

Ф. А. ОВСЕПЯН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЪЕКТОВ АВТОМАТИЗАЦИИ СТАТИСТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

Для автоматизации производственных процессов, для создания систем автоматического управления и контроля отдельными объектами и целыми комплексами необходимо знание характеристик объектов. Хорошо известные методы определения характеристик объектов, связанные с подачей на вход сигналов заданной формы (ступенчатой, синусоидальной), имеют ряд недостатков: а) нарушение нормального режима работы объекта; в) невозможность записи с достаточной точностью сигнала на выходе объекта, являющегося реакцией на входной сигнал, при наличии помех и т. п. Поэтому практическое применение этих методов большей частью невозможно или нежелательно.

Характеристики объектов могут быть определены по дифференциальным уравнениям управляемых объектов. Однако эти уравнения часто неизвестны, вследствие чего необходимо располагать экспериментальными методами определения динамических характеристик.

В данной работе рассматриваются различные способы определения характеристик объектов статистическими методами и дается их оценка. Статистические методы дают возможность определить динамические характеристики сложных объектов со многими входами и выходами в процессе нормальной эксплуатации, не зная их дифференциальных уравнений.

Применение этого метода сводится в основном к тому, что по известным реализациям входных и выходных сигналов могут быть с достаточной точностью определены основные характеристики — оператор объекта, импульсная переходная функция, передаточная функция и др. [1, 2, 3]. При этом изучается объект в целом, что достаточно для решения задачи выбора системы управления объектами определенного класса.

Во многих же случаях знание только общих характеристик недостаточно. Оптимальная система управления может быть выбрана, когда известны полностью или частично характеристики отдельных составляющих объекта [4, 5, 6, 7, 8, 9]. К числу объектов такого класса относятся, например, автоматические линии.

Данная работа состоит из двух глав. В первой главе рассматриваются методы определения характеристик объектов с учетом отдельных составляющих, во второй — методы определения основных характеристик объектов. Такое подразделение, естественно, условно, но оно удобно для рассматриваемых задач. Методы, рассматриваемые в первой главе, применимы и для определения характеристик объекта в целом, что составляет содержание второй главы.

Величины, действующие на входах и выходах объектов, будем считать стационарными случайными функциями или случайными величинами.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЪЕКТОВ С УЧЕТОМ ИХ ОТДЕЛЬНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ

§ 1. Линейный объект из n звеньев с одним входом и выходом

Рассмотрим сначала простейший объект (рис. 1), на входе которого действует случайное воздействие $X_0(t)$, на выходе — $X_1(t)$. Соответствие между $X_0(t)$ и $X_1(t)$ устанавливается оператором A_t

$$X_1(t) = A_t X_0(s), \quad (1.1)$$

где индекс t указывает на зависимость оператора от времени t . В общем случае A_t — случайный оператор и речь может идти лишь об оценке его по какому-либо критерию.

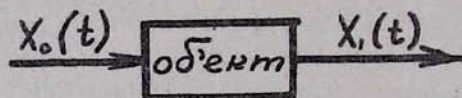


Рис. 1.

$$X_1^*(t) = A_t^* X_0(s). \quad (1.2)$$

Это равносильно требованию

$$M_p [X_1(t), X_1^*(t)] = \min, \quad (1.3)$$

где M — символ математического ожидания.

Определим оценку оператора A_t по критерию минимума среднего квадрата отклонения. В этом случае $p [X_1(t), X_1^*(t)] = [X_1(t) - X_1^*(t)]^2$. Для выполнения соотношения (1.3) достаточно, чтобы

$$M_p [X_1(t), X_1^*/x_0(t)] = \min, \quad (1.4)$$

т. е., чтобы выбранная функция была минимальной при фиксированной реализации $x_0(t)$ случайной функции $X_0(t)$.

Подставляя значение ρ в (1.4) и выполняя операцию математического ожидания, получим

$$X_1^*(t) = M[X_1(t)/x_0(t)]. \quad (1.5)$$

Уравнение (1.5) носит название линии регрессии и позволяет определить наилучшую оценку по критерию минимума среднего квадрата отклонения.

В последующем будем предполагать, что $X_1(t)$ являются дельта-коррелированными

$$K_{xx}^{(t)} = D_1 \delta(t_1 - t_2), \quad (1.6)$$

где $\delta(t_1 - t_2)$ — дельта-функция. D_1 — дисперсия случайной функции, $K_{xx}^{(t)}$ — автокорреляционная функция.

Линия регрессии для объекта, показанного на рис. 1, имеет вид

$$M[X_1/X_0] = a_1 + a_0 X_0, \quad (1.7)$$

где

$$a_1 = M[X_1] - \frac{\text{Cov}(X_1, X_0)}{D[X_0]} M[X_0], \quad (1.8)$$

$$a_0 = \frac{\text{Cov}(X_1, X_0)}{D[X_0]}, \quad (1.9)$$

$$M[X_1/X_0] = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \varphi(x_0, x_1) dx_1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_0, x_1) dx_1}, \quad (1.10)$$

а $\varphi(x_0, x_1)$ — двумерная плотность вероятности.

Рассмотрим вопрос о количественной оценке погрешностей на выходе и ее зависимость от погрешностей входа и самого объекта.

Количественную оценку общей погрешности на выходе X_1 дает $D[X_1]$, которую можно разложить на сумму из средней дисперсии относительно линии регрессии и средней дисперсии линии регрессии относительно математического ожидания

$$D[X_1] = D_1[X_1/X_0] + D_2[X_1/X_0], \quad (1.11)$$

где

$$D_1[X_1/X_0] = M[X_1 - M[X_1/X_0]]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [X_1 - M[X_1/X_0]]^2 \times \\ \times \varphi(x_0, x_1) dx_1 dx_0, \quad (1.12)$$

$$D_2[X_1/X_0] = M[M[X_1/X_0] - M[X_1]]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \{M[X_1/X_0] - M[X_1]\}^2 \varphi(x_0) dx_0. \quad (1.13)$$

Для рассматриваемого объекта (рис. 1) значения D_1 и D_2 определяются по формулам

$$D_2[X_1/X_0] = a_0^2 D[X_0], \quad (1.14)$$

$$D_1[X_1/X_0] = D[X_1] (1 - r_{x_1 x_0}^2), \quad (1.15)$$

где $r_{x_1 x_0} = \frac{\text{Cov}(X_1, X_0)}{\sqrt{D[X_0]} \sqrt{D[X_1]}}$ — коэффициент корреляции.

Дисперсия $D_1[X_1/X_0]$ характеризует погрешность, присущую самому объекту, а $D_2[X_1/X_0]$ — ту часть погрешности, которая вызвана погрешностями на входе.

Обобщим полученные результаты на случай объекта, состоящего из n линейных звеньев, показанного на рис. 2.

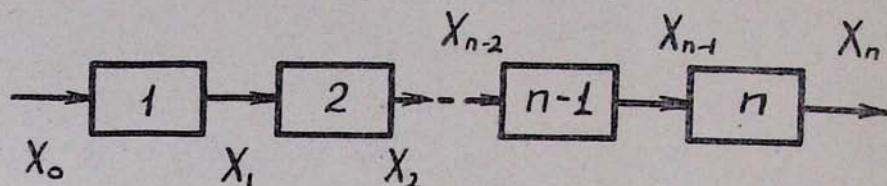


Рис. 2.

