Г. Л. АРЕШЯН, Г. Б. МАРАНДЖЯН

О ВЕРОЯТНОСТНОМ И ЭНТРОПИЙНОМ КРИТЕРИЯХ НАДЕЖНОСТИ

Элементы, устройства и сложные системы дискретной техники, не обладающие памятью, при определенных условиях ненадежной работы, а именно в случаях, когда ненадежная работа таких детерминистских автоматов обусловлена только сбоями, могут рассматриваться как вероятностные автоматы без памяти*.

Ненадежная работа детерминистского дискретного автомата обусловлена возникновением ошибки (неправильным срабатыванием) в рабочем такте. Ошибка может произойти либо в результате отказа, либо в результате сбоя.

Определение 1. Если в данном автомате, в данном такте произошло необратимое изменение в конструкции (например, обрыв или замыкание) или в физических параметрах (например, потеря эмиссии), которое привело к неправильному срабатыванию, и во всех последующих тактах, при прочих равных условиях, также будет причиной неправильного срабатывания с вероятностью, равной единице, то такую ошибку будем называть отказом.

Определение 2. Сбоем в данном такте назовем ошибку, которая обусловлена обратимыми изменениями физических параметров и другими случайными факторами (например, наводками), не обязательно приводящими к ошибке в последующих тактах при всех прочих равных, мыслимо возможных и поддающихся учету условиях.

Тогда ясно, что после того как произошел сбой, устройство не требует ремонта, замены элементов и других мероприятий для восста-

---

* Вероятностным дискретным автоматом без памяти назовем устройство, служащее для переработки дискретной информации, имеющее одно неизменное состояние; при этом каждый входной символ определяет распределение вероятностей на выходном алфавите. Такой автомат полностью задается матрицей реакций.

В дальнейшем рассматриваются только автоматы без памяти, если нет специальной оговорки.

овления нормальной работы этого устройства в последующих тактах.

Для того чтобы показать, как привести детерминистский автомат к вероятностному, если первый работает со сбоями, рассмотрим следующий пример.

Пусть дан вероятностный дискретный автомат A с входным алфавитом, состоящим из четырех и выходным алфавитом, состоящим из двух символов и заданной следующей матрицей реакций

$$A=\|a_{ij}\|=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 & 0,3 \\ 0,2 & 0,9 & 0,9 & 0,7 \end{Vmatrix} \qquad (1)$$

Каждый столбец матрицы реакций дает распределение вероятностей появления выходных символов при данном входном символе. Например, поступление на вход символа x_1 вызовет реакцию на выходе в виде символа y_1 с вероятностью 0,8 и символа y_2 с вероятностью 0,2.

Ясно, что элементы матрицы реакций есть условные вероятности $a_{ij}=p(y_i/x_j)$ и поэтому всегда

$$\sum_{i-1}^{m} a_{ij}=1 \text{ при } j=1, 2\cdots, n,$$

где n — число символов входного, а m—число символов выходного алфавитов. И, соответственно, матрица реакций имеет n столбцов и m—строк.

Если теперь в матрице реакций изменить величины a_{ij} так, чтобы $a_{11}=a_{22}=a_{23}=a_{24}=1$, а остальные равны нулю, получим матрицу

$$A_g=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \qquad (2)$$

Последняя матрица превращает рассматриваемый вероятностный автомат в детерминистский автомат, соответствующий логическому элементу „или". Таким образом, под детерминистским дискретным автоматом без памяти, в строгом смысле, будем понимать дискретный автомат, получаемый из вероятностного дискретного автомата без памяти изменением величин элементов матрицы реакций таким образом, чтобы все элементы матрицы были бы 0 либо 1, при этом каждый входной символ в данном такте однозначно и неизменно преобразуется в некоторый символ выходного алфавита.

Такое преобразование вероятностного автомата в детерминистский назовем вырождением вероятностного автомата.

Не останавливаясь в этой статье на вопросах создания и применения в различных кибернетических системах вероятностных дискретных автоматов с памятью или без нее*, рассмотрим задачу приведе-

---

* В Ереванском политехническом институте разработан и испытан один из видов вероятностного дискретного автомата без памяти.

ния устройств, которые работают со сбоями, к вероятностным автоматам.

Положим, что данный элемент „или“ работает ненадежно* в результате сбоев. При отсутствии сбоев этот элемент задавался бы матрицей (2) и рассматривался бы как детерминистский автомат, работающий абсолютно надежно.

