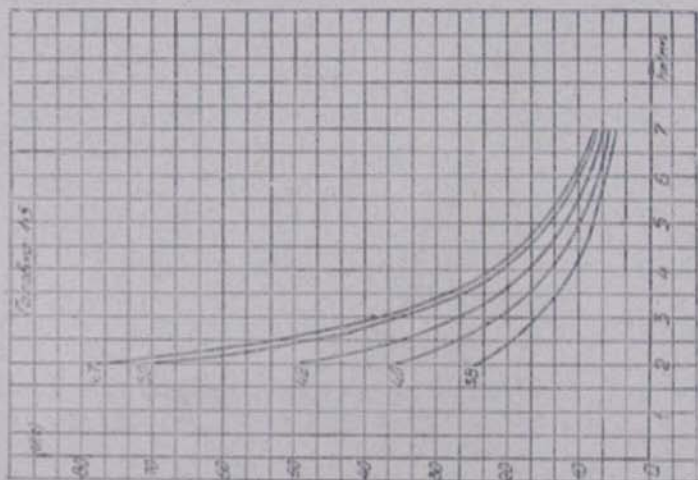
$$P(x, y)|_{\Gamma} = 0, \quad (21)$$

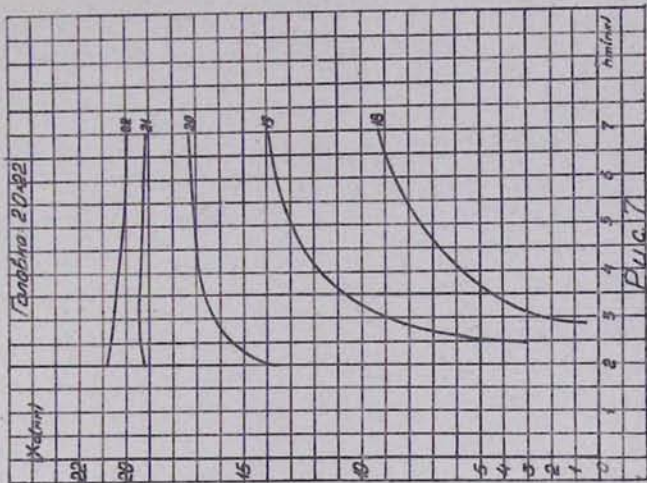
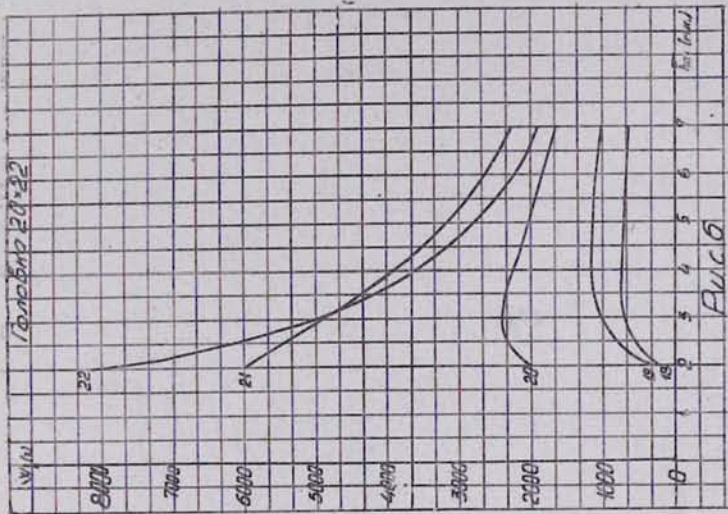
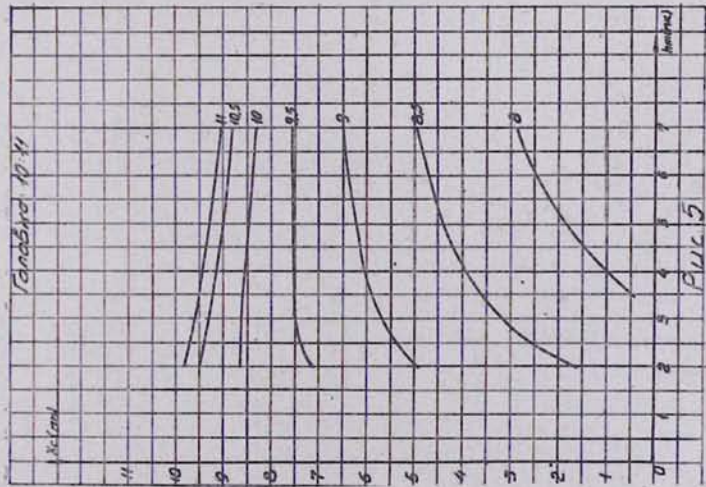
где