Линия регрессии для этого объекта имеет вид

$$M[X_n/X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_0] = a_n + a_{n-1}X_{n-1} + \dots + a_1X_1 + a_0X_0. \quad (1.16)$$

Значения коэффициентов регрессии a_i по критерию минимума среднего квадрата отклонения определяются из системы уравнений

$$a_{n-1}D[X_{n-1}] + a_{n-2}\text{Cov}(X_{n-1}, X_{n-2}) + \dots + a_0\text{Cov}(X_{n-1}, X_0) = \\ = \text{Cov}(X_{n-1}, X_n);$$

$$a_{n-1}\text{Cov}(X_{n-2}, X_{n-1}) + a_{n-2}D[X_{n-2}] + \dots + a_0\text{Cov}(X_{n-2}, X_0) = \\ = \text{Cov}(X_{n-2}, X_n);$$

$$\dots \dots \dots a_{n-1}\text{Cov}(X_0, X_{n-1}) + a_{n-2}\text{Cov}(X_0, X_{n-2}) + \dots + a_0D[X_0] = \text{Cov}(X_0, X_n);$$

$$a_n = M[X_n] - a_{n-1}M[X_{n-1}] - \dots - a_0M[X_0]. \quad (1.17)$$

Для оценки погрешностей воспользуемся вышеуказанным разложением дисперсии

$$D[X_n] = D_1[X_n/X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_0] + D_2[X_n/X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_0];$$

$$D_1[X_n/X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_0] = D[X_n] (1 - R_{X_n/X_{n-1}, \dots, X_0}^2); \quad (1.18)$$

$$D_2[X_n/X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_0] = D[X_n] R_{X_n/X_{n-1}, \dots, X_0}^2, \quad (1.19)$$

где $R_{X_n/X_{n-1}, \dots, X_0}$ — коэффициент множественной корреляции, определяющийся по значениям коэффициентов парной корреляции $r_{x_i x_j}$.

$$R_{X_n/X_{n-1}, \dots, X_0} = \frac{A}{B}, \quad (1.20)$$

где

$$A = \begin{vmatrix} r_{X_n X_{n-1}} & r_{X_n X_{n-2}} & \dots & r_{X_n X_0} & 0 \\ 1 & r_{X_{n-1} X_{n-2}} & \dots & r_{X_{n-1} X_0} & r_{X_{n-1} X_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{X_1 X_{n-1}} & r_{X_1 X_{n-2}} & \dots & r_{X_1 X_0} & r_{X_1 X_n} \\ r_{X_0 X_{n-1}} & r_{X_0 X_{n-2}} & \dots & 1 & r_{X_0 X_n} \end{vmatrix} \quad (1.21)$$

$$B = \begin{vmatrix} 1 & r_{X_{n-2} X_{n-1}} & \dots & r_{X_1 X_{n-1}} & r_{X_0 X_{n-1}} \\ r_{X_{n-1} X_{n-2}} & 1 & \dots & r_{X_1 X_{n-2}} & r_{X_2 X_{n-2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{X_{n-1} X_0} & r_{X_{n-2} X_1} & \dots & 1 & r_{X_0 X_1} \\ r_{X_{n-1} X_0} & r_{X_{n-2} X_0} & \dots & r_{X_1 X_0} & 1 \end{vmatrix} \quad (1.22)$$

Дисперсия $D_2 [X_n/X_{n-1}, \dots, X_0]$ характеризует ту часть погрешности на выходе, которая вызвана погрешностями на всех входах.

Для практических расчетов ее удобнее определить из соотношения

$$D_2 [X_n/X_{n-1}, \dots, X_0] = \sum_{l=0}^{n-1} a_l \text{Cov} (X_l, X_n). \quad (1.23)$$

При выполнении практических расчетов лучше пользоваться стандартизированной величиной

$$\dot{Z}_l = \frac{X_l - M[X_l]}{\sqrt{D[X_l]}}, \quad (1.24)$$

тогда

$$a_l = \lambda_l \frac{\sigma_n}{\sigma_l} \quad (l = 0, 1, 2, \dots, n-1), \quad (1.25)$$

где

$$\sigma_l = \sqrt{D[X_l]}.$$

Уравнения (1.16) и (1.20) запишутся в виде

$$M[Z_n/Z_{n-1}, Z_{n-2}, \dots, Z_0] = \sum_{l=0}^{n-1} \lambda_l Z_l, \quad (1.26)$$

$$R_{X_n/X_{n-1}, \dots, X_0} = \sqrt{\sum_{l=0}^{n-1} \lambda_l r_{X_l X_n}}, \quad (1.27)$$

где

$$\lambda_i = \frac{A_i}{B} \quad (i=0, 1, 2, \dots, n-1), \quad (1.28)$$

B — определитель (1.22).

A_i получается заменой i -го столбца в определителе (1.21) значениями $r_{X_n X_i}$.

§ 2. Линейный объект со многими входами, выходами и учитываемыми параметрами состояния

Рассмотрим сначала простой случай, когда на входе объекта действуют две случайные функции $X_0(t)$ и $X_1(t)$, а на выходе одна — $Y(t)$. Из совокупности параметров внутреннего состояния объекта выделим одну составляющую $Z(t)$, действие которой на выход $Y(t)$ является доминирующим. Изучение влияния этого параметра на выход $Y(t)$ позволит создать схему управления им для получения требуемого $Y(t)$. В качестве примеров таких параметров объекта можно указать, например, на износ инструментов и приспособлений, на изменение температурного режима при термической обработке и т. п.

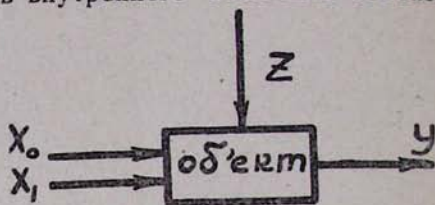


Рис. 3.

Уравнения объекта (рис. 3) на основании принципа суперпозиции можно написать в следующем виде:

$$Y(t) = A_0 X_0(t) + A_1 X_1(t) + A_2 Z(t), \quad (2.1)$$

где A_i — операторы объекта.

В последующем будем предполагать погрешности дельта-коррелированными [см. уравнение (1.16)].

При принятых допущениях уравнение регрессии записывается в виде

$$M[Y/X_0, X_1, Z] = a_3 + a_2 Z + a_1 X_1 + a_0 X_0, \quad (2.2)$$

где a_i — коэффициенты регрессии, наилучшие значения которых по критерию минимума среднего квадрата отклонения определяются из системы

$$\begin{aligned} a_0 \sigma_{X_0} + a_1 r_{X_0 X_1} \sigma_{X_1} + a_2 r_{X_0 Z} \sigma_Z &= r_{X_0 Y} \sigma_Y; \\ a_0 \sigma_{X_0} r_{X_0 X_1} + a_1 \sigma_{X_1} + a_2 r_{X_1 Z} \sigma_Z &= r_{X_1 Y} \sigma_Y; \\ a_0 \sigma_{X_0} r_{X_0 Z} + a_1 r_{X_1 Z} \sigma_{X_1} + a_2 \sigma_Z &= r_{ZY} \sigma_Y; \\ a_3 &= M[Y] - a_0 M[X_0] - a_1 M[X_1] - a_2 M[X_2]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь $\sigma_{X_i} = \sqrt{D[X_i]}$ — среднеквадратическое отклонение.