Предположим, что производится следующая серия экспериментов с этим элементом „или“:

I серия — на вход подается достаточно длинная последовательность, состоящая только из символов x_1, и определяется число выходных символов y_1 и y_2 в выходной последовательности. Вычисляется частота появления y_1 и y_2, которая принимается за условные вероятности

$$p\,(y_1/x_1) = a_{11} = \lim_{N \to \infty} \frac{N_y}{N} = 1 - a_{21}, \tag{3}$$

где N — число поданных символов x_1, N_y — число полученных символов y_1.

II серия даст возможность определить a_{12} и a_{22}, остальные серии определят остальные элементы матрицы реакций. Ясно, что в процессе эксперимента не учитываются результаты опыта в тех случаях, когда происходит отказ. Следовательно, в результате эксперимента, может быть получена, например, следующая матрица реакций

$$A = \begin{Vmatrix} 1 - 1\cdot 10^{-7\times} & 1\cdot 10^{-8} & 1\cdot 10^{-8} & 1\cdot 10^{-6} \\ 1\cdot 10^{-7} & 1 - 1\cdot 10^{-8\times} & 1 - 1\cdot 10^{-8\times} & 1 - 1\cdot 1^{-6\times} \end{Vmatrix} \tag{4}$$

которая соответствует вполне определенному вероятностному автомату и учитывает ненадежную работу реального элемента в результате сбоев. Таким образом, любой вероятностный дискретный автомат без памяти можно рассматривать так же, как математическую модель вполне реального устройства дискретной техники без памяти, работающего ненадежно в результате сбоев.

При этом требуется отмаркировать те элементы матрицы реакций, которые при надежной работе реального устройства становятся равными единице. В дальнейшем маркировку будем производить крестиком (см. уравнение 4).

При анализе вероятностных дискретных автоматов возникает необходимость иметь количественные критерии, оценивающие эти автоматы как модели реальных устройств с точки зрения надежности.

Так как любая корректная композиция таких автоматов в сложную систему дает в целом снова вероятностный автомат, матрица реакций которого определяется через матрицы реакций исходных автоматов**, то

---

* Во всех дальнейших рассуждениях принимаются во внимание ошибки, возникающие только в результате сбоев. При отсутствии сбоев считаем, что автомат работает абсолютно надежно.

** Доказательство см. в ст. „О некоторых вопросах теории вероятностных автоматов“ настоящего сборника.

достаточно получить критерии для одной матрицы, и тогда они будут применены к системе любой сложности, состоящей из вероятностных автоматов.

Потребуем, чтобы критерии удовлетворяли следующим условиям:

1. Численное значение критерия должно находиться в пределах от 0 до 1.

2. При вырождении вероятностного автомата в детерминистский численное значение критерия должно становиться равным единице, что будет соответствовать абсолютно надежной работе реального устройства (отсутствие сбоя).

3. При увеличении частоты сбоев в реальном устройстве величина критерия должна уменьшаться.

Определение 3. Вероятностным критерием надежности называется функция.

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij}^{\times}, \qquad (5)$$

где $\{p_j\}$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ — распределение вероятностей на входном алфавите вероятностного автомата, $a_{ij}^{\times}$ — маркированные элементы матрицы реакций вероятностного автомата.

Критерий ψ удовлетворяет всем сформулированным выше условиям. Величина ψ равна нулю (при $p_j \neq 0$, $j = 1, 2, \cdots, n$) в случае, когда в реальном устройстве во всех тактах происходят сбои.

Если через τ обозначить промежуток времени между началом двух соседних рабочих тактов, то величина $\frac{1}{\tau}(1-\psi)$ является математическим ожиданием количества сбоев устройства в единицу времени. Действительно, при поступлении в данном такте символа x_j вероятность того, что устройство сработает неправильно, равна $1 - a_{ij}^{\times}$.

Математическое ожидание вероятности неправильной работы в одном такте при поступлении любого сигнала равно

$$M(1 - a_{ij}^{\times}) = \sum_{j=1}^{n} p_j (1 - a_{ij}^{\times}) = 1 - \psi. \qquad (6)$$

Придерживаясь терминологии Б. В. Гнеденко и Я. Б. Шора (Л1), для параметра потока отказов $\Lambda(t)$, который определяет собой среднее число отказов (сбоев в нашем случае) в единицу времени вблизи момента t получаем следующую зависимость с вероятностным критерием

$$\Lambda(t) = \frac{1}{\tau}(1-\psi) = \text{const} = \Lambda. \qquad (7)$$

Так как вероятность безотказной работы равна* $p(t) = e^{-\Lambda t}$, то получаем следующую важную зависимость между временем безотказной работы и вероятностным критерием