$$h = h_m + \frac{1}{D} (x - x_m)^2, \quad a(x) = h^3 (1 - h/D), \quad b(x) = h' \left(1 + \frac{h}{D} \right)$$

$$c(x) = h^2 h' \left(3 - \frac{4h}{D} \right), \quad f(x) = h' \left(1 - \frac{2h}{3D} \right).$$

Так как в рассмотренном нами случае $h/D \ll 1$, то уравнение (20) эллиптического типа. Задачу (20) — (21) в прямоугольной области S решаем методом сеток [8].





Обозначим $P(i\Delta x, j\Delta y) = P_{ij}$, $a(i\Delta x, j\Delta y) = a_{ij}$, $c(i\Delta x, j\Delta y) = c_{ij}$, где $\Delta x = \frac{1}{n}B$, $\Delta y = \frac{1}{m}L$ соответственно шаг сетки по оси x и y , а $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Заменяя частные производные, входящие в уравнение (20), разностными отношениями, получим следующую систему разностных уравнений для всех внутренних точек сетки:

$$P_{ij} = \frac{A_{ij}}{E_{ij}} P_{i-1,j} + \frac{B_{ij}}{E_{ij}} P_{i+1,j} + \frac{C_{ij}}{E_{ij}} (P_{i,j-1} + P_{i,j+1}) - \frac{f_{ij}}{E_{ij}}, \quad (22)$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, \dots, m-1,$$

а в граничных узлах Γ

$$P_{0,j} = P_{n,j} = P_{i,0} = P_{i,m} = 0, \quad (23)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, n; \quad j = 0, 1, \dots, m.$$

Здесь

$$A_{ij} = \frac{a_{ij}}{(\Delta x)^2} + \frac{c_{ij}}{2\Delta x}; \quad B_{ij} = \frac{a_{ij}}{\Delta x^2} - \frac{c_{ij}}{2\Delta x}, \quad (24)$$

$$C_{ij} = \frac{b_{ij}}{(\Delta y)^2}, \quad E_{ij} = \frac{2a_{ij}}{\Delta x^2} + \frac{2b_{ij}}{(\Delta y)^2}.$$

Так как функции $a(x)$, $b(x)$ и $c(x)$ непрерывны в промежутке $[0, B]$, причем $a(x) > 0$ и $b(x) > 0$, то можно выбрать Δx и Δy так, что коэффициенты A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} , E_{ij} будут положительными во всех узлах сетки.

Для того, чтобы уменьшить погрешность, возникающую при замене дифференциального уравнения (6) разностным (22), целесообразно брать $\Delta y < \Delta x$. Известно, что в случае положительности коэффициентов A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} , E_{ij} система (22) — (23) имеет единственное решение, которое следует из принципа максимума [8].

Система (22) решается методом Зейделя. Процесс Зейделя для системы (22) сходится, так как коэффициент при $P(x, y)$ в уравнении (20) равен нулю. Процесс решения начинается с выбора $P_{ij}^{(0)}$ (нулевая итерация) и кончается тогда, когда

$$\max_{(ij)} |P_{ij}^{(k+1)} - P_{ij}^{(k)}| < 2^{-20}.$$

Оба интеграла (8) и (9) вычисляются довольно просто с помощью формулы Симпсона [9].

Результаты численного решения. Для исследования движения головки представляют интерес зависимости W и x_c от x_m , h_m , D . Хотя значение x_c явно не входит в уравнение движения головки, значение точки приложения суммарного давления необходимо. Целесообразно подобрать такие параметры, чтобы при изменении h_m , x_c оставалось бы почти постоянным и внешнее усилие,

создаваемое пружиной, было приложено именно в точке x_c . Как указано выше, W зависит от μ линейно, а x_c вовсе не зависит от μ , но для конкретного практического приложения в расчетах взяты

$$\mu = 5 \cdot 10^{-7} \frac{\text{г.сек}}{\text{мм}^2}, \quad u = 3500 \frac{\text{мм}}{\text{сек}}, \quad D = 440 \text{ мм.}$$

Расчеты проводились для трех головок размерами:

- 1) $B = 5 \text{ мм}, L = 1 \text{ мм},$ 2) $B = 11 \text{ мм}, L = 10 \text{ мм},$
- 3) $B = 22 \text{ мм}, L = 20 \text{ мм}.$

Для первой головки давление W с изменением диаметра барабана достигает максимума в зоне $440 \text{ мм} < D \leq 880 \text{ мм}$, а вне этой зоны W падает сильно с уменьшением диаметра и слабо — с увеличением последнего.