Значения $D_1[Y/X_0, X_1, Z]$ и $D_2[Y/X_0, X_1, Z]$ определяются по следующим формулам:

$$D_1[Y/X_0, X_1, Z] = D[Y](1 - R_{Y/X_0, X_1, Z}^2); \quad (2.4)$$

$$D_2[Y/X_0, X_1, Z] = a_0 r_{X_0 Y} \sigma_{X_0} \sigma_Y + a_1 r_{X_1 Y} \sigma_{X_1} \sigma_Y + a_2 r_{Z Y} \sigma_Z \sigma_Y. \quad (2.5)$$

Коэффициент множественной корреляции определяется по формуле

$$R_{Y/X_0, X_1, Z} = \sqrt{\frac{a_0^2 r_{X_0 Y}^2 \sigma_{X_0}^2 + a_1^2 r_{X_1 Y}^2 \sigma_{X_1}^2 + a_2^2 r_{Z Y}^2 \sigma_Z^2}{\sigma_Y^2}}. \quad (2.6)$$

Рассмотрим теперь объект (рис. 4) с n входными воздействиями, p выходными и m параметрами внутреннего состояния для следующих случаев: а) выходы независимы; б) выходы тесно зависимы; в) выходы коррелированы между собой

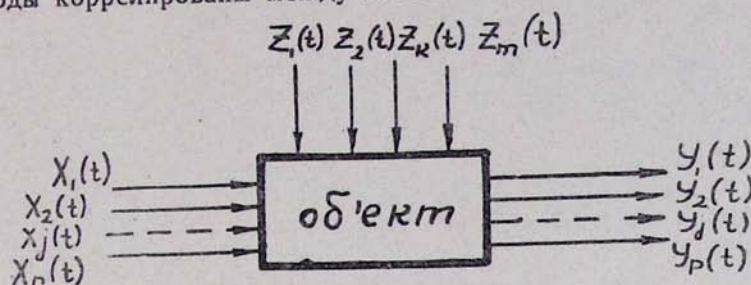


Рис. 4.

а) Количественные характеристики для каждого выхода определяются отдельно. Уравнения объекта для рассматриваемого случая по принципу суперпозиции записываются в виде

$$Y_j(t) = \sum_{i=1}^n A_i X_i(t) + \sum_{k=1}^m B_k Z_k(t), \quad (2.7)$$

где A_i и B_k — операторы многомерного объекта.

Уравнения регрессии имеют вид

$$M[Y_j/X_1, \dots, X_n; Z_1, \dots, Z_m] = a + \sum_{i=1}^n a_i X_i + \sum_{k=1}^m b_k Z_k. \quad (2.8)$$

Коэффициенты регрессии a_i и b_k определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} & a_1 \sigma_{X_1} + a_2 r_{X_1 X_2} \sigma_{X_2} + \dots + a_n r_{X_1 X_n} \sigma_{X_n} + b_1 r_{X_1 Z_1} \sigma_{Z_1} + \dots + \\ & + b_m r_{X_1 Z_m} \sigma_{Z_m} = r_{X_1 Y_j} \sigma_{Y_j}; \\ & a_1 r_{X_2 X_1} \sigma_{X_1} + a_2 \sigma_{X_2} + \dots + a_n r_{X_2 X_n} \sigma_{X_n} + b_1 r_{X_2 Z_1} \sigma_{Z_1} + \dots + \\ & + b_m r_{X_2 Z_m} \sigma_{Z_m} = r_{X_2 Y_j} \sigma_{Y_j}; \\ & \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}
& a_1 r_{X_n X_1} \sigma_{X_1} + a_2 r_{X_n X_2} \sigma_{X_2} + \dots + a_n \sigma_{X_n} + b_1 r_{X_n Z_1} \sigma_{Z_1} + \dots + \\
& + b_m r_{X_n Z_m} \sigma_{Z_m} = r_{X_n Y_j} \sigma_{Y_j}; \\
& a_1 r_{Z_1 X_1} \sigma_{X_1} + a_2 r_{Z_1 X_2} \sigma_{X_2} + \dots + a_n r_{Z_1 X_n} \sigma_{X_n} + b_1 \sigma_{Z_1} + \dots + \\
& + b_m r_{Z_1 Z_m} \sigma_{Z_m} = r_{Z_1 Y_j} \sigma_{Y_j};
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
& a_1 r_{Z_m X_1} \sigma_{X_1} + a_2 r_{Z_m X_2} \sigma_{X_2} + \dots + a_n r_{Z_m X_n} \sigma_{X_n} + b_1 r_{Z_m Z_1} \sigma_{Z_1} + \dots + \\
& + b_m \sigma_{Z_m} = r_{Z_m Y_j} \sigma_{Y_j};
\end{aligned}$$

$$a = M[Y_j] - \sum_{i=1}^n a_i M[X_i] - \sum_{k=1}^m b_k M[Z_k].$$

Значения составляющих общей дисперсии определяются из уравнений

$$D_1[Y_j/X_1, \dots, X_n; Z_1, \dots, Z_n] = D[Y_j] (1 - R_{Y_j/X_1, \dots, X_n; Z_1, \dots, Z_n}^2); \tag{2.10}$$

$$D_2[Y_j/X_1, \dots, X_n; Z_1, \dots, Z_m] = \sum_{i=1}^n a_i r_{X_i Y_j} \sigma_{X_i} \sigma_{Y_j} + \sum_{k=1}^m b_k r_{Z_k Y_j} \sigma_{Z_k} \sigma_{Y_j}; \tag{2.11}$$

$$R_{Y_j/X_1, \dots, X_n; Z_1, \dots, Z_m} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n a_i r_{X_i Y_j} \sigma_{X_i} \sigma_{Y_j} + \sum_{k=1}^m b_k r_{Z_k Y_j} \sigma_{Z_k} \sigma_{Y_j}}{D[Y_j]}}. \tag{2.12}$$

При выполнении практических расчетов удобнее пользоваться стандартизированными величинами

$$\hat{X}_i = \frac{X_i - M[X_i]}{\sigma_{X_i}}; \quad \hat{Y}_j = \frac{Y_j - M[Y_j]}{\sigma_{Y_j}}; \quad \hat{Z}_k = \frac{Z_k - M[Z_k]}{\sigma_{Z_k}}. \tag{2.13}$$