* В случае $\Lambda(t) = \text{const}$ и вероятности появления k сбоев, подчиняющейся закону Пуассона.

$$p(t) = e^{-(1-\psi)\frac{t}{\tau}}. \tag{8}$$

Обозначая через $k = \frac{t}{\tau}$ число тактов, можно выразить $p(t)$ через количество тактов работы

$$p(k) = \exp[-(1-\psi)k]. \tag{9}$$

Определение 4. Энтропийным критерием надежности называется функция

$$\varphi = \frac{\log m + \sum_{j=1}^{n} p_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \log a_{ij}}{\log m}, \tag{10}$$

где $\{p_j\}$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ — распределение вероятностей на входном алфавите вероятностного автомата, a_{ij} — элементы матрицы реакций, m — число символов выходного алфавита. Энтропийный критерий удовлетворяет требуемым условиям.

Величина $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \log a_{ij}$ представляет собой энтропию j-го столбца матрицы; максимальное значение энтропии равно $\log m$ и достигается при $a_{ij} = \frac{1}{m}$ для всех i, j. Энтропия любого столбца при вырождении вероятностного автомата становится равной нулю. Второе слагаемое числителя представляет собой сумму взвешенных энтропий всех столбцов матрицы, взятую со знаком —. Энтропийный критерий равен нулю в случае, когда любой символ на входе вызывает равновероятный исход появления любого символа y на выходе. Нулевое значение φ наступает не одновременно с нулевым значением ψ.

Энтропийный критерий, в отличие от вероятностного, зависит от варьирования величин элементов столбца матрицы при условии, что $a^*_{ij} = \text{const}$. Вероятностный критерий в этом случае не меняется, так как зависит только от маркированных значений элементов матрицы.

Примечание. Энтропийный критерий можно записать в виде

$$\varphi = \frac{H_{\max}(y) - H(y/x)}{H_{\max}(y)}, \tag{11}$$

где $H_{\max}(y) = \log m$ — максимальное значение информации, содержащейся в случайной величине $y \in \{y_i\}$, заданной распределением вероятностей

$$q_i; \quad i = 1, 2, \cdots, m,$$

где $q_i = \sum_{j=1}^{m} p_j a_{ij}$ — полная вероятность появления на выходе символа y_i, а

$$H(y/x) = -\sum_{j} p_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \log a_{ij}$$

— условная величина информации зависимых случайных величин

$$y \in \{y_i\} \quad \text{и} \quad x \in \{x_j\}.$$

Скорость передачи информации (Л2)

$$d = H(y) - H(y/x) \tag{12}$$

не совпадает, следовательно, со значением числителя энтропийного критерия. Пропускная способность $C = \sup R$ (по распределению вероятностей на входе) также отлична от числителя критеря φ.

Изложенные в настоящей статье результаты были доложены и обсуждены на семинаре по технической кибернетике Ереванского политехнического института.

В заключение авторы приносят благодарность доц. Г. А. Амбарцумян за помощь и консультации.

Поступило 16. I.1964

Գ. Լ. ԱՐԵՇՅԱՆ, Հ. Բ. ՄԱՐԱՆՋՅԱՆ

ՀՈՒՍԱԼԻՈՒԹՅԱՆ ՀԱՎԱՆԱԿԱՆԱՅԻՆ ԵՎ ԷՆՏՐՈՊԻԱԿԱՆ ՉԱՓԱՆԻՇՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Տվյալ հոդվածում ապացուցվում է դիսկրետ տեխնիկայում ոչ-հուսալի սարքավորումների պատկերացման հնարավորությունը՝ ռեակցիաների մատրիցաներով տրված հավանականային ավտոմատների ձևով։

Նկարագրվում է իրական սարքավորումների ռեակցիաների մատրիցաների ստացման փորձնական մեթոդը։

Առաջարկվում է հուսալիության երկու չափանիշ՝ հավանականային և էնտրոպիական, որոնք հաշվվում են ռեակցիաների մատրիցաների էլեմենտների արժեքներով։ Չափանիշներն ընդունում են իրենց արժեքները [0,1] միջակայքում։ Չափանիշը, որը հավասար է մեկի, համապատասխանում է բացարձակ հուսալի սարքավորմանը։ Տրված է կապը հավանականային չափանիշի և չընդհատվող աշխատանքի միջին տևողության միջև։

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Гнеденко Б. В.* и *Шор Я. Б.* Надежность. Энциклопедия современной техники „Автоматизация производства и промышленная электроника", том 2, 1963.

[2] *Файнстейн А.* Основы теории информации. М., ИЛ, 1960.