Указанные значения параметров были предложены в качестве предполагаемых размеров барабана и блок-головки.

На рис. 2 и 3 приведены результаты, относящиеся к головке размерами $B = 5 \text{ мм}, L = 1 \text{ мм}$. По оси абсцисс отложены минимальные зазоры h_m , а по оси ординат соответственно W в граммах и x_c в миллиметрах. Цифры слева при каждой кривой указывают значение x_m (параметр, определяющий расположение головки относительно барабана). Аналогично на рис. 4 и 5 приводятся результаты, относящиеся к головке размерами $B = 11 \text{ мм}, L = 10 \text{ мм}$, а на рис. 6 и 7 — к головке размерами $B = 22 \text{ мм}, L = 20 \text{ мм}$.

Особый интерес представляет рис. 6, откуда видно, что с уменьшением минимального зазора суммарное давление W может уменьшаться, если $x_m \leq 20 \text{ мм}$. Расчеты показывают, что для создания постоянного малого зазора между барабаном и блок головкой с помощью плавающей подвески необходимо обратить внимание на взаимное расположение головки и барабана. Отметим, что при сравнении графиков функций W и x_c для разных головок нужно обратить внимание на их масштабы.

Բ. Ա. ԿՈՍՏԱՆԴՅԱՆ

ԼՈՂԱՅՈՂ ՊԼԽԻԿՈՎ ՄԱԳՆԵՍԱԿԱՆ ԹՄԲՈՒԿԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ
ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՄԵՆԱՆԻԿԱՅԻ ՄԻ ԽԵԴՐԻ ՍԱՍԻՆ

Ա. մ փ ո փ ո ի մ

Մագնիսական թմբուկով հիշող սարքի պարունակությունը էապես մեծացնելու համար անհրաժեշտ է ստեղծել թմբուկի մակերևույթով հաստատուն (մի քանի միլիոն) հեռավորություններ լողացող գլխիկ: Մագնիսական գլխիկը պետք է ճիշտ հասնի թմբուկի մակերևույթի խորդորորդովանը, աստանումներին և ջերմալին ընդարձակմանը:

Հողվածում քերվում է գլխիկի շարժման համասարումը և ուսումնասիրվում է հաստատուն հեռավորության կայունության հարցը: Ստացված (17), (18) և (19) պայմանները հանգրվանում են թմբուկի և գլխիկի միջև եղած փոքր բացուկը $h_m(t)$ համարյա հաստատուն պահելու անհրաժեշտ պայմանները, մակերևույթի (16) ախտի գրգռումների գնահատում:

Շարժման համասարումը պարունակում է գլխիկի և թմբուկի միջև գտնվող անսկզմակի հեղուկի առաջացրած նորմալ ճնշման համադրը: Որը գտնելու համար անհրաժեշտ է իմանալ (6) — (7) եզրային խնդրի լուծումը: Ներշնչված եզրային խնդիրը լուծվել է թվային եղանակով «Հրազդան—2» մեքենայի վրա, որի արդյունքները հողվածում ներկայացված են գրաֆիկների տեսքով:

ЛИТЕРАТУРА

1. Мямлин А. Н., Вершубский В. Ю., Наумов Э. Н. Запись цифровой информации с высокой плотностью на магнитном барабане, сб.: «Вопросы вычислительной математики и вычислительной техники», М., 1963.
2. Сб.: «Гидродинамическая теория смазки», ГТТИ, 1934.
3. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений, М. — Л., Гостехиздат, 1951.
4. Gross W. A., Michael W. A., Brunner R. K. A Gas Film lubrication Study JBM, Journal of research and development, vol. 3, № 3, July 1959.
5. Elrod H. G. «A derivation of the basic equations for Hydrodynamic Lubrication with a fluid having constant properties» Quart. Appl. Math. 17, № 4, 1960.
6. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950.
7. Каудерер Г. Нелинейная механика, М., ИЛ, 1961.
8. Березин И. С. и Жидков А. П. Методы вычислений, т. I и II, М., 1962.