В этом случае уравнения (2.8) и (2.12) запишутся в виде

$$M[\hat{Y}_j/\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n; \hat{Z}_1, \dots, \hat{Z}_m] = \sum_{i=1}^n a_i \hat{X}_i + \sum_{k=1}^m \beta_k \hat{Z}_k; \tag{2.14}$$

$$R_{\hat{Y}_j/\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n; \hat{Z}_1, \dots, \hat{Z}_m} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n a_i r_{\hat{X}_i \hat{Y}_j} \hat{\sigma}_{\hat{X}_i} \hat{\sigma}_{\hat{Y}_j} + \sum_{k=1}^m \beta_k r_{\hat{Z}_k \hat{Y}_j} \hat{\sigma}_{\hat{Z}_k} \hat{\sigma}_{\hat{Y}_j}}{D[\hat{Y}_j]}}. \tag{2.15}$$

Значения a_i и α_i , b_k и β_k связаны соотношениями

$$a_i = \alpha_i \frac{\sigma_{Y_j}}{\sigma_{X_i}}; \quad b_k = \beta_k \frac{\sigma_{Y_j}}{\sigma_{Z_k}}. \tag{2.16}$$

Такая замена целесообразна, ибо значения α_i и β_k определяются только по значениям коэффициентов парной корреляции из системы (2.17), что упрощает решение по сравнению с (2.9)

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 r_{X_1 X_2} + \dots + \alpha_n r_{X_1 X_n} + \beta_1 r_{X_1 Z_1} + \dots + \beta_m r_{X_1 Z_m} &= r_{Y_j X_1}; \\ \alpha_1 r_{X_2 X_1} + \alpha_2 + \dots + \alpha_n r_{X_2 X_n} + \beta_1 r_{X_2 Z_1} + \dots + \beta_m r_{X_2 Z_m} &= r_{Y_j X_2}; \\ . &. \\ \alpha_1 r_{X_n X_1} + \alpha_2 r_{X_n X_2} + \dots + \alpha_n + \beta_1 r_{X_n Z_1} + \dots + \beta_m r_{X_n Z_m} &= r_{Y_l X_n}; \\ \alpha_1 r_{Z_1 X_1} + \alpha_2 r_{Z_1 X_2} + \dots + \alpha_n r_{Z_1 X_n} + \beta_1 + \dots + \beta_m r_{Z_1 Z_m} &= r_{Y_j Z_1}; \quad (2.17) \\ . &. \\ \alpha_1 r_{Z_m X_1} + \alpha_2 r_{Z_m X_2} + \dots + \alpha_n r_{Z_m X_n} + \beta_1 r_{Z_m Z_1} + \dots + \beta_m &= r_{Y_l Z_m}. \end{aligned}$$

б) Определив характеристики какого-либо выхода по вышеприведенным формулам, можно определить характеристики любого другого выхода из зависимостей

$$M[Y_i/Y_i] = A + BY_i, \quad (2.18)$$

где

$$B = r_{y_f y_i} \frac{\sigma_{y_i}}{\sigma_{y_f}}; \quad (2.19)$$

$$A = M[Y_l] - BM[Y_l]. \quad (2.20)$$

От значения коэффициента парной корреляции $r_{Y_j Y_i}$ зависит точность определения математического ожидания $M[Y_i/Y_j]$. При $r_{Y_j Y_i} = 0,85 \div 0,9$, получаются удовлетворительные для практики результаты. В противном случае определение характеристик одного выхода по характеристикам другого достигается со значительной погрешностью, что, конечно, не допустимо.

с) Рассмотрим случай, когда из $Y_l (l=1, 2, \dots, p)$ рассматриваемых выходов $Y_l (l=1, 2, \dots, s)$ определяются по входам X_l и параметрам Z_k , а $Y_l (l=s+1, s+2, \dots, p)$ определяются по выходам Y_l .

Определение характеристик Y_i проводится по формулам, приведенным при рассмотрении случая а).

Определение характеристик Y_i производится по нижеприведенным формулам:

$$M[Y_i/Y_1, Y_2, \dots, Y_s] = C + \sum_{i=1}^s C_i Y_i; \quad (2.21)$$

$$D_1[Y_t/Y_1, Y_2, \dots, Y_s] = D[Y_t](1 - R_{Y_t/Y_1, \dots, Y_s}^2); \quad (2.22)$$

$$D_2[Y_t/Y_1, Y_2, \dots, Y_s] = \sum_{l=1}^s C_l r_{Y_t/Y_l} \sigma_{Y_t} \sigma_{Y_l}; \quad (2.23)$$

$$R_{Y_t/Y_1, \dots, Y_s} = \sqrt{\frac{\sum_{l=1}^s C_l r_{Y_t} r_{Y_l} \sigma_{Y_t} \sigma_{Y_l}}{D[Y_t]}}. \quad (2.24)$$

Наилучшие значения C_i по критерию минимума среднего квадрата отклонения получаются из системы

$$\begin{aligned} C_1 \sigma_{Y_1} + C_2 r_{Y_1 Y_2} \sigma_{Y_2} + \dots + C_s r_{Y_1 Y_s} \sigma_{Y_s} &= r_{Y_1 Y_t} \sigma_{Y_t}; \\ C_1 r_{Y_2 Y_1} \sigma_{Y_1} + C_2 \sigma_{Y_2} + \dots + C_s r_{Y_2 Y_s} \sigma_{Y_s} &= r_{Y_2 Y_t} \sigma_{Y_t}; \\ . &. \\ C_1 r_{Y_s Y_1} \sigma_{Y_1} + C_2 r_{Y_s Y_2} \sigma_{Y_2} + \dots + C_s \sigma_{Y_s} &= r_{Y_s Y_t} \sigma_{Y_t}; \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$C = M[Y_t] - \sum_{l=1}^s C_l M[Y_l].$$

Найденные характеристики выходов Y_i дают дополнительную информацию о связях входов и выходов и позволяют выбрать оптимальную систему управления.

А теперь рассмотрим объект, состоящий из n звеньев, каждое из которых представляет собой звено со многими входами, выходами и учитываемыми внутренними параметрами. Формулы, получаемые при рассмотрении данного случая, сложны и решение их трудоемко.

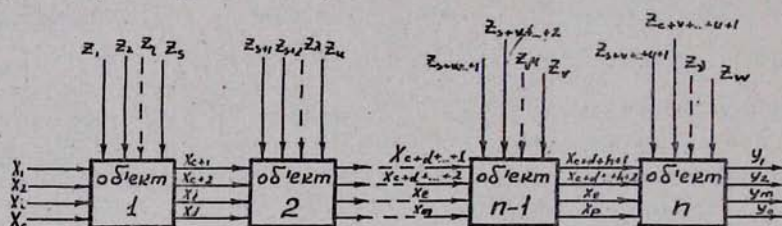


Рис. 5.

Но затруднения легко преодолеваются, учитывая возможности специализированных электронных вычислительных машин и устройств. Уравнение объекта, показанного на рис. 5, аналогично уравнению (2.7)

$$Y_m(t) = \sum_{k=1}^p A_k X_k(t) + \sum_{\bar{v}=1}^w B_{\bar{v}} Z_{\bar{v}}. \quad (2.26)$$

Уравнение регрессии имеет вид

$$M[Y_m/X_k, Z_i] = a + \sum_{k=1}^p a_k X_k + \sum_{i=1}^w b_i Z_i. \quad (2.27)$$

Значение коэффициентов регрессии определяются из системы

[illegible]

Значение $D_1[Y_m/X_k, Z_0]$ является характеристикой погрешностей, вызванной действием неучтенных параметров объекта, и определяется по формуле

$$D_1[Y_m/X_k, Z_c] = D[Y_m](1 - R_{Y_m/X_k, Z_c}^2). \quad (2.29)$$

Значение $D_2[Y_m/X_k, Z_i]$ является характеристикой погрешностей, вызванных учтенными входами X_k и параметрами Z_i

$$D_2[Y_m|X_k, Z_i] = \sum_{k=1}^p \sum_{k'=1}^p a_k a_{k'} \text{Cov}(X_k, X_{k'}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^w \sum_{i'=1}^w b_i b_{i'} \text{Cov}(Z_i, Z_{i'}) + 2 \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^w a_k b_i \text{Cov}(X_k, Z_i). \quad (2.30)$$

Коэффициент множественной корреляции определяется как

$$R_{Y_m/X_k, Z_{\hat{\theta}}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^p a_k \text{Cov}(X_k, Y_m) + \sum_{\hat{\theta}=1}^w b_{\hat{\theta}} \text{Cov}(Z_{\hat{\theta}}, Y_m)}{D[Y_m]}}. \quad (2.31)$$

Для случая безынерционного объекта без запаздывания коэффициенты регрессии дают наилучшие оценки операторов по критерию минимума среднего квадрата отклонения.

§ 3. Некоторые замечания к определению характеристик нелинейных объектов

В реальных объектах связь входа X_i учитываемого параметра Z_k и выхода Y_j может быть нелинейной, могут быть непостоянными

и значения условных дисперсий. Применение вышеприведенных формул для определения характеристик таких объектов может привести к значительным ошибкам. Линейные методы широко используются для исследования тех нелинейных объектов, которые можно рассматривать приближенно как линейные. Статистическая проверка гипотезы о линейности регрессии производится следующим образом. Определяется корреляционное отношение

$$\eta_{Y_I/X_I, Z_k} = \sqrt{\frac{M[Y_I - M[Y_I/X_I, Z_k]]^2}{D[Y_I]}} \quad (3.1)$$

и сопоставляется оно со значением коэффициента множественной корреляции по формуле

$$F = \frac{(n-h)^2 (\eta^2 - R^2)}{(h-2)(1-\eta^2)}, \quad (3.2)$$

где n — общее число экспериментов, h — число интервалов корреляционной таблицы, по которым определялись значения R и η . Полученные значения F сопоставляются с табулированными значениями F_T [10]. Если $F < F_T$, то принимается с заданной вероятностью, что регрессия линейна. Если $F > F_T$, то нужно учесть нелинейность регрессии и непостоянство условных дисперсий. В этом случае линию регрессии разбивают на ряд участков, для которых дисперсия примерно одинакова.

Рассмотрим применение такого метода исследования к объекту, показанному на рис. 2.

Значения условных математических ожиданий и условных дисперсий для каждого из m участков l -го звена определяются по формулам, аналогичным (1.7), (1.14), (1.15).

$$M_l[X_l/X_{l-1}] = a_{l,l-1} + b_{l,l-1} X_{l,l-1} \quad (l = 1, 2, \dots, m); \quad (3.3)$$

$$M_l[X_l] = a_{l,l-1} + b_{l,l-1} M[X_{l,l-1}] \quad (l = 1, 2, \dots, m); \quad (3.4)$$

$$D_l[X_l] = D_{l,l-1}[X_l/X_{l-1}] + b_{l,l-1}^2 D_l[X_{l-1}]. \quad (3.5)$$

Общие характеристики рассматриваемого звена будут равны

$$M[X_l] = \sum_{l=1}^m p_l M_l[X_l]; \quad (3.6)$$

$$D[X_l] = \sum_{l=1}^m p_l \{D_l[X_l] + [M_l[X_l] - M[X_l]]^2\}, \quad (3.7)$$

где p_l — вероятность появления X_{l-1} на участке l .

Математическая модель объекта, полученная на основании расчета, должна возможно полнее отражать закономерности, присущие реальному объекту. Для характеристики степени точности полученной модели в статистической динамике применяется величина $Q[Y_k(t)/X(t), Z(t)]$, названная мерой определенности (МОП).

$$Q[Y_k(t)/X(t), Z(t)] = \frac{D_2[Y_k(t)/X(t), Z(t)]}{D[Y_k(t)]}, \quad (3.8)$$

где $X(t)$ и $Z(t)$ — векторные функции с составляющими $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ и $(Z_1, Z_2, \dots, Z_m)$, а $D_2[Y_k(t)/X(t), Z(t)]$ определяются по формулам (1.19), (1.23), (2.5), (2.11). Величина $Q[Y_k(t)/X(t), Z(t)]$ характеризует степень детерминированности данного объекта. Действительно, для детерминированных объектов величина $Q[Y_k(t)/X(t), Z(t)]$ равна $D[Y_k]$, так как объект полностью характеризуется входной векторной функцией $X(t)$ и векторной функцией параметров $Z(t)$, и МОП равна 1. Для нерегулярных объектов МОП равна 0, так как выходные величины $Y_k(t)$ могут принять любые значения и их невозможно предсказать, так как они не зависят от выбранных $X(t)$ и $Z(t)$.

Полученные вероятностные характеристики объекта практически достаточно точно воспроизводят реальные взаимосвязи, если величина МОП колеблется в пределах $0,85 \div 0,90$. Дальнейшее увеличение МОП за счет увеличения количества составляющих $X(t)$ и $Z(t)$ происходит очень медленно, и практически нецелесообразно проведение дополнительных экспериментов.

II. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЪЕКТОВ

§ 1. Линейный объект с одним входом и выходом

Основными динамическими характеристиками объекта являются оператор объекта, импульсная переходная функция и передаточная функция.

Как уже отмечалось, в общем случае при применении статистических методов и при решении практических задач оператор объекта является случайным и речь может идти лишь об его оценке. Получим оценку линейного оператора по критерию минимума среднеквадратичной ошибки для случая рис. 1. Для этого вернемся к исследованию уравнения (1.5) главы 1*. Умножая обе части этого уравнения на $X_0(u)$ и предполагая $M[X_0(t)] = 0$ и $M[X_1(t)] = 0$, получим

$$A_1^* K_{X_0 X_0}(u, s) = K_{X_0 X_1}(t, u), \quad (1.1)$$

где $K_{X_0 X_0}$ — автокорреляционная функция случайного воздействия $X_0(t)$, а $K_{X_0 X_1}$ — взаимокорреляционная функция случайных воздействий $X_0(t)$ и $X_1(t)$.

Уравнение (1.1) определяет наилучшую оценку линейного оператора по критерию минимума среднего квадрата отклонения.

* В последующем, если нет оговорок, то рассматриваются формулы данной главы.

Определим теперь другую основную характеристику объекта (рис. 6) — импульсную переходную функцию. Известно, что импульсная переходная функция и передаточная функция взаимнооднозначно связаны прямым и обратным преобразованием Фурье

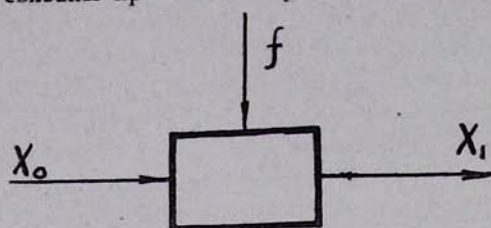


Рис. 6.

$$\Phi(j\omega) = \int_0^{\infty} k(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (1.2)$$

$$k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (1.3)$$

где $k(t)$ — импульсная переходная функция, а $\Phi(j\omega)$ — передаточная функция. Следовательно, знание одной из них вполне достаточно для определения другой.

Уравнение рассматриваемого объекта запишется в виде

$$X_1(t) = \int_0^{\infty} X_0(t-\theta) k(\theta) d\theta + \int_0^{\infty} f(t-\theta) k_f(\theta) d\theta, \quad (1.4)$$

где $k_f(t)$ — импульсная переходная функция по отношению к помехе. Взаимнокорреляционная функция входа и выхода определяется по формуле

$$K_{x_0 x_1}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_0(t) X_1(t-\tau) d\tau. \quad (1.5)$$

Подставляя в уравнение (1.5) значение $X_1(t)$ из (1.4), после соответствующих преобразований получим

$$K_{x_0 x_1}(\tau) = \int_0^{\infty} K_{x_0 x_0}(\tau-\theta) k(\theta) d\theta + \int_0^{\infty} K_{f x_0}(\tau-\theta) k_f(\theta) d\theta. \quad (1.6)$$

Если внутренние помехи $f(t)$ не зависят от входных воздействий, то $K_{f x_0}(\tau) = 0$ и в результате получаем основное уравнение для определения импульсной переходной функции рассматриваемого объекта

$$K_{x_0 x_1}(\tau) = \int_0^{\infty} K_{x_0 x_0}(\tau-\theta) k(\theta) d\theta. \quad (1.7)$$

Уравнение (1.7) является частным случаем уравнения (1.1) и называется уравнением Винера - Хопфа. Определение импульсной переходной функции из уравнения (1.7) представляет значительную трудность. Известно несколько методов его решения, как, например, алгебраический метод, частный метод, метод подбора и т. д. Рассмотрим один интересный частный случай определения $k(t)$. Пред-

положим, что воздействием на входе объекта является „белый шум“, тогда

$$K_{x_0 x_0}(\tau) = \delta(\tau), \quad (1.8)$$

где $\delta(\tau)$ — дельта-функция.

Подставляя (1.8) в (1.7), получим

$$K_{x_0 x_1}(\tau) = k(\tau). \quad (1.9)$$

Таким образом, если на входе объекта действует „белый шум“, то взаимнокорреляционная функция входной и выходной величины объекта равна $k(t)$ в момент $t = \tau$. Изменяя величину τ , можно получить величину $k(t)$ для любого момента времени. Простейшая схема для реализации уравнений (1.5) и (1.9) показана на рис. 7. Время

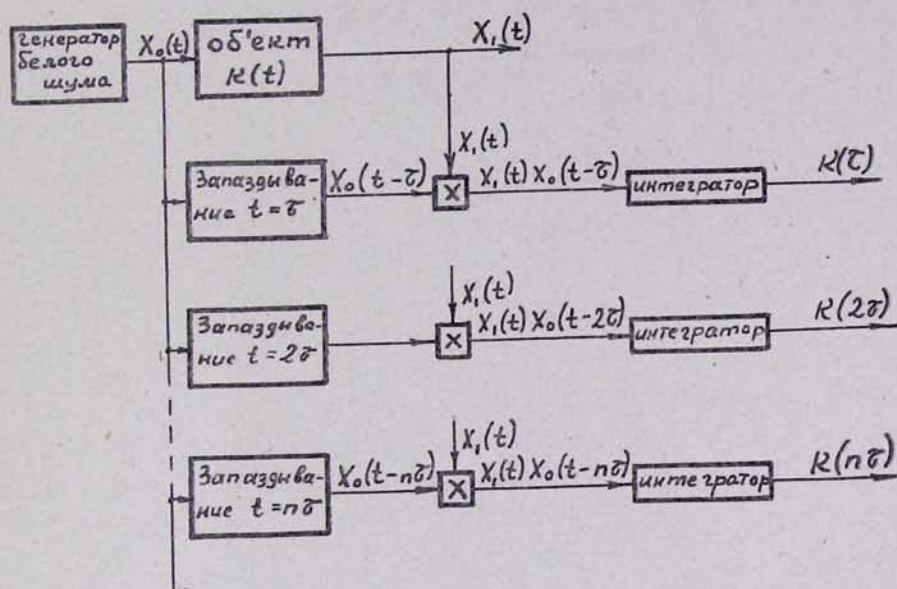


Рис. 7.

интегрирования в выражении (1.5) равно бесконечности, однако практически оно должно быть конечным, но достаточно большим, и зависит от требуемой точности.

§ 2. Линейный объект со многими входами и выходами

Рассмотрим сначала простой случай, изображенный на рис. 8. Динамические характеристики объекта в этом случае определяются двумя импульсными переходными функциями $k(t)$ и $g(t)$, которые определяются из системы

$$K_{x_0 x_2}(\tau) = \int_0^{\infty} K_{x_0 x_0}(\tau - \theta) k(\theta) d\theta + \int_0^{\infty} K_{x_1 x_0}(\tau - \theta) g(\theta) d\theta;$$

$$K_{x_1 x_2}(\tau) = \int_0^{\infty} K_{x_1 x_1}(\tau - \theta) g(\theta) d\theta + \int_0^{\infty} K_{x_2 x_1}(\tau - \theta) k(\theta) d\theta. \quad (2.1)$$

В случае, когда входы не коррелированы, получаем

$$K_{x_2 x_2}(\tau) = \int_0^{\infty} K_{x_2 x_2}(\tau - \theta) k(\theta) d\theta; \quad (2.2)$$

$$K_{x_1 x_2}(\tau) = \int_0^{\infty} K_{x_1 x_1}(\tau - \theta) g(\theta) d\theta. \quad (2.3)$$

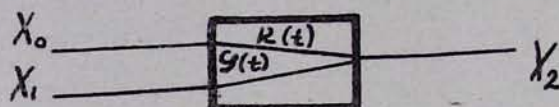


Рис. 8.

Если же входы коррелированы, то решение системы (2.1) усложняется. При линейной зависимости система решается следующим образом. Одно из входных воздействий представляется в виде суммы двух членов, один из которых не коррелирован с другим входным воздействием

$$X_1(t) = v(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} X_0(t - \theta) f(\theta) d\theta, \quad (2.4)$$

где $f(t)$ — импульсная функция, выражающая связь $X_0(t)$ и $X_1(t)$. Написав уравнения, связывающие взаимнокорреляционные функции $K_{x_2 x_1}$ и $K_{x_1 x_2}$ с автокорреляционными функциями $K_{x_2 x_2}$ и $K_{x_1 x_1}$ и учитывая (2.4), получим

$$K_{x_2 x_2} = \int_0^{\infty} K_{v v}(\tau - \theta) g(\theta) d\theta. \quad (2.5)$$

Если теперь из $X_0(t)$ выделить некоррелированную составляющую с $X_1(t)$, то по аналогии с (2.5) получим

$$K_{x_2 \varphi} = \int_0^{\infty} K_{\varphi \varphi}(\tau - \theta) k(\theta) d\theta, \quad (2.6)$$

где $\varphi(t)$ — некоррелированная с $X_1(t)$ составляющая $X_0(t)$. Из уравнений (2.5) и (2.6) определяются импульсные переходные функции $k(t)$ и $g(t)$.

Обобщим полученные результаты на объект с n входами (рис. 9). Если все n входов объекта некоррелированы друг с другом, то n импульсных переходных функций определяются из системы

$$K_{x_1 y}(\tau) = \int_0^{\infty} K_{x_1 x_1}(\tau - \theta) k_1(\theta) d\theta;$$

$$K_{x_2 y}(\tau) = \int_0^{\infty} K_{x_2 x_2}(\tau - \theta) k_2(\theta) d\theta;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$K_{x_n y}(\tau) = \int_0^{\infty} K_{x_n x_n}(\tau - \theta) k_n(\theta) d\theta.$$

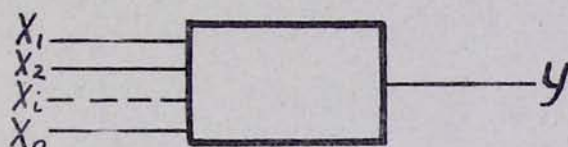


Рис. 9.

Если же входы системы коррелированы, то у каждого из $n - 1$ фиксированных входов выделяем составляющую x_i , некоррелированную с остальными входами. По аналогии с (2.5) и (2.6) можно написать

$$K_{y x_i}(\tau) = \int_0^{\infty} K_{x_i x_i}(\tau - \theta) k_i(\theta) d\theta \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1). \quad (2.8)$$

Решая систему (2.8), получим искомые импульсные переходные функции. Объекты n - входами и m - выходами рассматривать не будем, так как каждый выход можно рассматривать отдельно с n входами и в итоге получить nm импульсных переходных функций.

Определение оценок операторов для рассматриваемого случая приведено в § 4.

§ 3. Линейный объект с обратной связью

Уравнение объекта, показанного на рис. 10, аналогично (1.6)

$$K_{x_0 x_1}(\tau) = \int_0^{\infty} K_{x_0 x_0}(\tau - \theta) k(\theta) d\theta + \int_0^{\infty} K_{f x_0}(\tau - \theta) k_f(\theta) d\theta, \quad (3.1)$$

где $k(t)$ — импульсная переходная функция объекта, $k_f(t)$ — импульсная переходная функция по отношению к помехе.

Из-за наличия обратной связи помеха коррелирована с $X_0(t)$, так как выходное воздействие всегда коррелировано с помехой. В данном случае с помехой не коррелировано входное воздействие системы $X(t)$ и уравнение, связывающее вход системы с выходом, имеет вид

$$K_{x,x_1}(\tau) = \int_0^{\infty} K_{xx}(\tau - \theta) g(\theta) d\theta, \quad (3.2)$$

где $g(t)$ — импульсная переходная функция системы.

Аналогично с (3.2) для цепи обратной связи можно написать

$$K_{x_1,y}(\tau) = \int_0^{\infty} K_{x_1,x_1}(\tau - \theta) g_{oc}(\theta) d\theta, \quad (3.3)$$

где $g_{oc}(t)$ — импульсная переходная функция обратной связи.

Из уравнений (3.2) и (3.3) сначала определяются $g(t)$ и $g_{oc}(t)$, потом, используя (1.2), определяются передаточная функция системы Φ и передаточная функция обратной связи Φ_{oc} .

Передаточная функция объекта определяется из соотношения

$$\Phi_{об} = \frac{\Phi}{1 - \Phi\Phi_{oc}}. \quad (3.4)$$

Используя соотношение (1.3) по $\Phi_{об}$ определяется импульсная переходная функция объекта.

Рассмотрим теперь сложную многоконтурную систему, состоящую из многих элементов, изображенную на рис. 11.

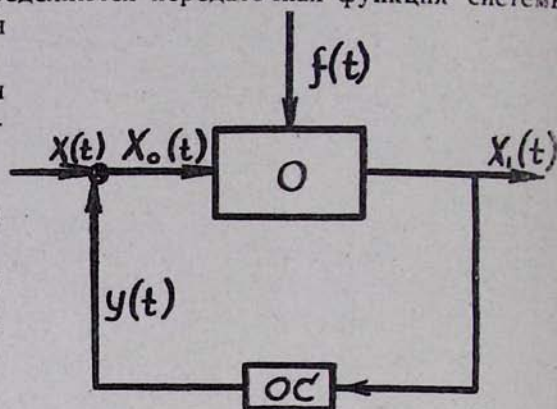


Рис. 10.

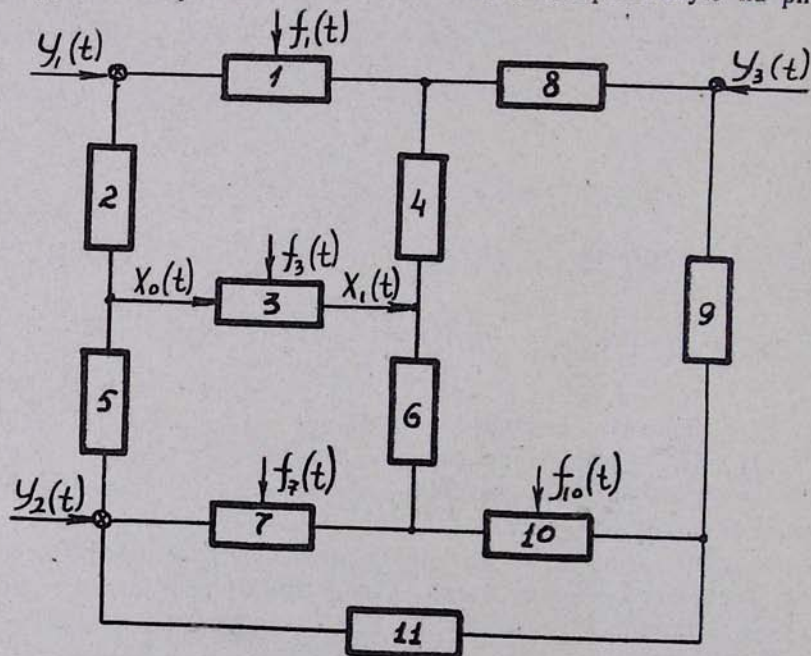


Рис. 11.

Характеристику любого элемента можно определить по записям реализаций, на входе и выходе данного элемента и по записи реализаций какого-то воздействия, некоррелированного с помехой данного элемента. Пусть, например, требуется определить характеристику элемента 3. В качестве воздействия, не коррелированного с внутренней помехой $f_3(t)$, можно взять одно из воздействий $y_1(t)$, $y_2(t)$ и т. д.

Характеристику элемента можно определить из уравнения

$$K_{x_1 y_1}(\tau) = \int_0^{\infty} K_{x_0 y_1}(\tau - \theta) k(\theta) d\theta. \quad (3.5)$$

§ 4. Нелинейные объекты, допускающие линеаризацию

Определение оценок операторов нелинейной системы с m входами и n выходами в общем случае, т. е. когда каждый из m входов воздействует на каждый из n выходов и отдельные входы коррелированы, представляет большие трудности. Ниже рассматривается метод определения оценок операторов по критерию минимума среднего квадрата отклонения для случая, когда:

а) результат нелинейных воздействий каждого из m входов на любой выход представляет собой суперпозицию

$$Y_i(t_i) = \sum_{j=1}^m a_{ij} X_j(s_j), \quad (4.1)$$

где a_{ij} — нелинейный оператор связи j -го входа с i -м выходом:

б) операторы a_{ij} линейно коррелированы с входами

$$a_{ij} = b_{ij} X_j(u_j) + c_{ij}, \quad (4.2)$$

где b_{ij} и c_{ij} — неизвестные линейные операторы, некоррелированные с входами.

Уравнение оценки будет иметь следующий вид

$$A_{i_l}^* X(s) = \sum_{j=1}^m b_{ij}^* X_j(u_j) X_j(s_j) + \sum_{j=1}^m c_{ij}^* X_j(s_j) \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (4.3)$$

Оценки операторов b_{ij}^* и c_{ij}^* определяются из системы

$$\begin{aligned} M[Y_i(t_i) X_k(v_k) X_k(w_k)] - \sum_{j=1}^m b_{ij}^* M[X_j(u_j) X_j(s_j) X_k(v_k) X_k(w_k)] - \\ - \sum_{j=1}^m c_{ij}^* M[X_j(u_j) X_k(v_k) X_k(w_k)] = 0; \\ M[Y_i(t_i) X_k(v_k)] - \sum_{j=1}^m b_{ij}^* M[X_k(w_k) X_j(u_j) X_j(s_j)] - \end{aligned}$$

$$-\sum_{j=1}^m c_{ij} M[X_j(s_j) X_k(v_k)] = 0. \quad (4.4)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, m).$$

Решив эту систему, получим наилучшие оценки неизвестных операторов по критерию минимума среднего квадрата отклонения.

Методы определения импульсной переходной функции линейных объектов можно применить для построения линейного объекта, воздействие на выходе которого по критерию минимума среднего квадрата отклонения близко к воздействию на выходе заданного нелинейного объекта. Пусть на входе нелинейного объекта действует воздействие $X_0(t)$, а на выходе — $X_1(t)$. Критерий минимума среднеквадратичной ошибки в данном случае запишется в виде

$$M \left[X_1(t) - \int_0^{\infty} X_0(t-\theta) k(\theta) d\theta \right]^2 = \min. \quad (4.5)$$

Определяя из (4.5) $k(\theta)$ так, чтобы выполнялось условие минимума, получим

$$K_{x_0 x_1}(\tau) = \int_0^{\infty} K_{x_0 x_0}(\tau - \theta) k(\theta) d\theta, \quad (4.6)$$

что аналогично уравнению (1.7). В некоторых случаях линеаризация нелинейного объекта очень удобна, но нужно помнить, что линеаризованный объект не воспроизводит полностью всех свойств нелинейного объекта и потому не может во всех случаях ее заменить. Линеаризация допустима, например, в том случае, когда характеристики нелинейных объектов плавные кривые и их можно с большой точностью аппроксимировать прямолинейными отрезками, в большинстве прикладных задач при малых возмущениях на входе и т. д.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение методов статистической динамики к расчету динамических характеристик объектов требует значительных вычислительных работ. Но необходимо отметить, что рассмотренные методы позволяют в кратчайшие сроки определить характеристики сложных объектов со многими взаимосвязями случайного характера. Важнейшей отличительной особенностью этих методов является возможность определения математической модели объектов без нарушения нормальных условий их работы. Поэтому рассмотренные методы пригодны и для изучения живых организмов. Некоторые же вычислительные трудности преодолеваются в результате применения специальных или универсальных быстродействующих вычислительных средств.

В настоящее время рассмотренные методы находят применение на предприятиях республики для определения характеристик объектов автоматизации.

Автор благодарит Н. С. Райбмана за ряд ценных замечаний, сделанных им при просмотре рукописи.

Поступило 9. XII 1963

Ֆ. Ա. ՀՈՎՍԵԲՅԱՆ

ԱՎՏՈՄԱՏԱՅՄԱՆ ՕՐԶԵԿՏՆԵՐԻ ԴԻՆԱՄԻԿ ԲՆՈՒԹԱԳԾԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ
ՍՏԱՏԻՍՏԻԿԱԿԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐՈՎ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Հոդվածում, կիրառելով ստատիստիկական դինամիկայի մեթոդները, որոշվում են զծային միաշափ և բազմաշափ օբյեկտների դինամիկ բնութագրերը: Ոչ զծային օբյեկտների համար կիրառվում է ստատիստիկական զծայնացման մեթոդը: Որոշվում է բարդ, փոխադարձ կապված արդյունաբերական պրոցեսների փոխանցման և իմպուլսային անցման ֆունկցիաները:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. Физматгиз, 1960.
2. Солодовников В. В. и Усков А. С. Статистический анализ объектов регулирования. Машгиз, 1960.
3. Леонов Ю. П., Липатов Л. Н. Применение статистических методов для определения характеристик объектов. "Автоматика и телемеханика", 1959, т. XX, № 9.
4. Райбман Н. С. Корреляционные методы определения приближенных характеристик автоматических линий. "Изв. АН СССР", ОТН, "Энергетика и автоматика", 1961, № 1.
5. Раевский С. Я. и Райбман Н. С. Применение методов статистической динамики к расчету характеристик некоторых объектов автоматизации. "Автоматика и телемеханика", 1961, т. XXII, № 11.
6. Райбман Н. С. Корреляционные методы определения приближенных характеристик многомерных процессов автоматических линий. "Изв. АН СССР", ОТН, "Энергетика и автоматика", 1962, № 2.
7. Раевский С. Я., Райбман Н. С. Статистический метод определения неизвестных многомерных операторов объектов автоматизации в слаболинейном приближении. "Автоматика и телемеханика", 1962, т. XXIII, № 7.
8. Райбман Н. С. Корреляционные методы определения характеристик автоматических линий с многомерными процессами. "Изв. АН СССР", ОТН, "Техническая кибернетика", № 2, 1963.
9. Райбман Н. С. Мера определенности и точность прогнозирования при определении характеристик сложных объектов автоматизации статистическими методами. "Автоматика и телемеханика", 1963, т. XXIV, № 9.
10. Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями. ИЛ, 1956.